

二维分数布朗运动(FBM)随机粗糙面 电磁散射的基尔霍夫近似*

郭立新 吴振森

(西安电子科技大学理学院, 西安 710071)

(2000 年 5 月 9 日收到, 2000 年 7 月 1 日收到修改稿)

采用二维 FBM 分形函数来模拟二维实际粗糙面, 利用基尔霍夫近似给出了 FBM 粗糙面的电磁散射场和散射截面的计算公式. 数值计算并分析了散射截面与分维、特征长度及入射频率的关系, 并与高斯相关分布和指数相关分布粗糙面的散射结果做了比较.

关键词: FBM 粗糙面, 分形, 电磁散射, 基尔霍夫近似

PACC: 4120, 4753

1 引 言

随着计算机技术的发展, 数值模拟在物理建模中具有相当重要的地位. 我们知道分形可以用来模拟自然界中的不规则性^[1], 大气湍流、植被、海面及复合工程材料等, 其表面都具有不规则的几何分布, 使其对电磁(光)波的散射具有各自的分形特征, 这些复杂各异的粗糙面散射可以通过分形的方法加以描述. 随机粗糙表面电磁散射的理论和实验研究近年来取得了一系列重要的进展, 许多理论和工程上的问题需要对粗糙面散射问题进行研究^[2,3]. 一般的粗糙面散射问题需要求解一些非线性积分方程, 而且很难找到闭式解, 以往的方法都是通过找渐近解来替代真实解, 而采用分形的方法有可能便于问题的简化.

利用分形理论对粗糙面进行模拟, 它可集周期函数和随机函数的特征于一体, 其几何特征可以方便地被几个分形量来控制. 近年来有关分形粗糙面散射的研究(尤其是一维情形)越来越多^[4-8], 但到目前为止对二维分形粗糙面的散射研究较少, 作者曾就二维带限分形粗糙面的电磁散射做过讨论^[9], 该分形函数具有确定的函数形式, 用它去模拟实际粗糙面, 适用范围受到了较大限制. 本文给出更为一般的不需要给出具体函数形式的二维分数布朗运动

(FBM)^[10]粗糙面的电磁散射, 它对于功率谱只要满足 $(1/f)^{\gamma}$ 的粗糙面散射都是适用的. 通过对 FBM 粗糙面的模拟和统计特征分析, 本文利用基尔霍夫近似给出了该粗糙面散射场和散射截面的计算公式, 数值计算了不同分维、特征长度及入射频率下的散射截面, 并与有关粗糙面经典统计模型的散射结果做了比较.

2 FBM 粗糙面模型和散射截面的公式推导

FBM 是一类具有分形特征的高斯随机函数, 其模拟是基于高度起伏相关函数所对应的功率谱, 采用 Monte Carlo 方法进行的^[10], 在文献 [11] 中我们已利用该方法模拟出了二维 FBM 粗糙面, 并对其高度起伏均方根等统计参量与分维 D 的关系做了讨论. 事实上对任意一个二维 FBM 粗糙面 $z(x, y)$, 它满足以下关系式^[10]:

$$P\{z(x, y) - z(x', y') < \zeta\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2 H}} \int_{-\infty}^{\zeta} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2s^2 \tau^{2H}}\right) d\zeta, \quad (1)$$

其中

$$\tau = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}, \quad (2)$$

H 称为 Hurst 指数 $0 < H < 1$. 对于 FBM 粗糙面其分维 $D = 3 - H$. 实参量 s 是与粗糙面的特征长度 $T^{[6,12]}$ (粗糙面上斜率均方根为 1 的两点间的距离)

* 高等学校优秀青年教师教学、科研奖励基金和中国博士后科学基金资助的课题.

