第 50 卷 第 1 期 2001 年 1 月
1000-3290/2001/50(1)/0059-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 50, No. 1, January, 2001

压缩相干态腔场的类自旋 GHZ 态的制备*

姚春梅† 郭光灿

(中国科学技术大学量子通信与量子计算开放实验室,合肥 230026)

(2000 年 5 月 9 日收到;2000 年 6 月 25 日收到修改稿)

压缩相干态是准粒子空间的相干态,研究大振幅情况下的单模压缩相干态腔场,其特性类似于大振幅下的单模相干态腔场,与自旋 1/2 的两态粒子同构. 文中提出一种方案,利用大失谐的 Jaynes-Cummings 模型来制备处于压缩相干态的三个腔场的类自旋 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ)态.

关键词:压缩相干态,类自旋 GHZ 态,大失谐 Jaynes-Cumminys 模型,同构

PACC:4250, 3280

1 引 言

近来,为了检验局域隐变量理论,人们对制备多粒子纠缠态产生了极大的兴趣. Greenberger 等[1] 提出并制备了三粒子或更多粒子的纠缠态,即 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ)态. 这种态给出了一种新类型的局域隐变量原理与量子理论的矛盾,即它不需要违背 Bell 不等式,就可以对局域隐变量原理进行检验. Cirac 等[2]、Gerry[3] 以及 Zheng 等[4] 分别通过腔场 QED 制备了如下形式的三原子纠缠态.

$$|\Psi\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle_1|e\rangle_2|e\rangle_3 - |g\rangle_1|g\rangle_2|g\rangle_3), \tag{1}$$

其中$|e\rangle$和$|g\rangle$分别为原子的激发态和基态,脚标 1,2,3 代表原子 1,2 和 3. 最近,Wodkiewicz 等[5] 和 Gerry[6] 分别提出了类自旋的纠缠态,如三个腔场的纠缠态.

$$|\Psi\rangle_F = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle|\beta\rangle|\gamma\rangle - |-\alpha\rangle|-\beta\rangle|-\gamma\rangle), \tag{2}$$

其中$|\pm\alpha\rangle$,$|\pm\beta\rangle$,$|\pm\gamma\rangle$分别表示不同腔场的相干态. 由于处于相干态的单模腔场类似于一个与 Stern-Gerlach 磁场相互作用的自旋为 1/2 的粒子,而且,腔场的宇称与粒子的自旋类似,文献[7]提出了对腔场宇称测量的方法,通过对腔场宇称的测量,得到了与局域隐变量原理预言相反的结果,从而否定了局域隐变量原理.

压缩相干态是准粒子空间的相干态[8],本文研究大振幅情况下的单模压缩相干态腔场,其特性类似于大振幅下的单模相干态腔场,与自旋 1/2 的两态粒子同构. 我们在此提出一种方案,利用大失谐的 Jaynes-Cummings 模型来制备处于压缩相干态的三个腔场的类自旋 GHZ 态.

2 压缩相干态与自旋 1/2 的两态粒子同构

压缩相干态定义为[8]

$$|z,\beta\rangle = S(z)D(\beta)|0\rangle, \tag{3}$$

其中 $S(z) = \exp[(za^{+2} - z^* a^2)/2]$, $z = r^* \exp(2i\theta)$, $D(\beta) = \exp(\beta a^+ - \beta^* a)$分别为压缩算符、压缩参量和位移算符. 而朱等[9] 经由偶奇相干态的压缩引入压缩偶奇相干态

$$\begin{aligned}|z,\beta\rangle_{e,o} &= N_{e,o}(|z,\beta\rangle \pm |z,-\beta\rangle)\\ &= N_{e,o}[S(z)D(\beta)|0\rangle\\ &\quad \pm S(z)D(-\beta)|0\rangle],\end{aligned} \tag{4}$$

其中,$N_{e,o} = \{2[1 \pm \exp(-2|\beta|^{1/2})]\}^{1/2}$ 为归一化

* 国家自然科学基金(批准号:19874056)资助的课题.

