

# 间歇驱动混沌同步法\*

赖建文 周世平

(上海大学物理系, 上海 201800)

李国辉 徐得名

(上海大学通信与信息工程学院, 上海 201800)

(2000 年 6 月 7 日收到)

在 Pecora 和 Carroll 提出的驱动-响应同步方案的基础上, 引入间歇驱动的概念, 仅间断地驱动响应系统, 以实现驱动与响应系统混沌同步. 通过分析和数值研究表明该方法具有更大的适用范围, 增加了驱动变量的选择自由度, 且工作鲁棒.

关键词: 同步, 间歇驱动, 渐近稳定, 条件李雅谱诺夫指数

PACC: 0545, 0547

## 1 引 言

自九十年代初 Pecora 和 Carroll 提出利用驱动-响应的方案(PC 方法)<sup>[1, 2]</sup>实现混沌系统间的同步, 并在 Robert Newcomb 电路的基础上设计并实现两个混沌模拟电路同步<sup>[3]</sup>. 混沌同步的研究便成为人们研究的焦点, 陆续出现多种同步方法<sup>[4-7]</sup>, 打破了人们一直认为的混沌的运动轨迹对初始条件具有高度的敏感性而不可能实现同步的论断. PC 方法的基本思想是: 将一作为驱动系统的混沌系统分解为两个子系统  $u, v$ , 并复制子系统  $v$  为  $v'$  作为响应系统, 而将另一子系统  $u$  中的部分或全部变量作为驱动变量来连续地驱动响应系统. Pecora-Carroll 同步定理指出: 只有当响应系统是渐近稳定的(所有的条件李雅谱诺夫指数都为负), 则才能达到响应系统和驱动系统的混沌同步. 可见 PC 方法的系统分解是有限制的, 如对 Lorenz 混沌系统若采用  $x_3$  作为驱动变量, 因子系统  $[x_1, x_2]$  非渐近稳定, 而使得 PC 方法失效. 本文在 PC 方法的基础上引入间歇式驱动方案, 通过选择合适的驱动周期实现混沌同步. 事实上, 调节间歇驱动周期, 将改变驱动系统的稳定性及同步吸引域. 对驱动变量的选择也具有更大的任意性, 即使对如 Lorenz 系统采用  $x_3$  作为驱动变量, 选一合适周期的间歇驱动同步仍可实现. 该方法

还可利用对不同系统的混沌信号进行周期采样所得的混沌脉冲作为驱动信号来驱动两个相同的混沌系统实现同步. 因而, 它可广泛应用于各种现代数字通信系统的同步控制.

## 2 间歇驱动同步方法

设有一  $n$  维驱动系统为

$$\dot{x} = x(u, v), \quad (1)$$

$u, v$  是  $x$  的两个子系统, 且

$$\dot{u} = F_u(u, v), \dot{v} = F_v(u, v). \quad (2)$$

响应系统设为

$$\dot{x}' = x'(u', v'), \quad (3)$$

$u', v'$  是  $x'$  的两个子系统.

若以驱动系统 (1) 的  $u$  子系统的变量进行周期为  $T$  的采样, 并将所得混沌脉冲  $u(t_n) \chi_{t_n = nT}$  ( $m$  为整数) 作为驱动信号来间歇驱动响应系统 (3), 则间歇驱动下的响应系统的数学表述为

$$\begin{aligned} \dot{u}' &= F_u(u', v') + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - t_n) \chi(u(t_n) \\ &\quad - u'(t_n)), \\ \dot{v}' &= F_v(u', v'). \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $\delta(t)$  表示狄拉克脉冲, 若对上式在  $t \in (nT - \epsilon, nT + \epsilon)$  内进行积分, 我们可以发现当  $\epsilon \rightarrow 0$  有  $u'(nT) = u(nT)$ , 即驱动的过程仅发生在  $t = nT$

\* 国家自然科学基金(批准号 69871016)资助的课题.

时刻,在其余时间驱动系统(2)和响应系统(3)则独立发展.

