第 50 卷 第 10 期 2001 年 10 月
1000-3290/2001/50(10)/1833-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 50, No. 10, October, 2001

极端荷电黑洞引力场中的轨道动力学*

陈菊华 王永久

(湖南师范大学物理系，物理研究所，长沙 410081)

(2001 年 3 月 25 日收到；2001 年 5 月 12 日收到修改稿)

运用相平面分析法，通过求解广义相对论运动方程，得到了在极端荷电黑洞引力场中运动的天体的轨道方程，同时作出了轨道相平面图并分析了其轨道的稳定性.

关键词：相平面，稳定性，轨道

PACC：0314

1 引 言

在浩瀚的宇宙之中，天体沿各自的轨道运动得如此和谐，吸引着无数的天文学家和物理学家进行观察和研究. 从牛顿的万有引力定律到开普勒的行星运动三大定律，人们可以定量地分析天体的运动轨道，成功地预言并找到了海王星和冥王星，但是它无法解释水星轨道进动效应. 爱因斯坦用超人的智慧建立了广义相对论后成功地解释了水星轨道进动效应. 运用广义相对论运动方程计算轨道进动效应，通常是用近似的椭圆积分法或寻找该方程的微扰解. 例如，Wald[1] 研究了椭圆轨道的一个微小振动的情况；Misner，Thorne 和 Wheeler (MTW)[2] 等人是先考虑一个近圆轨道后再运用后牛顿(PPN)公式进行计算. 在本文中运用文献[3—11]的相平面分析法研究了极端荷电黑洞引力场中天体运动的轨道方程和它的稳定性.

本文推导出极端荷电黑洞的引力场中天体运动的轨道方程，运用相平面分析法研究轨道的稳定性. 本文取 $C = G = 1$.

2 极端荷电黑洞引力场中的广义相对论运动方程

我们假定极端荷电黑洞的质量为 M，电荷 $Q = M$，一个质量为 m 的小天体绕其运动. 根据广义相对论，极端荷电黑洞的引力场的度规为

$$\mathrm{d}s^2 = (1 - r_+/r)^2\mathrm{d}t^2 - (1 - r_+/r)^{-2}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\theta^2 - r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2, \tag{1}$$

式中视界半径为 $r_+ = M$. 我们知道在一定的轨道上运动天体的拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \frac{1}{2}mC^2, \tag{2}$$

τ 为本征时间.

为了研究的方便只考虑赤道平面上的运动，即 $\theta = \pi/2$. 其拉氏量的表达式是

$$L = \frac{1}{2}m\left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^2 t'^2 - \frac{1}{2}m\left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-2} r'^2 - \frac{1}{2}mr^2\varphi'^2, \tag{3}$$

式中 $t' = \mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$，$r' = \mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau$，$\varphi' = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\tau$. 由欧拉-拉格朗日方程，有

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t'} = \varepsilon = m\left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^2 t', \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \varphi'} = J = m\left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^2 \varphi', \tag{5}$$

式中 ε，J 分别为总能量和总角动量. 用方程(4)，(5)代入方程(3)，消去 t' 和 φ'，得

$$r'^2 = E^2 - (1 + J^2/m^2r^2)(1 - r_+/r)^2, \tag{6}$$

式中 $E = \varepsilon/m$. 因为 r 应该是 φ 的函数，所以 $r' = (\mathrm{d}r/\mathrm{d}\varphi)\times\varphi'$，同时令 $R = r_+/r$，则

$$(\mathrm{d}R/\mathrm{d}\varphi)^2 = 2\alpha E^2 - (2\alpha + R^2)(1 - R)^2, \tag{7}$$

式中 $\alpha = (mr_+/J)^2/2$. 现在，对方程(7)两边对 φ 求导数得

$$\mathrm{d}^2R/\mathrm{d}\varphi^2 = 2\alpha - (2\alpha + 1)R + 3R^2 - 2R^3, \tag{8}$$

这是我们得到的广义相对论运动方程. 通常解这个

* 国家自然科学基金(批准号：19975018)资助的课题.

