第 50 卷 第 10 期 2001 年 10 月
1000-3290/2001/50(10)/1829-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50,No.10,October,2001

一类宇宙模型的稳定性

王永久 唐智明

(湖南师范大学物理研究所,长沙 410081)

(2001 年 3 月 9 日收到;2001 年 5 月 26 日收到修改稿)

研究了一类 Einstein-Kartan 宇宙模型的稳定性. 分别讨论了宇宙模型对于参量 λ 和 k 的变化. 在 $\lambda=0$ 附近,宇宙模型相对于 λ 的变化是不稳定的;在 $\lambda=\beta=0$ 附近,宇宙对于 k 的变化也是不稳定的. 因此,在考虑合理的宇宙模型时必须考虑非零的宇宙项.

关键词:宇宙,模型,广义相对论

PACC:0314

1 引 言

文献[1]在 Einstein-Kartan 引力理论的框架中提出了一类宇宙模型. 本文对这类宇宙模型的更一般的情况进行稳定性计算,即研究宇宙物质具有体黏滞性的情况下,宇宙模型相对于宇宙因子 λ(在 $\lambda=0$ 处)的结构稳定性,以及相对于空间曲率 k 的结构稳定性问题. 当体黏滞数 $\beta=0$ 时即为理想流体的情况. 结果表明,所讨论的宇宙模型对于宇宙因子 λ 的变化(在 $\lambda=0$,$\beta=0$)是结构不稳定的,具有 $\lambda=k=0$ 的宇宙模型是不稳定的(相对于空间曲率 k 的变化). 计算结果还表明了宇宙常数 λ 的重要意义——即使宇宙常数 λ 很小,对于比较理论模型是否描述真实宇宙也是至关重要的,研究真实的宇宙必须考虑非零的 λ 值.

2 动力学方程组

描述均匀各向同性宇宙的 Robtson-Walker 度规为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-a^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2}+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\right], \tag{1}$$

设场源是 Veisenhoff 流体[2],场方程和场源运动方程归结为宇宙的动力学方程组

$$\varepsilon-\frac{A}{a^6}=-\lambda+\frac{3k}{a^2}+\frac{3\dot{a}^2}{a^2}, \tag{2}$$

$$p-\frac{A}{a^6}=\lambda-\frac{2\ddot{a}}{a}-\frac{\dot{a}}{a^2}-\frac{\dot{a}}{a^2}-\frac{k}{a^2}+\frac{2\beta\dot{a}}{a}. \tag{3}$$

式中 β 为体黏滞系数;滑动黏滞系数不计,因为宇宙是各向同性的. $A=\kappa^2S_0^2a_0^2/4$,S_0 和 a_0 是现在宇宙的参量,采用单位系 $c=1$,$\kappa=\frac{8\pi G}{c^4}=1$.

利用态方程 $p=\gamma\varepsilon(0\leqslant\gamma\leqslant1)$,可将(2)和(3)式化为振动方程

$$\ddot{x}-\beta\dot{x}-\frac{1}{3}\eta^2\lambda x+\eta(\eta-1)kx^{1-2/\eta}-\frac{1}{3}\eta(3-\eta)Ax^{1-6/\eta}=0, \tag{4}$$

式中

$$x=a^{\eta(\gamma)},\eta=\frac{3}{2}(1+\gamma).$$

方程(4)在相空间$(x,\dot{x})$中可以写为动力学方程组

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=\frac{1}{3}\eta^2\lambda x+\beta y-\eta(\eta-1)kx^{1-2/\eta}\\ &\quad+\frac{1}{3}\eta(3-\eta)Ax^{1-6/\eta}.\end{aligned} \tag{5}$$

在我们研究的情况下,对于辐射 $\eta=2$,对于尘埃 $\eta=3/2$,相应的方程组分别为

1)辐射 $\eta=2$

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=\frac{4}{3}\lambda x+\beta y-2k+\frac{2}{3}Ax^{-2}.\end{aligned} \tag{6}$$

2)尘埃 $\eta=3/2$

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=\frac{4}{3}\lambda x+\beta y-\frac{3}{4}kx^{-1/3}+\frac{3}{4}Ax^{-3}.\end{aligned} \tag{7}$$

3 结构稳定性分析

采用动力学系统稳定性的常规分析方法，来分析(5)—(7)式. 假定微分方程组中的参量有一个微小的扰动，并要求相的几何形状具有拓扑不变性.