† 现在常德师范学院物理系工作.

因子. 大振幅情况下,即$|\beta|\gg1$ 时,$N_{e,o}\approx2^{-1/2}$.

$$\langle z,\beta|z,-\beta\rangle=\exp(-2|\beta|^2)\approx0. \quad (5)$$

说明$|z,\beta\rangle$与$|z,-\beta\rangle$态是正交的,故由(4)式可构造大振幅情况下的压缩偶奇相干态为

$$|z,\beta,\pm\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|z,\beta\rangle\pm|z,-\beta\rangle). \quad (6)$$

压缩相干态为准粒子空间的相干态,引入与光场的湮没、产生算符 a,a^+ 类似的算符 b,b^+,则有 $b|z,\beta\rangle=\beta|z,\beta\rangle$,且 $b=sas^+$. 在此基础上引入宇称算符 $\Sigma=(-1)^{b^+b}$,其中 b^+b 为准粒子数算符. 它满足如下的本征方程:

$$\Sigma|z,\beta,\pm\rangle=\pm|z,\beta,\pm\rangle. \quad (7)$$

再定义算符 M_3,

$$M_3=|z,\beta,+\rangle\langle z,\beta,+|-|z,\beta,-\rangle\langle z,\beta,-|, \quad (8)$$

则有如下方程:

$$M_3|z,\beta,\pm\rangle=\pm|z,\beta,\pm\rangle. \quad (9)$$

由(7),(9)式可知,M_3 也是宇称算符,它遵循像自旋为 1/2 的二能级原子算符 S_z 同样的规律. 因此$|z,\beta,\pm\rangle$类似于沿 z 轴方向自旋向上或向下的原子态. 同样地可引入类似于沿 x 方向及 y 方向的自旋算符及本征态.

$$M_1=|z,\beta,+\rangle\langle z,\beta,-|+|z,\beta,-\rangle\langle z,\beta,+|, \quad (10a)$$

$$M_2=\mathrm{i}(|z,\beta,+\rangle\langle z,\beta,-|-|z,\beta,-\rangle\langle z,\beta,+|), \quad (10b)$$

$$|z,\beta\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|z,\beta,+\rangle+|z,\beta,-\rangle), \quad (11a)$$

$$|z,-\beta\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|z,\beta,+\rangle-|z,\beta,-\rangle), \quad (11b)$$

$$|\Phi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|z,\beta,+\rangle\pm\mathrm{i}|z,\beta,-\rangle). \quad (11c)$$

因此,通过对$|z,\beta,+\rangle$和$|z,\beta,-\rangle$态的宇称的测量,可以知道$|z,\beta\rangle$和$|z,-\beta\rangle$态的宇称为 +1 和 −1,即处于压缩相干态的单模腔场与自旋 1/2 的两态粒子同构. 又由于 $S(z)D(\beta)=D(\alpha)S(z)$,则有

$$|z,\beta\rangle=|\alpha,z\rangle, \quad (12)$$

其中 $\alpha=\beta\cosh(r)+\beta^*\sinh(r)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$. 故可引入与(1),(2)式类似的如下形式的处于压缩相干态的三个腔场的类自旋 GHZ 态

$$|\Psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha_1,z_1\rangle|\alpha_2,z_2\rangle|\alpha_3,z_3\rangle-|-\alpha_1,z_1\rangle|-\alpha_2,z_2\rangle|-\alpha_3,z_3\rangle), \quad (13)$$

其中$|\pm\alpha_i,z_i\rangle$为第 i 腔的压缩相干态,$i=1,2,3$.