有关的物理量,它事实上与粗糙面斜率分布有关, s 和 T 之间满足关系

$$s = T^{(1-H)}. \quad (3)$$

将(3)式代入(1)式可得

$$P\{z(x, y) - z(x', y') < \zeta\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} T^{(1-H)} \tau^H} \int_{-\infty}^{\zeta} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2T^{(2-2H)} \tau^{2H}}\right) d\xi \quad (4)$$

FBM粗糙面具有自仿射的性质,即如令 $\Delta z(\tau) = z(x, y) - z(x', y')$,对任意的 $a > 0$ (a 为缩放因子) $\Delta z(a\tau)$ 与 $a^H \Delta z(\tau)$ 有相同的统计特征.对于一个二维FBM随机粗糙面,其功率谱满足^[10]

$$S(f) = S_0 f^{-(2+2H)} = S_0 f^{-(8-2D)}, \quad (5)$$

S_0 为一常数.同时根据文献[12]还可获得粗糙面的 s^2 参量与分维 D 的关系

$$s^2 = \frac{4S_0}{\alpha - 2} \Gamma(2D - 5) \sin\left[\frac{\pi}{2}(2D - 5)\right] B\left(\frac{1}{2}, \frac{7-2D}{2}\right), \quad (6)$$

其中 Γ, B 分别为Gamma和Beta函数.因此只要测得了二维FBM粗糙面的分维 D ,便可由上式求得粗糙面的 s^2 参量(或特征长度 T).

对于满足(1)式的自仿射FBM粗糙面,对所有 τ ,在任意小的尺度上均是连续不可导的,这对于基尔霍夫切平面近似是不适用的.我们常称此类粗糙面为“数学”上的FBM粗糙面.但对于满足(1)式的自然表面而言,取 $\tau_{\min} < \tau < \tau_{\max}$,对应于(5)式中的 $f_{\min} < f < f_{\max}$,电磁波照射到有限尺寸的表面,此时可将FBM表面视为“物理”上的粗糙表面^[12].当粗糙面的有关参数 $\tau_{\min}, \tau_{\max}, T, D$ 满足有关条件时^[12](这些条件限于篇幅不再给出),可以采用基尔霍夫近似处理此类粗糙面的散射问题.

考虑一平面电磁波 $pE_p^{(i)} \exp(ikr)$ 入射到FBM粗糙面上,如图1所示, p 代表 h (水平)或 v (垂直)极化.

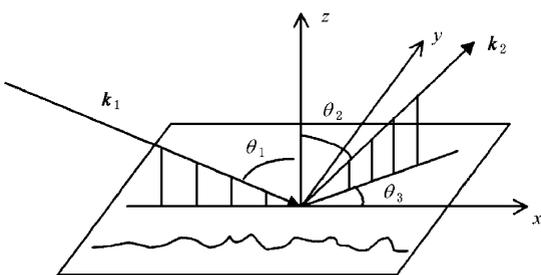


图1 二维FBM分形粗糙面散射几何示意图

利用基尔霍夫近似,在Fraunhofer区散射场可以表示为^[13]

$$E_q^{(s)} = -\frac{ik \exp(ikR_0)}{4\pi R_0} E_p^{(i)} F_{pq}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \cdot \iint_A \exp(i\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) dA = -\frac{ik \exp(ikR_0)}{4\pi R_0} E_p^{(i)} F_{pq}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \cdot \iint_A \exp[i(v_x x + v_y y + v_z z(x, y))] dx dy, \quad (7)$$

其中 $\mathbf{v} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$, k_1 和 k_2 分别表示入射和散射波矢, k 为波数, A 为照射到表面上的面积, $F_{pq}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 是与入射角、散射方位角和Fresnel散射系数有关的无量纲物理量^[14],而

$$\begin{aligned} v_x &= k(\sin\theta_1 - \sin\theta_2 \sin\theta_3), \\ v_y &= -k \sin\theta_2 \sin\theta_3, \\ v_z &= -k(\cos\theta_1 + \cos\theta_2). \end{aligned} \quad (8)$$