方程的方法是通过对方程(7)分离变量进行近似计算椭圆积分[12]或用微扰方法求解方程(8)[1]．下面用相平面分析法研究轨道的稳定性．

3 轨道稳定性的分析

方程(8)是一个2阶非线性微分方程，求出它的解很困难．为此我们选用相平面分析法，引入两个新的参变量 $x = R$ 和 $y = \mathrm{d}R/\mathrm{d}\varphi$，则有

$$x' = y, \tag{9}$$

$$y' = 2\alpha - (2\alpha + 1)x + 3x^2 - 2x^3. \tag{10}$$

方程(10)的固定平衡点为 $x' = y' = 0$，即

$$\{x_1, y_1\} = \{(1 + \sqrt{1 - 16\alpha})/4, 0\},$$

$$\{x_2, y_2\} = \{(1 - \sqrt{1 - 16\alpha})/4, 0\}. \tag{11}$$

由方程(7)得

$$x' = y = \pm[2\alpha E^2 - (2\alpha + x^2)(1 - x)^2]^{1/2} = 0. \tag{12}$$

因此对于由(11)式确定的固定平衡点的能量为

$$E_1^2 - 1 = \left[1 + \sqrt{1 - 16\alpha} - 8(3 + \sqrt{1 - 16\alpha})\alpha - 32\alpha^2\right]/64\alpha, \tag{13}$$

$$E_1^2 - 1 = \left[1 - \sqrt{1 - 16\alpha} - 8(3 - \sqrt{1 - 16\alpha})\alpha - 32\alpha^2\right]/64\alpha. \tag{14}$$

由(9)和(10)式得

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = [2\alpha - (2\alpha + 1)x + 2x^2 - x^4]/y, \tag{15}$$

积分(15)式得

$$y^2 = \beta + 4\alpha x - (2\alpha + 1)x^2 + 2x^3 - x^4, \tag{16}$$

式中 β 为积分常数，(16)式和(7)式对照可确定

$$\beta = 2\alpha(E^2 - 1), \tag{17}$$

于是方程(16)表示为

$$E^2 - 1 = (y^2 - 4\alpha x + (2\alpha + 1)x^2 - 2x^3 + x^4)/2\alpha. \tag{18}$$

从方程(7)可知，当 $y = \mathrm{d}R/\mathrm{d}\varphi = 0$ 时，可以得到轨道的等效势能的表达式

$$V_{eff}^2 - 1 = (x^4 - 2x^3 + (2\alpha + 1)x^2 - 4\alpha x)/2\alpha. \tag{19}$$

为了研究轨道方程(18)所描述的轨道及其稳定性，取 $\alpha = 1/30$ 作出不同能量的轨道相平面图，如图1所示．

轨道稳定性条件 $\partial V_{\mathrm{eff}} = 0$，在图1中可以发现轨道2是稳定轨道与不稳定轨道的分界线，在轨道2

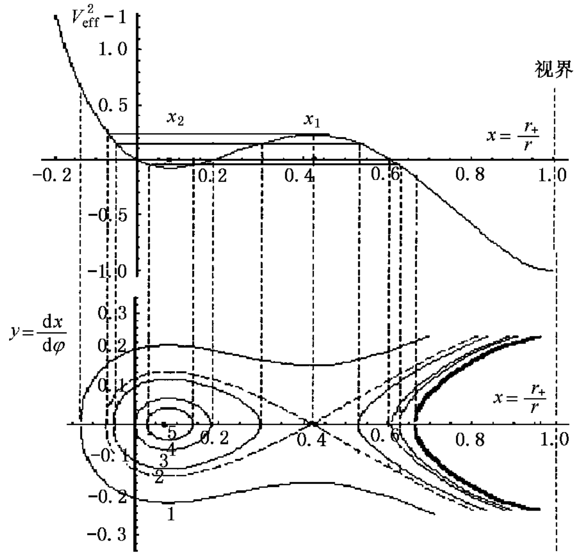

图1 轨道相平面图($\alpha = 1/30$)(图中1代表不稳定轨道，2代表轨道稳定性分界线，3代表稳定双曲型轨道，4代表轨道种类分界线，5代表稳定椭圆型轨道)