3 处于压缩相干态的三个腔场纠缠态的制备

考虑一个单模腔场与一个二能级原子相互作用的 Jaynes-Cummings 模型,在旋转波近似和偶极近似下,这一系统的 Hamiltonian 为

$$H=\omega_a S_z+\omega_c a^+a+g(a^+s^-+as^+), \quad (14)$$

其中 a,a^+ 是腔场的湮没和产生算符;S_z,$S^\pm$ 为原子算符;g 是原子与场的耦合系数;ω_c,ω_a 分别是腔场频率和原子跃迁频率. 若原子跃迁频率与腔场频率的失谐 Δ 远大于耦合系数,即 $\Delta=\omega_a-\omega_c\gg g$,则原子基态和激发态间的跃迁概率可以忽略不计. 在此条件下,该系统的有效 Hamiltonian 为[10]

$$H_{\mathrm{eff}}=\omega_a S_z+\omega_c a^+a+2\frac{g^2}{\Delta}S_z a^+a, \quad (15)$$

在相互作用绘景中的 Hamiltonian 为

$$H_{\mathrm{I}}=2\frac{g^2}{\Delta}S_z a^+a, \quad (16)$$

则整个系统的时间演化规律由下式描述:

$$|\Psi(t)\rangle=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_{\mathrm{I}}t}|\Psi(0)\rangle, \quad (17)$$

其中$|\Psi(0)\rangle$是系统的初态.

为了利用这一模型制备(13)式所示的纠缠态,需要用到三个等同的但彼此分离的微波腔和一个二能级探测原子. 三个腔场初始时均制备为压缩相干态$|\alpha_1,z_1\rangle$,$|\alpha_2,z_2\rangle$,$|\alpha_3,z_3\rangle$,而原子初始时制备成激发态$|e\rangle$和基态$|g\rangle$的相干叠加态$\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle+|g\rangle)$,则整个系统的初态为

$$|\Psi(0)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle+|g\rangle)\otimes|\alpha_1,z_1\rangle|\alpha_2,z_2\rangle|\alpha_3,z_3\rangle. \quad (18)$$

按文献[11]所述压缩相干态可作相干态展开

$$|\alpha,z\rangle=[2\pi\sinh(r)]^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\exp\{-\frac{1}{2}[\coth(r)-1]y^2-\mathrm{i}\rho y\sin(\phi-\varphi)\}|\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\rangle, \quad (19)$$

其中$|\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\rangle$是一相干态,参数 ρ 和 φ 定义为

$$\alpha=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \quad (20)$$

把原子注入第一个腔中,设原子与腔场的相互作用时间为 τ,则经过 τ 时间的相互作用后,把方程

(18),(16)代入(17)式中,并利用(19)式可得整个原子——腔场的态矢为

$$|\psi(\tau)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}[2\pi\sinh(r)]^{-\frac{1}{2}}\cdot\{|e\rangle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\cdot\exp\{-\frac{1}{2}[\coth(r)-1]y^2-\mathrm{i}\rho y\sin(\phi-\varphi)\}|(\rho e^{\mathrm{i}\varphi}+ye^{\mathrm{i}\phi})e^{-\mathrm{i}\frac{g^2}{\Delta}\tau}\rangle+|g\rangle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\cdot\exp\{-\frac{1}{2}[\coth(r)-1]y^2-\mathrm{i}\rho y\sin(\phi-\varphi)\}|(\rho e^{\mathrm{i}\varphi}+ye^{\mathrm{i}\phi})e^{\mathrm{i}\frac{g^2}{\Delta}\tau}\rangle\}\otimes|\alpha_2,z_2\rangle\cdot|\alpha_3,z_3\rangle. \tag{21}$$

再利用(19)式可把$|\psi(\tau)\rangle$写为

$$|\psi(\tau)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle|\alpha_1',z_1'\rangle+|g\rangle|\alpha_1'',z_1''\rangle)\otimes|\alpha_2,z_2\rangle|\alpha_3,z_3\rangle, \tag{22}$$