根据 He 和 Vaidya 的同步定义<sup>[8]</sup>两系统同步应满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x'(t, t_0, x'_0) - x(t, t_0, x_0)\| = 0, \quad (5)$$

即要求有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Delta u\| = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \|\Delta v\| = 0, \quad (6)$$

其中  $\Delta u = u'(t, t_0, u'_0) - u(t, t_0, u_0)$ ,  $\Delta v = v'(t, t_0, v'_0) - v(t, t_0, v_0)$  根据矢量场,可得变分方程

$$\begin{aligned} \Delta \dot{u} &= F_u(u', v') - F_u(u, v) \\ &= D_u F_u(u, v) \Delta u + D_v F_u(u, v) \Delta v \\ &\quad + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - t_n) \Delta u, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{v} &= F_v(u, v) - F_v(u', v') \\ &= D_u F_v(u, v) \Delta u + D_v F_v(u, v) \Delta v. \end{aligned} \quad (8)$$

以上(7)(8)式中  $D_a F_b$  表示矢量场  $F_b$  对  $a$  的导数,并忽略了高阶小量  $O((\Delta u)^2, (\Delta v)^2)$ .

通过由(7)(8)两式构造李雅谱诺夫函数或计算其条件李雅谱诺夫指数(CLE)可确定响应系统的稳定性,从而判断响应系统能否与驱动系统达到同步.很明显,响应系统的稳定性将受到驱动周期  $T$  的影响.下面对  $T$  取不同值的情形加以分析.

### (1) $T=0$

当  $T=0$  时,即归为 PC 方法,则  $u' \equiv u$  也即为  $\Delta u(t) \equiv 0$ .

那么仅需考虑

$$\Delta \dot{v} = D_v F_v(u, v) \Delta v \quad (9)$$

的稳定性问题.由同步定理知道,若  $v$  子系统是渐近稳定的,即由(9)式所确定的响应系统的 CLE 皆为负数,则同步可以达到,否则无法同步.

### (2) $T \rightarrow \infty$

在这种情形下,两系统完全独立发展,若系统是处于混沌状态的,则从不同初始点出发的响应系统和驱动系统将是不可能同步的.且由(7)(8)两式确定的 CLE 退化为通常的李雅谱诺夫指数.

### (3) $T$ 取为较小值

对这种情形,以  $v$  子系统的稳定性为界分为两种情况进行讨论.

1)  $v$  是渐近稳定的,即(9)式确定的 CLE 皆为负值,亦即满足连续驱动同步条件,若采用间歇驱动,则响应系统的稳定性将由(7)(8)两式所确定.由于在  $t = nT$  时  $\Delta u = 0$  并且在  $nT$  时刻后的短时

间内  $D_u F_v(u, v) \Delta u$  相对于  $D_v F_v(u, v) \Delta v$  是一微小量并可忽略,则当  $T$  取得较小值时( $T < T_H$ ),由(9)式的渐近稳定性可推知(8)式也应是渐近稳定的,即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Delta v\| = 0$ .而在  $t = nT$  时刻根据间歇驱动的定义有  $\Delta u = 0$ ,则不难推知  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x'(t, t_0, x'_0) - x(t, t_0, x_0)\| = 0$ .即同步的条件在  $T < T_H$  总是可以满足的.

2)  $v$  是不稳定的,即(9)式确定的最大的 CLE 是正值,此时采用连续驱动显然不能达到同步,且同以上分析相类似,在较小的值  $T < T_H$  的范围内,由(9)式的不稳定性可推知(8)式的不稳定性,从而在  $T < T_H$  的范围内同步都是无法实现的.然而注意到,由(7)(8)两式确定的响应系统的 CLE 是驱动周期  $T$  的函数.因而,存在这样的可能性,适当选取驱动周期时,同步仍可实现.在下面的数值研究中将证实这一点.