之内的各条轨道都是稳定轨道，在它之外的各条轨道都是不稳定的轨道．由 $V_{\mathrm{eff}}^2 - 1$ 的正负可以知道轨道4是椭圆型轨道和双曲型轨道的分界线，在轨道4之内的各条轨道都是椭圆型轨道，在它之外的各条轨道都是双曲型轨道．对于轨道1可以通过轨道稳定性条件 $\partial V_{\mathrm{eff}} = 0$ 和方程(19)求出 $\alpha = 1/16 = 0.0625$，而轨道4可以由轨道种类的条件 $E^2 - 1 = 0$ 和方程(13)可求出 $\alpha = (5\sqrt{5} - 1)/4 \approx 0.0450$．为了系统地分析轨道的种类和稳定性，我们对 α 作如下5个区间进行分析：

$0 < \alpha < 0.0450$， $\alpha = 0.0450$，

$0.0450 < \alpha < 0.0625$， $\alpha = 0.0625$，

$0.0625 < \alpha$.

为了直观地分析轨道的性质，我们首先分别作出上述五个区间对应的等效势能曲线(如图2所示)和轨道稳定性分界线(如图3所示)．

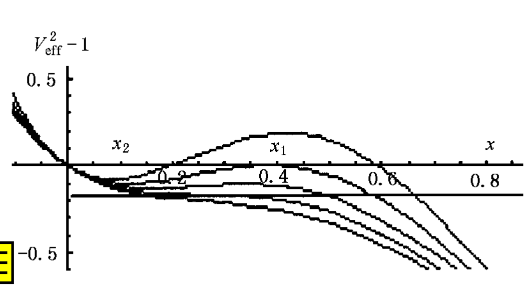

图2 等效势能曲线(自上而下为 $\alpha = 0.035, 0.045, 0.055, 0.065, 0.075$)

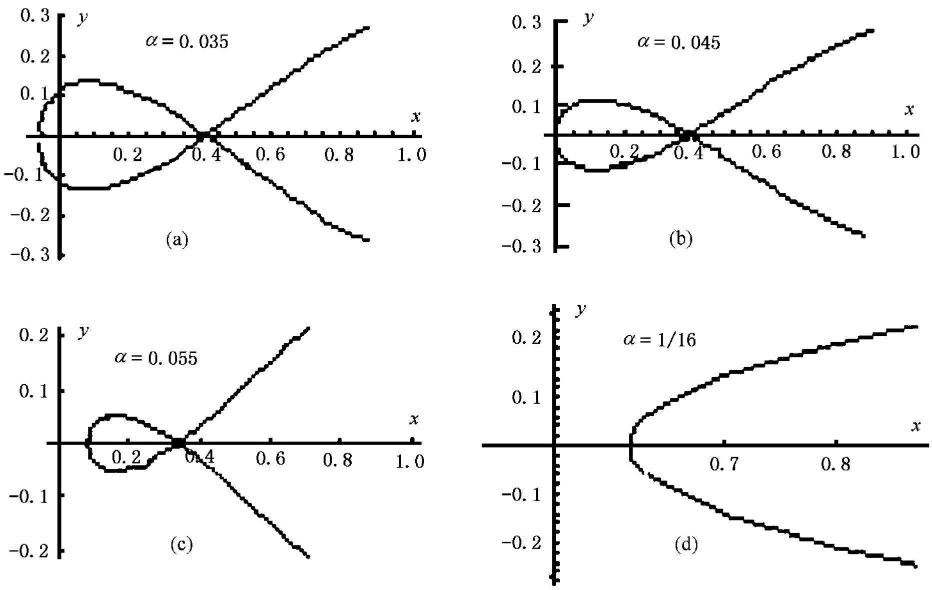

图 3　对应于不同的 α 值的稳定性分界线

结合图 1，2，3，可以清楚地看出：

1）当 $\alpha \geqslant 0.0625$ 时，由图 2 可知等效势能曲线没有拐点，同时由图 3(d)也可知道不存在稳定的轨道，即质量为 m 的天体没有足够的角动量来维持稳定的运动，而直接地掉入到黑洞之中.