因此由(7)式可得

$$|E_q^{(s)}|^2 = \frac{k^2 |E_p^{(i)}|^2 |F_{pq}|^2}{(4\pi R_0)^2} \iiint \iiint \exp[iv_x(x-x') + iv_y(y-y')] \exp[iv_z(z-z')] dx dx' dy dy'. \quad (9)$$

上式中的 $\exp[iv_z(z-z')]$ 为 $z-z'$ 的特征函数,利用坐标变换 $x-x' = \tau \cos\varphi$, $y-y' = \tau \sin\varphi$,并对 x, y 积分,(9)式可以写为

$$\begin{aligned} |E_q^{(s)}|^2 &= \frac{k^2 |E_p^{(i)}|^2 |F_{pq}|^2}{(4\pi R_0)^2} A \iint \exp[i\tau v_x \cos\varphi + i\tau v_y \sin\varphi] \exp\left[-\frac{1}{2} v_z^2 s^2 \tau^{2H}\right] d\varphi d\tau \\ &= \frac{k^2 |E_p^{(i)}|^2 |F_{pq}|^2}{(4\pi R_0)^2} 2\pi A \int_0^\infty J_0(v_{xy}\tau) \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} v_z^2 s^2 \tau^{2H}\right] d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $v_{xy} = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$.将贝塞尔函数展开并积分可得

$$\begin{aligned} |E_q^{(s)}|^2 &= \frac{k^2 |E_p^{(i)}|^2 |F_{pq}|^2}{(4\pi R_0)^2} 2\pi A \frac{1}{2H} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n v_{xy}^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{H}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} |v_z| s\right)^{\frac{2n+2}{H}}} \\ &= \frac{|E_p^{(i)}|^2 |F_{pq}|^2}{(4\pi R_0)^2} 2\pi A \frac{k^2 T^2}{2H} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (v_{xy} T)^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{H}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}|v_z|T\right)^{\frac{2n+2}{H}}}. \quad (11)$$

定义归一化后向散射截面^[3]

$$\sigma_{pq}^0 = \frac{4\pi R_0^2 |E_q^{(s)}|^2}{A |E_p^{(i)}|^2}. \quad (12)$$

对于后向散射, $\theta_1 = \theta_2$, $\theta_3 = \pi$, 令 $\theta = \theta_1$, 则由(8)式可知 $v_x = 2k \sin\theta$, $v_y = 0$, $v_z = -2k \cos\theta$, 根据文献 14 可得

$$\begin{aligned} F_{hh}(\theta) &= -2R_h(\theta) \cos\theta, \\ F_{hv}(\theta) &= F_{vh}(\theta) = 0, \\ F_{vv}(\theta) &= -2R_v(\theta) \cos\theta, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $R_p(\theta)$ 为粗糙面的菲涅尔反射系数. 因此结合(11)式, 归一化后向散射截面可写为

$$\begin{aligned} \sigma_{pp}^0 &= \frac{|R_p(\theta)|^2 k^2 T^2 \cos^2\theta}{H} \\ &\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2kT \sin\theta)^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{H}\right)}{(\sqrt{2}kT \cos\theta)^{\frac{2n+2}{H}}}. \end{aligned} \quad (14)$$

如果要研究镜反射平面内的散射场 ($\theta_3 = 0, \pi$), 此时的双站归一化散射截面为

$$\begin{aligned} \sigma_{pq} &= \frac{|F_{pq}|^2 k^2 T^2}{H} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (v_{xy} T)^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \\ &\cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{H}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}|v_z|T\right)^{\frac{2n+2}{H}}}. \end{aligned} \quad (15)$$

由(8)式知, $v_{xy} = k|\sin\theta_1 - \sin\theta_2|$, $v_z = -k(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$, 对于水平极化, 有^[14]

$$F_{hh}(\theta_1, \theta_2) = -R_h(\theta_1) \frac{[2 + 2\cos(\theta_1 \pm \theta_2)]}{\cos\theta_1 + \cos\theta_2}, \quad (16)$$

式中“ \pm ”对应于 $\theta_3 = 0, \pi$.