此外我们的驱动混沌脉冲还可以是通过对一混沌系统的某些变量进行以  $T$  为采样周期所获得的离散信号  $s(T), s(2T), \dots, s(nT)$ ,用这些信号以同样的周期  $T$  来间歇驱动两个与信号系统不同类型的混沌系统实现同步.在下面的数值研究中将以 Rossler 系统驱动两个 Lorenz 达到同步进行说明.

## 3 数值研究结果分析

我们知道对于驱动-响应模型的同步方案,要使同步实现,必然要求响应系统是渐近稳定的.对一个系统的稳定性分析主要可通过两种方法,即构造李雅谱诺夫函数法<sup>[8]</sup>和计算系统的最大 CLE,而寻找合适的李雅谱诺夫函数是一件困难的事,在本文的研究中采用 WOLF 的方法<sup>[9]</sup>通过计算响应系统的最大 CLE 来确定响应系统的稳定性,从而判定同步是否可以实现.

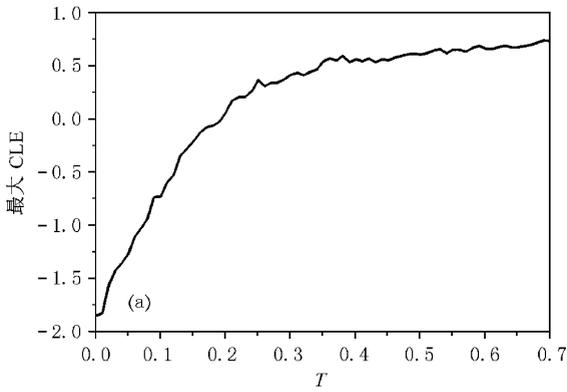
### (1) Lorenz 系统驱动 Lorenz 系统

取驱动系统为

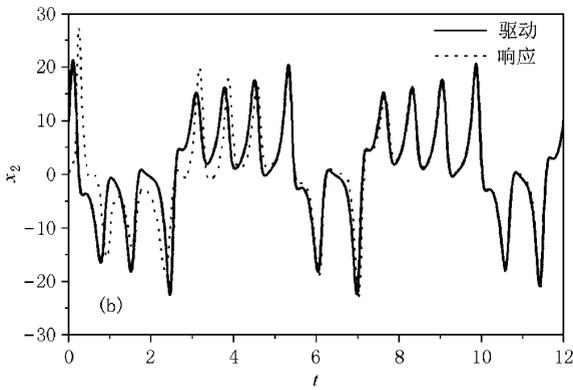
$$\dot{x} = [a(x_2 - x_1), rx_1 - x_1x_3 - x_2x_1x_2 - bx_3], \quad (10)$$

依次取  $x_1, x_2, x_3$  作为驱动变量,对同样的系统( $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$ )作间歇驱动,结果如下:以  $x_1$  作为驱动变量,则子系统  $v = [x_2, x_3]$  是一渐近稳定的,其最大 CLE 为  $-1.7839$ ,是一负值,则由图 1(a)的响应系统的最大 CLE 与间歇驱动周期的关系图可以看到在  $T < 0.20$ ,其最大 CLE 保持为负值,

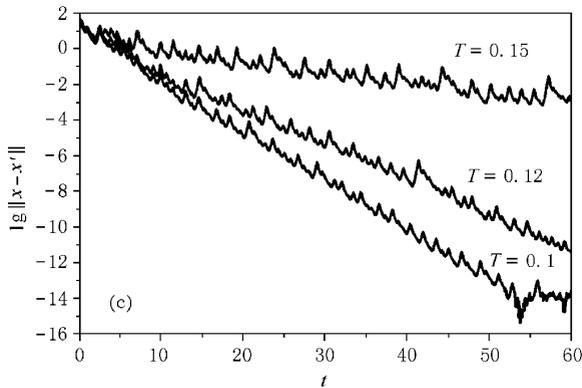
即响应系统是渐近稳定的,也就表明同步在这个周期范围内是可以达到的,图 1(b)是在  $T=0.15$  时驱动系统和响应系统的  $x_2$  分量随时间的演化图.图 1(c)是在不同的周期  $T$  ( $T=0.10, 0.12, 0.15$ )