当 $\alpha = 0$，(5)式具有哈密顿

$$H(x,y) = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}\eta\lambda x^2 - \frac{1}{2}\eta k x^{2-2/\eta} - \frac{1}{6}\eta^2 A x^{2-6/\eta}. \tag{8}$$

这个哈密顿的相曲线 $H(x,y) = \mathrm{const}$ 对应于(5)式的第一积分

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\eta^2\lambda x^2 + \frac{1}{2}\eta^2 k x^{2-2/\eta} + \eta^2 A x^{2-6/\eta}\right) = C. \tag{9}$$

在相平面上描述平直宇宙($k = 0$)中方程组的解.

当 $\lambda > 0$ 时，有

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = \frac{1}{3}\eta^2\lambda x + \frac{1}{3}\eta(3-\eta)Ax^{1-6/\eta}; \tag{10}$$

设 $\eta = 2$，则有

$$\frac{1}{2}y^2 = C + \frac{2}{3}\lambda x^2 - \frac{2}{3}Ax^{-1}; \tag{11}$$

设 $\eta = \frac{3}{2}$，则有

$$\frac{1}{2}y^2 = C + \frac{3}{8}\lambda x^2 - \frac{3}{8}Ax^{-2}. \tag{12}$$

当 $\lambda = 0$ 时，有

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = \frac{1}{3}\eta(3-\eta)Ax^{1-6/\eta}; \tag{13}$$

设 $\eta = 2$，则得

$$\frac{1}{2}y^2 = C - \frac{2}{3}Ax^{-1}; \tag{14}$$

设 $\eta = \frac{2}{3}$，则得

$$\frac{1}{2}y^2 = C - \frac{3}{8}Ax^{-2}. \tag{15}$$

当 $\lambda < 0$ 时，有

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = \frac{1}{3}\eta^2|\lambda|x + \frac{1}{3}\eta(3-\eta)Ax^{1-6/\eta}; \tag{16}$$

设 $\eta = 2$，则得

$$\frac{1}{2}y^2 = C - \frac{2}{3}|\lambda|x^2 - \frac{2}{3}Ax^{-1}; \tag{17}$$

设 $\eta = \frac{3}{2}$，则得

$$\frac{1}{2}y^2 = C - \frac{3}{8}|\lambda|x^2 - \frac{3}{8}Ax^{-2}. \tag{18}$$

由函数 $y = y(x)$明显可见，在平直宇宙($k = 0$)的情况下，宇宙常数 λ 的变化引起相平面结构的内禀性质的改变. 在 $\lambda = 0$ 附近，宇宙模型相对于 λ 的变化是结构不稳定的.

现在来讨论弯曲效应($k \neq 0$ 的情况). 当 $\lambda \neq 0$，很容易证明，相的形象特征与平直模型没有区别. 对于闭合宇宙($k = +1$)，当 $\lambda = 0$ 时，有

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = -\eta(\eta-1)x^{1-2/\eta} + \frac{1}{3}\eta(3-\eta)Ax^{1-6/\eta}; \tag{19}$$

设 $\eta = 2$，则得

$$\frac{1}{2}y^2 = C + 2x - \frac{2}{3}Ax^{-1}; \tag{20}$$

设 $\eta = \frac{3}{2}$，则得

$$\frac{1}{2}y^2 = C - 9x^{2/3} - \frac{3}{8}Ax^{-2}. \tag{21}$$

对于开放的宇宙($k = -1$)，当 $\lambda = 0$ 时，有

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = -\eta(\eta-1)x^{1-2/\eta} + \frac{1}{3}\eta(3-\eta)Ax^{1-6/\eta}; \tag{22}$$

设 $\eta = 2$，则得

$$\frac{1}{2}y^2 = C + 2x - \frac{2}{3}Ax^{-1}; \tag{23}$$

设 $\eta = \frac{3}{2}$，则得

$$\frac{1}{2}y^2 = C^2 + \frac{9}{8}x^{2/3} - \frac{3}{8}Ax^{-2}. \tag{24}$$

由函数明显可见，当 $\lambda = 0$ 时，弯曲效应改变了相平面的结构，即在 $\lambda = 0$ 附近宇宙模型相对于空间曲率的变化是结构不稳定的.