3 数值计算结果和分析

以下我们将该 FBM 的散射结合实际情况, 为便于与有关文献做比较, 这里主要计算粗糙面在微波段的散射, 假设用某一确定分维数的 FBM 模拟实际粗糙面. 在文献 15 中, 岩土表面的分维 $2 < D < 2.5$, 对应的参量 s^2 范围为 10^{-6} — 10^{-1} , 其空间频率变化于 0.05m^{-1} 到 100m^{-1} 之间, 其标度范围

为 $1\text{cm} < \tau < 20\text{m}$. 又如对某确定海表面^[12], 在重力波谱作用下, 在有 0.37m/s 的摩擦风速作用下, 分维 $D = 2.25$ 时, 其标度范围由几厘米变化到数米. 事实上, 对于自然表面的微波散射, 其分维值一般取 $2 < D < 2.5$, s^2 在 10^{-2} 到 4×10^{-1} 之间变化, 在此范围内基尔霍夫近似是有效的^[12].

图 2 中根据(14)式计算了在不同的 s^2 下后向散射截面的角分布, 其中 $\epsilon_r = (15, 2)$, $D = 2.25$, 入射频率 $f = 1.5\text{GHz}$. 图 3 则计算了不同入射角下后向散射截面随分维的变化, 图中 $s^2 = 0.1$, 入射频率和介电参数同图 2.

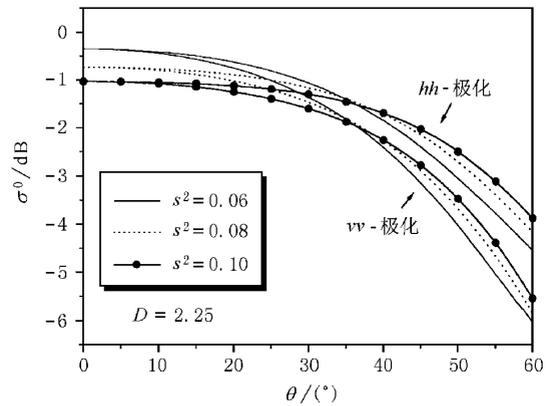


图 2 后向散射截面在不同 s^2 下的角分布

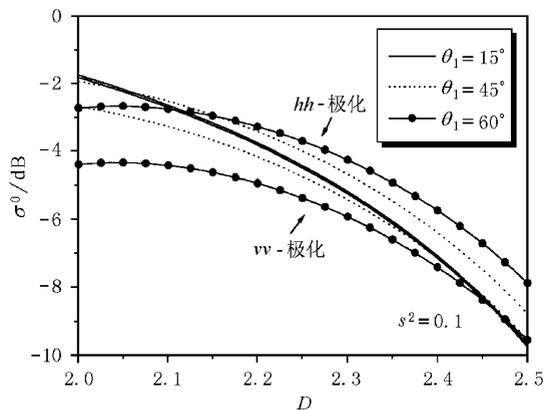


图 3 后向散射截面在不同分维下的角分布

从图 2 中可以看出后向散射截面 σ^0 随着入射角的增加而减小, 无论对 hh -极化和 vv -极化, 在入射角较小的情况下, 随着 s^2 的增加, σ^0 逐渐减小, 而随着入射角的增大, 当到达一定的入射角后 (图 2 中为 35° 左右), s^2 越大, σ^0 也越大 (对同一入射角而言). 同样对图 3 而言, 随着分维 D 的增加, σ^0 也是逐渐减小的, 对于 hh -极化, 在高分维段,

对同一分维值, 入射角越大, σ^0 也越大. σ^0 随 s^2 和 D 的变化显然与我们前面的分析是一致的, 即 s^2 和 D 分别与粗糙面的斜率分布和粗糙度有关. 随着入射角和分维的增加(粗糙度增加), 粗糙面散射的相干分量增加, 非相干分量是逐渐减小的.

