

超混沌系统的耦合同步*

王铁邦¹⁾ 覃团发²⁾ 陈光旨¹⁾

¹⁾广西大学物理系, 南宁 530004) ²⁾广西大学计算机与信息工程学院, 南宁 530004)

(2000 年 11 月 23 日收到, 2001 年 5 月 20 日收到修改稿)

利用相互耦合的方法在超混沌 LC 振荡电路中实现了混沌同步. 给出了确定耦合系数的方法, 计算了最大 Lyapunov 指数谱, 讨论并给出了耦合系数与同步时间的关系. 该方法在参数不匹配情况下失去了同步.

关键词: 超混沌, 混沌同步, 耦合系数

PACC: 0545

1 引 言

Pecora 和 Carrol 在 1990 年^[1]提出驱动-响应同步方案(PC). 随后其他的混沌同步方法如主动-被动分拆同步法(APD)^[2], 参数调节法和自适应控制调节法^[3]等也相继出现. 特别是混沌同步在通讯系统中的一系列成果^[2, 4-6], 使该领域的研究更见高涨.

低维的混沌系统只有一个正的 Lyapunov 指数, 因而其混沌同步在通讯中的保密性和抗破译能力还不够理想. 超混沌系统具有两个或两个以上正的 Lyapunov 指数^[7], 包含了更多的信息, 故超混沌系统的同步应用于通讯中, 保密性和抗破译能力比低维系统有很大的改观. 因此超混沌同步成了人们研究的热点之一. 用驱动-响应同步法, 在洛仑兹-哈肯超混沌系统(CLHE)中已经实现了混沌同步^[8]. 驱动-反馈同步法也在超混沌系统中实现了混沌同步^[9]. 这些方法首先要分解出超混沌系统中的稳定部分, 然后才能实现同步. 但是自然界中的大多数超混沌是不能分解出稳定部分的, 如激光超混沌系统、生化超混沌系统等等. 然而, 相互耦合同步法就能克服这些困难.

2 相互耦合同步法

考虑一个动力学系统

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \quad (1)$$

其中 F 为向量场, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 代表系统的变量矢量. 相互耦合同步法就是复制一个与(1)式一样的系统, 用 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 代表它的变量矢量. 加上相互耦合, 则原系统为

$$\frac{dX}{dt} = F(X) + W(Y - X), \quad (2)$$

复制的系统为

$$\frac{dY}{dt} = F(Y) + W(X - Y), \quad (3)$$

其中 $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 是耦合系数(耦合强度). 通常各变量上的耦合都相等, 取为 $w = w_1 = w_2 = \dots = w_n$, 且都取正值. 适当地选取耦合系数 w , 系统(2)和系统(3)就会达到同步, 也就是随着时间的演化, $|X - Y|$ 趋于零. 可以非常明显地看出相互耦合同步的一些优点. 首先, 它不需要对超混沌系统进行分解. 其次, 随着时间的演化, $|X - Y|$ 趋于零, 这样就不会改变原来混沌系统的动力学性质, 即使达到同步后, 原系统都还保持超混沌性质. 第三, 随着时间的演化, 相互耦合同步法的耦合项将趋于零. 这样就不会像其他耦合方法那样因耦合系数过大而使系统脱离原来的混沌轨道而发散.

3 对超混沌 LC 振子系统的讨论

3.1 超混沌 LC 振子系统

超混沌 LC 振子模型是由 Tamasevicius 等^[10]提出的, 包括一个串联的 LC 振荡回路、负阻、充当非线性元件的二极管和一个运算放大器. 其动力学系

* 广西自然科学基金(批准号: 9912005)资助的课题.