(a)在 Lorenz 的  $x_1$  驱动下的响应系统的最大 CLE 和驱动周期  $T$  的关系图



(b)在 Lorenz 的  $x_1$  驱动下驱动和响应系统  $x_2$  分量随时间  $t$  的演化图(驱动周期  $T=0.15$ )



(c)在不同的驱动周期  $T$  下驱动和响应系统轨迹的偏差随时间  $t$  的演化图

图 1

下的驱动系统和响应系统轨迹的差值(取常用对数)随时间的演化图,在可同步的前提下可以发现响应系统的最大 CLE 越小达到同步的时间越短,但值的指出的是响应系统的最大 CLE 并非严格按周期  $T$  的增大而增大的.

以  $x_2$  作为驱动变量,子系统  $v=[x_1, x_3]$  同样是渐近稳定的,其最大 CLE 为  $-2.6662$ ,图 2 是以  $x_2$  作为驱动变量的响应系统最大 CLE 随周期  $T$  的变化关系,可以看到在  $T < 0.450$  的周期范围内同步是可以达到的.

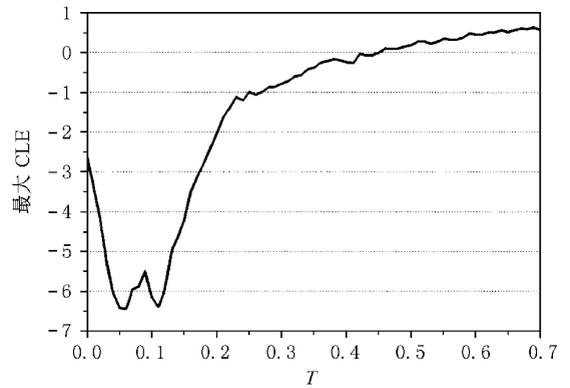


图 2 在 Lorenz 的  $x_2$  驱动下的响应系统的最大 CLE 和驱动周期  $T$  的关系图

以  $x_3$  作为驱动变量,我们知道子系统  $v=[x_1, x_2]$  并非一渐近稳定的子系统,其最大 CLE 为 0.若采用一般的连续驱动方法是无法达到同步的,而若采用间歇驱动由图 3 则可看到在  $T \in (0, 0.02) \cup (0.11, 0.17) \cup (0.42, 0.49)$  内响应系统的最大 CLE 变为负值,则在这些周期驱动下两系统仍可同步.

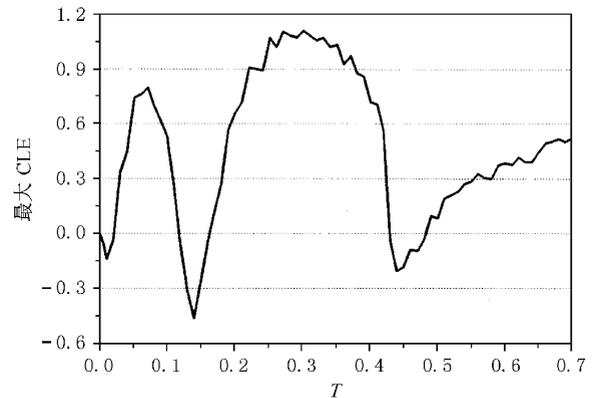


图 3 在 Lorenz 的  $x_3$  驱动下的响应系统的最大 CLE 和驱动周期  $T$  的关系图

### (2) Rossler 系统驱动 Lorenz 系统

我们可对 Rossler 系统

$$\dot{x} = [ 2 + x_1(x_2 - 4), -x_1 - x_3, x_2 + 0.45x_3 ] \quad (11)$$

中的某一变量进行以周期  $T$  的周期采样所获得的信号  $s(T), s(2T), \dots, s(nT)$  作为驱动信号来驱动两个相同的 Lorenz 系统

$$\dot{y} = [ \sigma(y_2 - y_1), r y_1 - y_1 y_3 - y_2, y_1 y_2 - b y_3 ], \quad (12)$$

其中  $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$ .