图 4 和图 5 分别给出了 FBM 粗糙面向后散射截面 σ^0 随入射频率的变化及镜反射面内双站散射结果. 图 4 中的(1)(2)(3)分别对应于入射角为 15° 、 45° 、 60° , 图中 $s^2=0.08$, 介电参数 $\epsilon_r=(15, 2)$. 显然当分维较小时($D=2.05, 2.25$), 粗糙度相对较小, 无论入射角为多少, σ^0 几乎不随入射频率发生变化, 且入射角越大, σ^0 越小, 这与图 2 的结果是一致的. 当分维 $D=2.5$ 时, 粗糙度较大, 随着入射频率的增加, 入射的波长减小, 入射波可探测到粗糙面更为细致的部分, 此时粗糙面非相干散射截面是逐渐变小的, 且入射角越大, σ^0 衰减速率越慢.

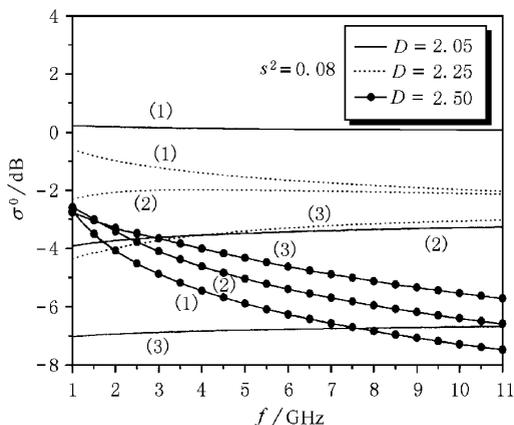


图 4 后向散射截面随入射频率 f 的变化

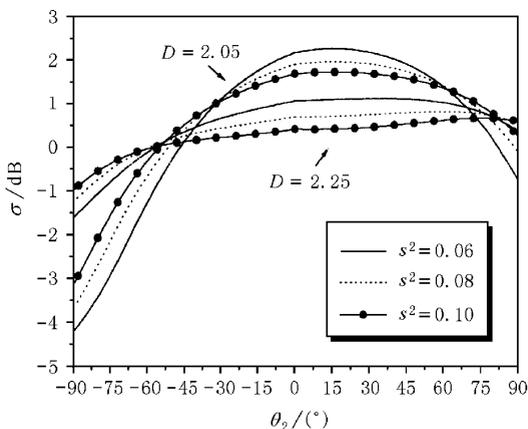


图 5 双站散射截面($\theta_3=0$)在不同分维下的角分布

图 5 根据(15)式给出了入射角为 15° , $f=1.5\text{GHz}$, $\epsilon_r=(15, 2)$ 时, FBM 粗糙面散射的双站散射角分布, 显然在不同的散射角范围内, 散射截面随 s^2 和 D 的变化是不一样的, 在中、小散射角范围内, 随着 s^2 和 D 的增加, 散射截面是减小的; 反之, 在较大的散射角区域, 散射截面随 s^2 和 D 的增加而增加.

我们同时将 FBM 粗糙面散射截面数值结果与一般满足高斯相关分布和指数相关分布的粗糙面散射结果作了比较, 对于这两种分布的粗糙面, 根据经典的基尔霍夫近似, 需知道粗糙面的高度起伏均方根 δ 和相关长度 L (对应于分形模型中的 D 和 s^2). 对于高斯分布和指数分布的粗糙面, 其后向散射截面可分别写为^[3]

$$\sigma_{pp}^0 = |R_p(\theta)|^2 2k^2 \cos^2 \theta \exp[-(2k\sigma \cos \theta)^2] \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2k\delta \cos \theta)^n}{n!} \frac{L^2}{2n} \exp\left[-\frac{(2kL \sin \theta)^2}{4n}\right], \quad (17)$$

$$\sigma_{pp}^0 = |R_p(\theta)|^2 2k^2 \cos^2 \theta \exp[-(2k\sigma \cos \theta)^2] \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2k\delta \cos \theta)^n}{n!} \frac{L^2}{n^2} \left[1 + \frac{(2kL \sin \theta)^2}{n^2}\right]^{-3/2}. \quad (18)$$

