第 50 卷 第 1 期 2001 年 1 月
1000-3290/2001/50(1)/0099-03

物　理　学　报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 50, No. 1, January, 2001
©2001 Chin. Phys. Soc.

电磁场在超晶格中传播的孤子解*

田　强
（北京师范大学物理系，北京　100875）
（2000 年 6 月 24 日收到）

在超晶格中电子的动量分布与平衡分布偏离不远的弱直流电场偏置下，分析电磁场在超晶格生长方向的传播，得到电磁场传播方向的电磁场矢势分量服从 sine-Gordon 方程，给出了不同条件下的几种孤子解.

关键词：孤子，KdV 方程，超晶格，电磁场
PACC： 7220H，7230，0560，0365

1　引　言

超晶格物理的研究有力地推进着凝聚态物理与材料科学的研究和新一代高技术的发展. 超晶格中的非线性输运现象一直受到人们的关注[1,2]，我们用非线性薛定谔方程对直流电场作用下超晶格中电场畴的孤子性质进行了一些研究[3,4]，得到有畴产生的超晶格电子波函数是调幅的 Bloch 函数，其包络函数有孤子解.

本文研究电磁场在超晶格中的传播，通过分析得到超晶格中电磁场矢势沿超晶格生长方向的分量满足的方程为 sine-Gordon 方程，其解给出在不同的边界条件和初始条件下电磁场矢势的多种孤子解.

2　电磁场矢势的 sine-Gordon 方程

沿 z 方向生长的周期为 d 的超晶格，其能量函数为

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \frac{p_{xy}^2}{2m} + \frac{W}{2}\left(1 - \cos\frac{p_z d}{\hbar}\right), \tag{1}$$

其中 W 是超晶格 z 方向能带宽度.

在电磁场中，作 Peierls 替代（Peierls substitution）[5] $\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{P} + e\boldsymbol{A}(t)$，得到电磁场中超晶格的能量函数. 其中 $\boldsymbol{P}$ 是正则动量，$\boldsymbol{A}(t)$ 是矢势. 这时，超晶格沿 z 方向的电流密度表示为

$$\begin{aligned} j_z(t) &= -e\sum_{P_z} v_z(P_z + eA_z) \\ &= -e\frac{Wd}{2\hbar}\sum_{P_z}\sin\frac{(P_z + eA_z(t))d}{\hbar} \\ &= -e\frac{Wd}{2\hbar}\sum_{P_z}\left(\sin\frac{P_z d}{\hbar}\cos\frac{eA_z(t)d}{\hbar}\right. \\ &\quad \left. + \cos\frac{P_z d}{\hbar}\sin\frac{eA_z(t)d}{\hbar}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

在无外场作用下，超晶格电子在动量空间的平衡分布是中心对称的，有 $j_z = 0$. 仅在沿 z 方向的稳恒电场 F_z 作用下，超晶格电子的动量分布偏离中心对称的平衡分布.在弱场情况下呈现稳定线性电导；随着 F_z 的增大，逐渐出现负微分电导现象和 Bloch 振荡现象[6].

以下对于稳恒弱电场 F_z 作用下的超晶格，讨论沿 z 方向传播的电磁波.

下面考虑两点近似：

(1) 超晶格电子 z 方向的动量分布，在弱电场 F_z 作用下对平衡分布偏离不大，近似地用中心对称的平衡分布代替. 在此近似下，有 $\sum_{P_z}\sin\frac{P_z d}{\hbar} = 0$；则电流密度(2)式简化为

$$j_z(t) = -e\frac{Wd}{2\hbar}\sin\frac{eA_z(t)d}{\hbar}\sum_{P_z}\cos\frac{P_z d}{\hbar}. \tag{3}$$

(2) 考虑电磁波的波长远大于超晶格的晶格常数 d，对于这样的电磁波，超晶格可近似看作均匀介质. 在均匀介质中，电磁场矢势 $\boldsymbol{A}$ 的非线性波动方程为[7]

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu\boldsymbol{j}, \tag{4}$$

* 教育部高等学校骨干教师资助计划资助的课题.

其中 c 为超晶格介质中的光速，μ 为磁导率. z 方向的方程为

$$\nabla^2 A_z - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = -\mu j_z(t). \tag{5}$$

对于沿 z 方向传播的平面电磁波，矢势的 z 分量 A_z 在 xy 平面内是不变的. 代入电流密度(3)式，得到超晶格中 z 方向电磁场矢势的方程

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = e\mu\frac{Wd}{2\hbar}\sin\frac{eA_z(t)d}{\hbar}\sum_{P_z}\cos\frac{P_z d}{\hbar}, \tag{6}$$

这是一个 sine-Gordon 方程. 令

$$\phi(t) = \frac{eA_z(t)d}{\hbar}, \tag{7a}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} = e^2\mu\frac{Wd^2}{2\hbar^2}\sum_{P_z}\cos\frac{P_z d}{\hbar}, \tag{7b}$$

方程(6)写为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda^2}\sin\phi. \tag{8}$$

进一步引入无量纲参数

$$\xi = \frac{z}{\lambda}, \tag{9a}$$

$$\tau = \frac{c}{\lambda}t, \tag{9b}$$

得到标准的 sine-Gordon 方程

$$\phi_{\xi\xi} - \phi_{\tau\tau} = \sin\phi. \tag{10}$$

3 超晶格中电磁场矢势的孤子解

令[8]

$$\phi = 4\arctan\left(\frac{U(\xi)}{V(\tau)}\right), \tag{11}$$

代入方程(10)，经分离变量，得到

$$\frac{1}{UU'}\left(\frac{U''}{U}\right)' = \frac{1}{VV'}\left(\frac{V''}{V}\right)' = -4\kappa^2, \tag{12}$$

其中撇号表示对 ξ 或 τ 的导数，κ 是与 ξ 和 τ 都无关的分离变量常数.