其中 $\alpha_1'=\alpha_1e^{-\mathrm{i}\frac{g^2}{\Delta}\tau}$, $z_1'=z_1e^{-2\mathrm{i}\frac{g^2}{\Delta}\tau}$, $\alpha_1''=\alpha_1e^{\mathrm{i}\frac{g^2}{\Delta}\tau}$, $z_1''=z_1e^{2\mathrm{i}\frac{g^2}{\Delta}\tau}$. 当原子从第一个腔中出来以后,让其进入第二个腔,设其与第二个腔的作用时间也为 τ,当原子离开第二个腔时,整个系统的态矢为

$$|\psi(\tau+\tau)\rangle\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle|\alpha_1',z_1'\rangle|\alpha_2',z_2'\rangle+|g\rangle\cdot|\alpha_1'',z_1''\rangle|\alpha_2'',z_2''\rangle)\otimes|\alpha_3,z_3\rangle, \tag{23}$$

其中 $\alpha_2'=\alpha_2e^{-\mathrm{i}\frac{g^2}{\Delta}\tau}$, $z_2'=z_2e^{-2\mathrm{i}\frac{g^2}{\Delta}\tau}$, $\alpha_2''=\alpha_2e^{\mathrm{i}\frac{g^2}{\Delta}\tau}$, $z_2''=z_2e^{2\mathrm{i}\frac{g^2}{\Delta}\tau}$. 当原子与第三个腔场的相互作用与前面的完全相同,原子离开第三个腔时,系统的态矢为

$$|\psi(\tau+\tau+\tau)\rangle\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle|\alpha_1',z_1'\rangle|\alpha_2',z_2'\rangle|\alpha_3',z_3'\rangle+|g\rangle|\alpha_1'',z_1''\rangle|\alpha_2'',z_2''\rangle|\alpha_3'',z_3''\rangle). \tag{24}$$

对于(24)式,可通过调节原子的速度来控制原子与腔场的作用时间,使得$(g^2/\Delta)\tau=\pi/2$,则得到

$$|\psi(\tau+\tau+\tau)\rangle\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle|-\alpha_1',z_1'\rangle|-\alpha_2',z_2'\rangle\cdot|-\alpha_3',z_3'\rangle+|g\rangle|\alpha_1',z_1'\rangle\cdot|\alpha_2',z_2'\rangle|\alpha_3',z_3'\rangle), \tag{25}$$

当原子从第三个腔场出来后,让原子穿越一个 Ramsey 带,经历如下跃变:

$$|e\rangle\to\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle+|g\rangle), \tag{26a}$$

$$|g\rangle\to\frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle-|e\rangle), \tag{26b}$$

则整个系统的态矢演变为

$$|\psi'(\tau+\tau+\tau)\rangle\rangle=\frac{1}{2}[|g\rangle(|\alpha_1',z_1'\rangle|\alpha_2',z_2'\rangle|\alpha_3',z_3'\rangle+|-\alpha_1',z_1'\rangle|-\alpha_2',z_2'\rangle|-\alpha_3',z_3'\rangle)-|e\rangle(|\alpha_1',z_1'\rangle|\alpha_2',z_2'\rangle|\alpha_3',z_3'\rangle-|-\alpha_1',z_1'\rangle|-\alpha_2',z_2'\rangle|-\alpha_3',z_3'\rangle)], \tag{27}$$

这时对原子进行选态测量,若探测到原子处于激发态$|e\rangle$,根据波包塌缩原理,则腔场将塌缩到形如(13)式所示的态,就得到了处于压缩相干态的三个腔场的类自旋 GHZ 纠缠态.