2）当 $0.0450 < \alpha < 0.0625$ 时，由图 2 可知应该存在稳定的轨道和不稳定的轨道，而由图 3(c)和图 1 可以看出只存在稳定的椭圆型轨道，不存在稳定的双曲型轨道.

3）当 $\alpha = 0.0450$ 时，由图 2 可知应该存在稳定的轨道和不稳定的轨道，而由图 3(b)和图 1 可以知道稳定轨道中只有一条是双曲型轨道而其他所有轨道都是椭圆型轨道.

4）当 $0 < \alpha < 0.0450$ 时，由图 2 可知应该存在稳定的轨道和不稳定的轨道，而由图 3(a)和图 1 可以知道稳定轨道中既有双曲型轨道，又有椭圆型轨道.

4　结　　论

我们从广义相对论动力学方程出发，利用相平面分析法系统地分析了天体在极端荷电黑洞引力场中运动的轨道方程和轨道稳定性，找到了稳定的椭圆型轨道和稳定的双曲型轨道和它们对应的条件.

[1] R. Wald, General Relativity (University of Chicago, 1984), pp. 139 – 143.

[2] C. Misner, K. Thorne, J. Wheeler, Gravitation (Freeman, San Francisco, 1973), pp.659 – 670.

[3] B. Davies, *Am. J. Phys.*, **51**(1983), 909; *Am. J. Phys.*, **53** (1985) 374; *Am. J. Phys.*, **56**(1988), 1097.

[4] A. P. Arya, Introduction to Classical Mechanics (Prentice-Hall, Engle-wood Cliffs, NJ, 1990), pp.222 – 252.

[5] H. C. Corben, P. Stehle, Classical Mechanics (Dover, Minecola, NY, 1994), 2 nd ed., pp.90 – 100.

[6] G. Fowles, G. Cassiday, Classical Dynamics of Particles and Symstems(Harcourt-Brace, Orlando, FL, 1993), 5th ed., pp. 191 – 216.

[7] H. Goldstei, Classical Mechanics (Addision-Wesley, Reading, MA, 1980), 2nd ed., pp.94 – 102.

[8] A. S. Kompaneyets, Theoretical Mechanics (Dover, New York, 1962), 2nd ed., pp.41 – 48.

[9] J. Marion and S. Thornton, Analytical Mechanics (Harcourt-Brace, Orlando, FL., 1995), 4th ed., pp.291 – 321.

[10] A. Roy, Orbital Dynamics (Hilger, Redcliffe Way, Bristol 1982), 2nd ed., pp.69 – 100.

[11] K. Symon, Mechanics (Addison-Wesley, Reading, MA, 1971), pp.128 – 134.

[12] J. L. Martin, General Relativity-A First Course for Physicists (Prentice-Hall International, Hertfordshire, UK, 1996), Revised ed. pp.58 – 60.

ORBITAL DYNAMICS OF EXTREME CHARGED BLACK HOLE*

CHEN JU-HUA WANG YONG-JIU
(*Department of Physics*, *Institute of Physics*, *Hunan Normal University*, *Changsha* 410081, *China*)
(Received 25 March 2001; revised manuscript received 12 May 2001)

ABSTRACT

With the phase-plane analysis method, we obtain the general relativity motion equation in the gravitational field of the extreme charged black hole, and we plot the picture of the orbital phase-plane and analyze the orbital stability.

Keywords: phase-plane, stability, orbit
PACC: 0314

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19975018).