研究结果表明:以  $x_1$  作为驱动信号采样变量,当  $T < 0.34$  时两 Lorenz 系统可同步(图 4);以  $x_2$  作为驱动信号采样变量,当  $T < 0.31$  时两 Lorenz 系统可同步(图 5);以  $x_3$  作为驱动信号采样变量,当  $T \in [0, 0.12] \cup (0.35, 0.72)$  时两 Lorenz 系统可同步(图 6).

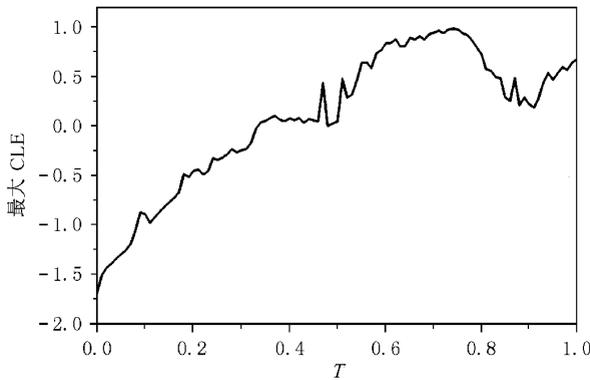


图 4 在 Rossler 的  $x_1$  驱动下的响应系统的最大 CLE 和驱动周期  $T$  的关系图

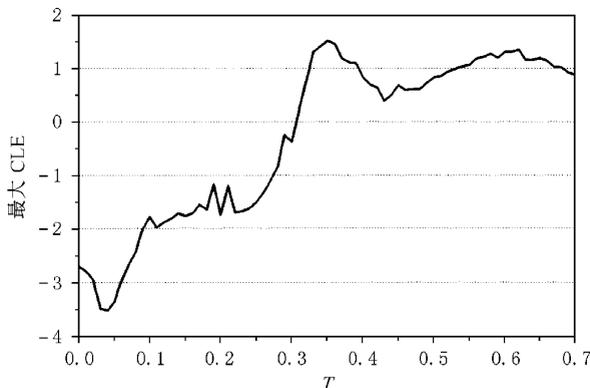


图 5 在 Rossler 的  $x_2$  驱动下的响应系统的最大 CLE 和驱动周期  $T$  的关系图

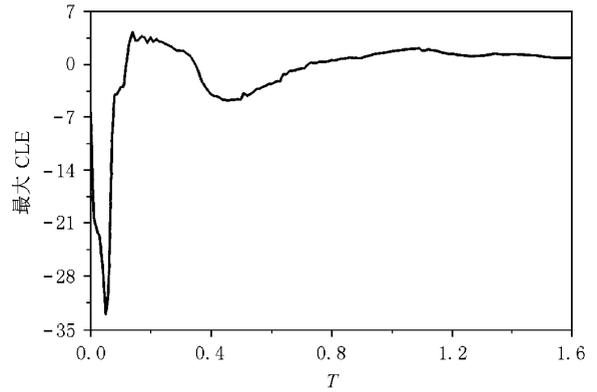


图 6 在 Rossler 的  $x_3$  驱动下的响应系统的最大 CLE 和驱动周期  $T$  的关系图

此外我们还对该同步方法的鲁棒性进行了分析,发现当(1)中两 Lorenz 系统的参数  $r$  即使出现较大的不匹配的情况下  $\Delta r = 0.05r$  ( $r$  为驱动系统参数),两系统仍可同步.图 7 是以 Lorenz 系统的  $x_2$  为驱动变量驱动 Lorenz 系统(驱动周期  $T = 0.2$ ) 在参数匹配及失配的情况下,两系统轨迹的偏差(取常用对数)随时间的演化图,结果表明同步仍可实现,只是同步的时间较参数匹配的情形长一些.这种工作中的鲁棒性使得在实际系统中构造同步成为可能,同时也表明该方法在有低噪声的影响下仍可正常工作.