图 6(a) 给出了 C 波段下文献 [16] 中实际裸土的后向散射截面, 入射频率取 $f=4.75\text{GHz}$. 这里我们采用了三种模型进行了计算, 即采用 FBM 模型、高斯相关模型(Gaussian case)和指数相关模型(Exponential case). 在采用后两种模型时, 测得的粗糙面高度起伏均方根 $\delta=0.004\text{m}$, 相关长度 $L=0.084\text{m}$, 该粗糙面的介电常数为 $\epsilon_r=(8.8, 1)$. 事实上由文献 [16] 可知, 由于该粗糙面满足指数相关分布, 测量结果与采用指数相关分布模型计算结果基本一致. 从图中可以看出, 由于指数相关分布功率谱也具有负幂指数形式, 若采用合适的 FBM 模型(图中 $D=2.5$, $s^2=4.5 \times 10^{-5}$), 则 FBM 模型散射结果基本与指数相关模型散射结果一致, 即与测量结果一致. 图 6(b) 中我们计算了另外一种实际粗糙面的散射截面, 同分析图 6(a) 类似, 该粗糙面高度起伏均方根取 $\delta=0.044\text{m}$, 相关长度 $L=0.387\text{m}$ ^[3], $\epsilon_r=(19, 2)$, $f=2.25\text{GHz}$. 显然采用合适的 FBM 模型(图中 $D=2.05$, $s^2=0.1$) 与指数相关分布模型散射结果也是相类似的. 因此本文所采用的 FBM 分形散射模型事实上给出了一种全新的计算实际粗糙面散射的方法. 对于具有负幂指数谱的粗糙面, 只需

要通过计算或测量该粗糙面的分维和特征长度^[10],便可以直接利用 FBM 模型计算出该粗糙面的散射场,而无需计算或测量其高度起伏均方根或相关长度,再通过分析其近似满足的统计分布规律来计算

其散射场了.当然本文所给的方法也对通过测量得到的散射场去反演粗糙面的分维和特征长度有重要意义.

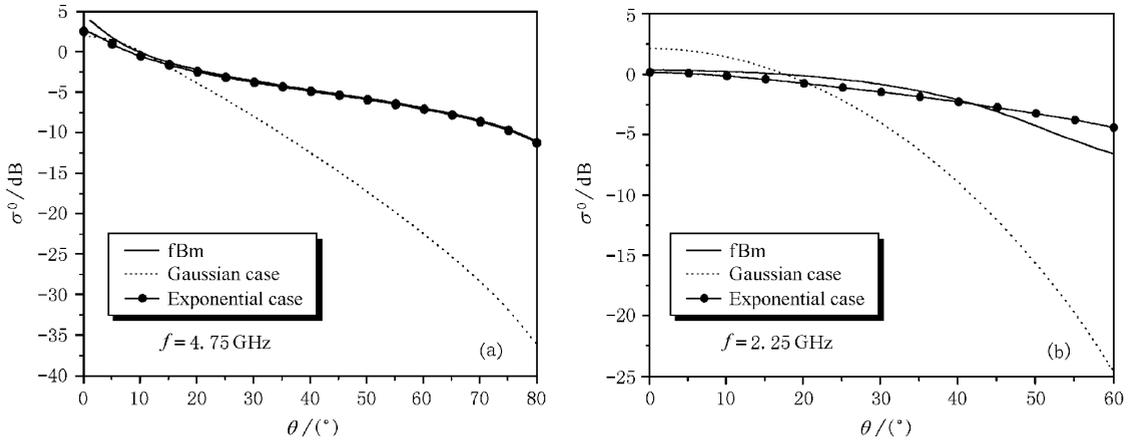


图 6 实际粗糙面散射截面的三种模型计算结果

4 结 论

我们采用了二维 FBM 分形函数来模拟二维分形粗糙面,在分析其统计特征的基础上,利用基尔霍夫近似给出了粗糙面电磁散射场和散射截面的计算公式,数值计算了不同分维、特征长度及入射频率下的散射截面,并与高斯相关分布和指数相关分布粗糙面的散射结果做了比较.当然图 6 中采用的指数