经积分等运算，得到

$$(U')^2 = -\kappa^2U^4 + m^2U^2 + n^2, \tag{13a}$$

$$(V')^2 = \kappa^2V^4 + (m^2-1)V^2 - n^2, \tag{13b}$$

其中 m^2 和 n^2 是积分常数.

下面对于几种不同的常数，讨论解及其性质.

1. $\kappa = 0, m > 1, n = 0$.

上式的解为

$$U = \gamma_1 e^{\pm m\xi},\ V = \gamma_2 e^{\pm\sqrt{m^2-1}\tau}, \tag{14}$$

代入(11)式，得到 sine-Gordon 方程(10)的解

$$\phi = 4\arctan\left[\gamma\exp\left(\pm\frac{\xi\pm\beta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\right], \tag{15}$$

其中 $\gamma = \gamma_1/\gamma_2, \beta = \sqrt{m^2-1}/m$. 对于不同的正负符号，上式表示不同运动形式的单孤子解.

2. $\kappa = 0, m > 1, n \neq 0$.

(13)式的解为

$$U = \pm(n/m)\sinh(m\xi + c_1), \tag{16a}$$

$$V = (n/\sqrt{m^2-1})\cosh(\sqrt{m^2-1}\tau + c_2), \tag{16b}$$

其中 c_1 和 c_2 是积分常数. 代入(11)式，得到 sine-Gordon 方程的解为

$$\phi = 4\arctan\left[\frac{\sqrt{m^2-1}}{m}\frac{\sinh(m\xi + c_1)}{\cosh(\sqrt{m^2-1}\tau + c_2)}\right], \tag{17}$$

该解描述两个孤子的运动和碰撞.

3. $\kappa \neq 0, m^2 > 1, n = 0$.

sine-Gordon 方程的解为

$$\phi = -4\arctan\left[\frac{m}{\sqrt{m^2-1}}\frac{\sinh(\sqrt{m^2-1}\tau + c_2)}{\cosh(m\xi + c_1)}\right], \tag{18}$$

该解描述一个孤子与一个反孤子的运动和碰撞.

4. $\kappa \neq 0, m^2 < 1, n = 0$.

sine-Gordon 方程有呼吸子(breather)解

$$\phi = -4\arctan\left[\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\frac{\sinh(\sqrt{1-m^2}\tau + c_2)}{\cosh(m\xi + c_1)}\right]. \tag{19}$$

以上各式中，代入(7)式和(9)式，得到矢势解. 由边界条件和初始条件确定各常数.

4 结 论

超晶格电子在外场作用下，具有丰富的非线性输运现象. 在直流电场作用下，随直流场强的大小不同，表现出不同的输运性质.在较大的直流场强作用下将呈现出负微分电导特性[2,6]，不稳定的负微分电导状态会在超晶格中产生电场畴[1]和孤子[3,4]输运.

本文在超晶格中电子的动量分布与平衡分布偏离不远的弱直流电场偏置下，分析电磁场在超晶格生长方向的传播，得到电磁场传播方向的电磁场矢势服从 sine-Gordon 方程，并给出了不同条件下的几

种孤子解.

[1] O. M. Bulashenko, M. J. Garcia, L. L. Bonilla, *Phys. Rev.*, **B53** (1996), 10008.
[2] H. T. Grahn, R. J. Haug, W. Muller, K. Ploog, *Phys. Rev. Lett.*, **67** (1991), 1618.
[3] Qiang Tian, Chang-shu Wu, *Phys. Lett.*, **A262** (1999), 83.
[4] Qiang Tian, Ben-kun Ma, *Acta Physica Sinica*, **48** (1999), 2125 (in Chinese) [田强、马本　, 物理学报, **48** (1999), 2125].
[5] R. Peierls, *Z. Phys.*, **80** (1933), 763; **81** (1933), 186.
[6] Qiang Tian, Ben-kun Ma, *Commun. Theor. Phys.*, **29** (1998), 535.
[7] P. Lorrain, D. R. Corson, Electromagnetic Fields and Waves, 1970, p. 314 [P. 劳兰, D. R. 考森 著, 陈成钧译, 电磁场与电磁波 (人民教育出版社, 北京, 1980) p. 314].
[8] G. L. Lamb, Elements of Soliton Theory (A Wiley-Interscience Publication, New York, 1980), p. 144.

SOLITONS OF ELECTROMAGNETIC WAVE IN SUPERLATTICE*

TIAN QIANG
(*Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing* 100875, *China*)
(Received 24 June 2000)

ABSTRACT

The electromagnetic wave propagating through a superlattice is analyzed. The vector potential along the propagating direction obeys the sine-Gordon equation. Some soliton solutions are given for different cases.

Keywords: soliton, KdV equation, superlattice, electromagnetic wave
PACC: 7220H, 7230, 0560, 0365

* Project supported by the Foundation for University Key Teachers by the Ministry of Education of China.