4　结　　论

以上制备的处于压缩相干态的三个腔场的纠缠态,由文献[6]可知,是如下对易算符的本征态

$$M_3^1M_2^2M_2^3,\ M_2^1M_3^2M_2^3,\ M_2^1M_2^2M_3^3, \tag{28}$$

其本征值均为 +1. 其中(28)式的上标表示腔的序号. 按照 EPR 的物理实在性观点[12],无论对 $M_{2,3}^i$ $(i=1,2,3)$测量与否,它均有确定的值 $M_{2,3}^i=+1$ 或 −1. 而 $m_3^1m_2^2m_2^3$, $m_2^1m_3^2m_2^3$, $m_2^1m_2^2m_3^3$ 的值均为 +1,则有

$$(m_3^1m_2^2m_2^3)(m_2^1m_3^2m_2^3)(m_2^1m_2^2m_3^3)=+1, \tag{29}$$

由算符 $M_{2,3}^i$ 可得到

$$(M_3^1M_2^2M_2^3)(M_2^1M_3^2M_2^3)(M_2^1M_2^2M_3^3)=-(M_3^1M_3^2M_3^3), \tag{30}$$

而算符 $M_3^1M_3^2M_3^3$ 与(28)式的算符均对易,故(13)式的腔场 GHZ 态也是算符 $M_3^1M_3^2M_3^3$ 的本征态,而其本征值不是 EPR 所预言的 +1 而是 −1,这就导致了与局域隐变量理论的矛盾.

综上所述,本文通过讨论处于压缩相干态的单模腔场与自旋 1/2 的两态粒子同构,腔场的宇称与粒子自旋的类似及对腔场的宇称的测量,得出与局域隐变量理论完全相反的结果. 并利用大失谐的 Jaynes-Cummings 模型制备了处于压缩相干态的三腔场的类自旋 GHZ 态,从另一角度探讨了对局域隐变量理论违背的方案.

[1] D.M. Greenberger, M.A. Horne, A. Shimony, A. Zeilinger, *Am. J. Phys.*, **58**(1990), 1131.

[2] J.I. Cirac, P. Zoller, *Phys. Rev.*, **A 50**(1994), R2799.

[3] C.C. Gerry, *Phys. Rev.*, **A 53**(1992), 2857.

[4] S.B. Zheng, G.C. Guo, *J. Mod. Opt.*, **44**(1997), 963.

[5] K. Wodkiewicz, L.W. Wang, J.H. Eberly, *Phys. Rev.*, **A47**(1993), 3280.

[6] C.C. Gerry, *J. Mod. Opt.*, **44**(1997), 2159.

[7] B.G. Englert, N. Sterpi, H. Walther, *Opt. Commun.*, **100**(1993), 526.

[8] G.C. Guo, Quantum Optics (Higher Education Press, Beijing, 1990), 534–550 (in Chinese) [郭光灿,量子光学(高等教育出版社,北京,1990),534–550].

[9] K. Zhu, Q. Wang, X. Li, *J. Opt. Soc. Am.*, **B 10**(1993), 1287.

[10] M.J. Holl, D.F. Walls, P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.*, **67**(1991), 1716.

[11] K. Sunder, *Phys. Rev. lett.*, **75**(1995), 2116.

[12] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Phys. Rev.*, **47**(1935), 727.

[13] K.H. Song, G.C. Guo, *Acta Physica Sinica*, **48**(1999), 661 (in Chinese) [宋克慧、郭光灿,物理学报,48(1999),661].

GENERATION OF SPIN-TYPE GHZ STATES OF THE CAVITY FIELD IN SQUEEZED COHERENT STATES*

YAO CHUN-MEI† GUO GUANG-CAN

(*Laboratory of Quantum Communication and Quantum Computation, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026, *China*)

(Received 9 May 2000; revised manuscript received 25 June 2000)

ABSTRACT

Squeezed coherent states are coherent states in quasi—particle space. We note that the characteristic of the single mode cavity field in a squeezed coherent state with sufficiently large amplitude is analogous to that of the single mode cavity field in a coherent state and is isomorphic to a two-state particle with spin $-1/2$. A scheme is presented to prepare spin-type Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) states of three cavities in squeezed coherent states via the Jaynes-Cummings model with large detuning.

Keywords: squeezed coherent state, Spin-type GHZ state, Jaynes-Cummings model with large detuning, isomorphism

PACC: 4250, 3280

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19874056).

† She works in Department of Physics, Changde Normal University now.