相关分布模型和 FBM 模型计算结果还是有略微差别,这一差别显然源于分维和 s^2 (或特征长度)取的不完全精确合适.事实上对一般的二维随机粗糙面而言,在一定的标度之间内都存在着从统计意义上的自相似性或自仿射性,它们均是具有分形特征的高斯随机函数,因此对于功率谱满足(5)式的二维随机粗糙面,只需测量出它的分维和特征长度,在满足基尔霍夫近似条件的前提下,采用本文的方法便可直接计算其散射场和散射截面.

- [1] B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman, New York, 1982).
- [2] A. Ishimaru, *Wave Propagation and Scattering in Random Media* (Academic Press, New York, 1978).
- [3] F. T. Ulaby *et al.*, *Microwave Remote Sensing*, Vol. II (Addison-Wesley Publishing, 1982).
- [4] D. L. Jaggard *et al.*, *J. Appl. Phys.*, **68**(1990), 5456.
- [5] X. Sun *et al.*, *Opt. Comm.*, **78**(1990), 20.
- [6] M. V. Berry, *J. Phys.*, **A14**(1981), 3101.
- [7] S. Savaidis *et al.*, *Opt. Lett.*, **20**(1995), 2357.
- [8] L. X. Guo, Z. S. Wu, *Chinese Phys. Lett.*, **11**(1994), 257.
- [9] L. X. Guo, Z. S. Wu, *Acta Physica Sinica*, **49**(2000), 1064 (in Chinese) [郭立新、吴振森, *物理学报*, **49**(2000), 1064].
- [10] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Application* (Wiley, New York, 1990).

- [11] X. Z. Ke, Z. S. Wu, L. X. Guo, *Chinese J. Radio Science*, **13**(1998), 60 (in Chinese) [柯熙政、吴振森、郭立新, *电波科学学报*, **13**(1998), 60].
- [12] Y. Agnon, M. Stiassnie, *J. Geophys. Res.*, **96**(1991), 12773.
- [13] P. Beckmann, *The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces* (Pergamon, New York, 1963), 17.
- [14] J. A. Ogilvy, *Theory of Wave Scattering from Random Rough Surface* (Adam Hilger, New York, 1991), 83.
- [15] S. R. Brown, C. H. Scholz, *J. Geophys. Res.*, **90**(1985), 12575.
- [16] Y. Oh, K. Sarabandi, F. T. Ulaby, *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, **30**(1992), 370.

ELECTROMAGNETIC SCATTERING FROM TWO-DIMENSIONAL FBM ROUGH SURFACE USING KIRHHOFF APPROXIMATION^{*}

GUO LI-XIN WU ZHEN-SEN

(*School of Sciences, Xidian University, Xi'an 710071, China*)

(Received 9 May 2000; revised manuscript received 1 July 2000)

ABSTRACT

A two-dimensional fractional Brown motion (FBM) fractal model is presented, which is suitable for describing the natural rough surface. The Kirhhoff approximation is considered, and the expressions of electromagnetic scattering field and the normalized radar cross section from this fractal surface are obtained. Numerical results of the normalized radar cross section as a function of fractal dimension, characteristic length and incidence frequency are given. Our FBM model is also compared with classical models of Gaussian and exponential correlations.

Keywords : FBM rough surface, fractal, electromagnetic scattering, Kirhhoff approximation

PACC : 4120, 4753

^{*} Project supported by the Teaching and Research Fund for Outstanding Young Teachers in Higher Education Institutions, Ministry of Education, China.