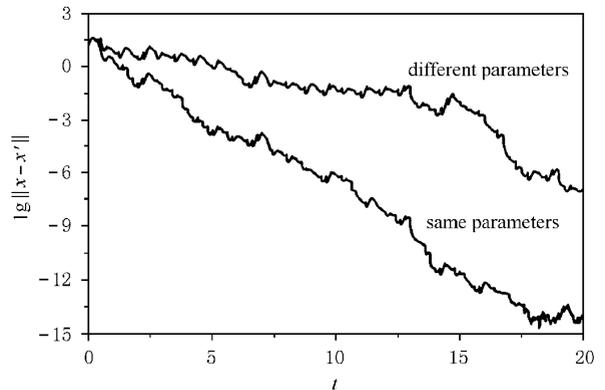


图 7 在 Lorenz 的  $x_2$  驱动下参数匹配(失配)情形驱动和响应系统轨迹偏差随时间  $t$  的演化图(驱动周期  $T = 0.2$ )

## 4 结 论

本文引入间歇驱动的概念,对 Pecora-Carroll 的连续驱动方案进行改进,定性分析及数值研究表明可利用对一混沌系统的某些变量进行周期采样所得

的信号来间歇地驱动两混沌系统达到同步. 在实际应用中我们可将所需的信号调制在驱动混沌脉冲上进行传输, 可很方便地应用于当今流行的数字通信领域中, 虽然在单位时间传输的信息量减少, 但在保

密通讯的应用中这将使得其携带的信息更加难以被窃取. 研究还表明该方法工作鲁棒, 具有一定的抗干扰能力.

- 
- [ 1 ] L. M. Pecora , T. L. Carroll , *Phys. Rev. Lett.* , **64**( 1990 ) , 812.
- [ 2 ] L. M. Pecora , T. L. Carroll , *Phys. Rev.* , **A44**( 1991 ) 2374.
- [ 3 ] T. L. Carroll , L. M. Pecora , *IEEE Trans CAS* , **38**( 1991 ) , 453.
- [ 4 ] J. Guemez , M. A. Matias , *Phys. Rev.* , **E42**( 1995 ) 2145.
- [ 5 ] T. C. Newell , P. M. Alsing *et al.* , *Phys. Rev.* , **E49**( 1994 ) , 313.
- [ 6 ] J. K. John , R. E. Amritkar , *Phys. Rev.* , **E49**( 1994 ) 4843.
- [ 7 ] Alexander , Volkovskii , *IEEE Trans CAS* **44**( 1997 ) 913.
- [ 8 ] R. He , P. G. Vaidya , *Phys. Rev.* , **A46**( 1992 ) 7387.
- [ 9 ] Alan Wolf , Jack B. Swift *et al.* , *Physica* , **16D**( 1985 ) 285.

## SYNCHRONIZATION OF CHAOTICS SYSTEMS USING OCCASIONAL DRIVING\*

LAI JIAN-WEN ZHOU SHI-PING

( *Department of Physics, Shanghai University, Shanghai 201800, China* )

LI GUO-HUI XU DE-MING

( *School of Communication and Information Engineering, Shanghai University, Shanghai 201800, China* )

( Received 7 July 2000 )

### ABSTRACT

In this paper , we study the synchronization of chaotic systems using occasional driving technique—a modified Pecora-Carroll method. Unlike Pecora-Carroll method , to synchronize the chaotic driving and response systems , the driving signal only occasionally imposes to the response system , and we update the response variables with a time-interval of the imposing action period. Numerical analysis indicates that the occasional driving method is applicable to various dynamical systems and adds the degrees of freedom in selecting the driving variables. Furthermore , the method possesses robustness while it works.

**Keywords** : synchronization , occasional drive , asymptotically stability , condition lyapunov exponents

**PACC** : 0545 , 0547