4 考虑体黏滞系数的模型

现在讨论宇宙物质具有体黏滞系数时的一些解. 方程组(5)是非线性的，具有复杂的奇异性. 对于闭合宇宙($k = +1$)，当 $\lambda = 0$ 时，容许用线性化程序.

对于辐射($\eta = 2$)

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = \beta y - 2 + \frac{2}{3}Ax^{-2}. \tag{25}$$

在有物理意义的区域 $x \geqslant 0$，奇点为

$$x_0 = (A/3)^{1/2}, \tag{26}$$

线性化方程

$$\ddot{x} - \beta\dot{x} + \frac{4}{3}x\left(\frac{A}{3}\right)^{1/2} = 0 \tag{27}$$

有解

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}, \\ y &= C_1\mu_1 e^{\alpha_1 t} + C_2\mu_2 e^{\alpha_2 t}, \end{aligned} \tag{28}$$

式中 α_1 和 α_2 是特征方程

$$\alpha^2 - \beta\alpha + 4\left(\frac{3}{A}\right)^{1/2} = 0$$

的两个根，μ_1 和 μ_2 是‘分布系数’方程

$$\mu^2 - \beta\mu + 4\left(\frac{3}{A}\right)^{1/2} = 0$$

的两个根.

对于相平面上的解，可以考虑下面三种情况：

1）α_1 和 α_2 都是实的，而且同号

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{\beta \pm \left[\beta^2 - 16\left(\frac{3}{A}\right)^{1/2}\right]^{1/2}\right\},$$

β 满足条件 $A > A_\beta \equiv \frac{768}{\beta^4}$，这时 $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$，而且存在新的变量(x, y)，满足方程 $\xi_{,t} = \alpha_1\xi$，$\zeta_{,t} = \alpha_2\zeta$；$\xi = C\zeta^a$，$a \equiv \alpha_2/\alpha_1$. 初始坐标是不稳定节点类型的奇点.

方程组的通解为

$$x = x_0 + C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}.$$

2）α_1 和 α_2 为复共轭

当 $0 < A < A_\beta\left(A_\beta = \frac{768}{\beta^4}\right)$ 时出现这种情况，这时得到

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{\beta \pm i\left[-\beta^2 + 16\left(\frac{3}{A}\right)^{1/2}\right]^{1/2}\right\} = a \pm ib.$$

奇点$(0,0)$是不稳定的焦点，由于 x 和 y 是实数时 ξ 和 ζ 是复共轭，故可引入中间变量

$$\alpha_1 = a_1 + ib_1, \quad \alpha_2 = a_1 - ib_1,$$
$$\xi = u + iv, \quad \zeta = u - iv,$$

在极坐标中得到对数螺线簇

$$r_{,\varphi} = \frac{a_1}{b_1}r, \quad r = C\exp\left(\frac{a_1}{b_1}\varphi\right).$$

过渡到相平面时，螺线变形为对称的开放形式的曲线簇，通解为

$$x = x_0 C e^{\beta_1 t}\sin(b_1 t + c_1),$$
$$a_1 = \mathrm{Re}\,\alpha, \quad b_1 = \mathrm{Im}\,\alpha.$$

3）$A = A_\beta = \frac{768}{\beta^4}$，临界点是不稳定的节点.

此时通解为

$$x = x_0 + \exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)(C_1 t + C_2).$$

在尘埃的情况下，奇点为 $x_0 = A^{3/8}$，线性化方程为

$$\ddot{x} - \beta\dot{x} + 2x\left(\frac{1}{A}\right)^{1/2} = 0.$$

特征方程

$$\alpha^2 - \beta\alpha + 2\left(\frac{1}{A}\right)^{1/2} = 0$$

的根是

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{\beta \pm \left[\beta^2 - 8\left(\frac{1}{A}\right)^{1/2}\right]^{1/2}\right\}.$$

相的形状类似于辐射的情况$\left(A_\beta = \frac{64}{\beta^4}\right)$.

现在讨论 $t \to \infty$ 时系统的渐近行为，由函数形式可见，当 $\lambda < 0$，$\beta = 0$，若宇宙闭合则是周期性的，不具有渐近形式. $\lambda > 0$，$\beta = k = 0$ 的系统由方程

$$x_{,tt} - \frac{1}{3}\eta^2\lambda x = 0$$

描述，渐近式为

$$x = C\exp\left[\left(\frac{\eta^2\lambda}{3t}\right)^{1/2}\right] + C_2\exp\left[-\left(\frac{\eta^2\lambda}{3t}\right)^{1/2}\right].$$

相应的，当 $\lambda = 0$，$\beta = k = 0$，系统由方程

$$x_{,tt} = 0$$

描述，渐近式为

$$x = C_1 t + C_2.$$

当 $\lambda = \beta = 0$，$k = -1$，系统由方程

$$x_{,tt} = 2, \quad \eta = 2$$

描述，渐近式为

$$x = (t - t_0)^2.$$

对于体黏滞系数 $\beta = \mathrm{const}$ 的情况给出奇点的相同，半平面(A, β)上任一点对应一个宇宙模型，其中

$$A = \frac{768(\eta - 1)^3}{(3 - \eta)\beta^4}.$$

显然，两条曲线关于 OA 轴是对称的，且随着 A 的增大 $|\beta|$ 单调减小，区域 $\beta > 0$ 对应于不稳定的节点和焦点，$\beta < 0$ 的区域对应于稳定的节点和焦点，奇点的种类决定于线性化矩阵的本征值. 由此可见，体黏滞系数 $\beta = 0$ 时上述宇宙模型是不稳定的.

5　结　　论

综上，在 $\lambda = 0$，$\beta = 0$，所讨论的宇宙模型对于 λ 的变化是结构不稳定的；在 $k = \lambda = 0$，宇宙对于空间曲率 k 的变化$(\beta = 0)$也是结构不稳定的；宇宙因子

λ 是相图参量,这表明即使 λ 很小,对于检验不同的理论模型也是起着重要作用的;在研究合理的宇宙模型时,必须考虑非零的宇宙项.

[1] A. Zee, M. Sasak, *Physik*, 1999, 207.

[2] D. Belinsk, *J. Phys.* (in Russian), **A6**(1988), 31.

[3] J.G. Cramer, *et al.*, *Phys. Rev.*, **D51**(1995), 3117.

[4] L.A. Anchordgui, *et al.*, *Mod. Phys. Lett.*, **A14**(1999), 791.

[5] Yong-jiu Wang, General Relativity and Cosmology(Hunan Science and Technology Press, 2000).

[6] Yong-jiu Wang, Zhi-ming Tang, *Science in China Series* A(2001), 350.

[7] Yong-jiu Wang, Mao-wang Lu, *Chin. Phys. Lett.*, 1999, 162.

[8] Y.J.Wang, Z.M.Tang, *Acta Physica Sinica*, **49**(2000), 597(in Chinese)[王永久等,物理学报,49(2000),597].

THE STABILITY OF A KIND OF COSMOLOGICAL MODEL

WANG YONG-JIU TANG ZHI-MING

(*Institute of Physics, Hunan Normal University, Changsha* 410081, *China*)

(Received 9 March 2001; revised manuscript received 26 May 2001)

ABSTRACT

The stability of a kind of cosmological models is given. The variations of the cosmological model for parameters λ and k were discussed respectively. Near $\lambda = 0$, the cosmological model is unstable with the change of λ, and near $\lambda = \beta = 0$, the cosmological model is unstable with the change of k. So when we consider the stable cosmological model, we must consider the no-zero cosmological constant.

Keywords: Cosmology, Models, General Relativity

PACC: 0314