统可描述为

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= ax_1 - x_2 - x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 - bx_2, \\ \mu \frac{dx_3}{dt} &= x_1 - cx_3 - x_4, \\ \varepsilon \frac{dx_4}{dt} &= x_3 - d(x_4 - 1)H(x_4 - 1), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 a, b, c, d, μ 和 ε 为系统参数, $H(u)$ 为阶跃函数

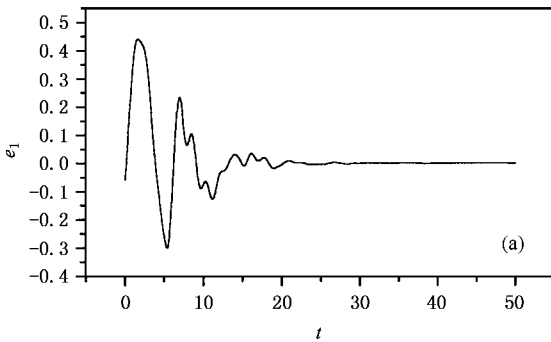
$$H(u) = \begin{cases} 0 & u < 0, \\ 1 & u \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

当系统参数取 $a = 0.6, b = 0.05, c = 0.015, d = 10, \varepsilon = 0.33, \mu = 0.3$ 时, 系统(4)有两个正的 Lyapunov 指数 $\lambda_1 = 0.11, \lambda_2 = 0.06$ 表现出超混沌性质. 在下面的数字模拟中, 除了特别说明之外, 各参数都取上面的值.

3.2 混沌同步

复制一个和系统(4)一样的超混沌系统, 其变量用 $y_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 表示. 在其上加上相互耦合, 则原系统为

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_1 - x_2 - x_3 + u(y_1 - x_1),$$



$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= x_1 - bx_2 + u(y_2 - x_2), \\ \mu \frac{dx_3}{dt} &= x_1 - cx_3 - x_4 + u(y_3 - x_3), \\ \varepsilon \frac{dx_4}{dt} &= x_3 - d(x_4 - 1)H(x_4 - 1) + u(y_4 - x_4). \end{aligned} \quad (6)$$

复制的系统为

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= ay_1 - y_2 - y_3 + u(x_1 - y_1), \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_1 - by_2 + u(x_2 - y_2), \\ \mu \frac{dy_3}{dt} &= y_1 - cy_3 - y_4 + u(x_3 - y_3), \\ \varepsilon \frac{dy_4}{dt} &= y_3 - d(y_4 - 1)H(x_4 - 1) + u(x_4 - y_4). \end{aligned} \quad (7)$$

用两个相互耦合的超混沌系统对应变量的差

$$e_i = x_i - y_i (i = 1, 2, 3, 4) \quad (8)$$

及其方均根

$$e = \sqrt{\frac{1}{4}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2)}, \quad (9)$$

随时间的变化来反映系统(6)和系统(7)是否达到了同步. 如果 $e_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 和 e 随着时间的演化而趋于零, 则表明两系统达到了同步, 否则就没有达到

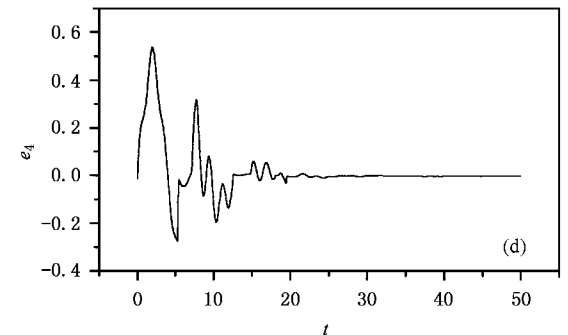
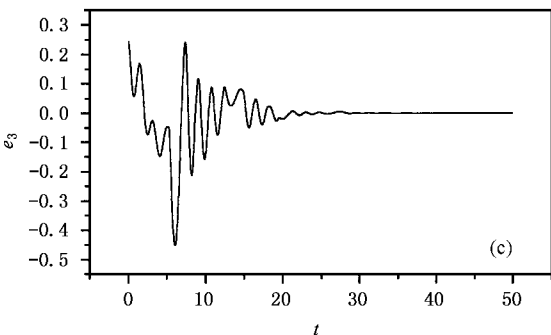
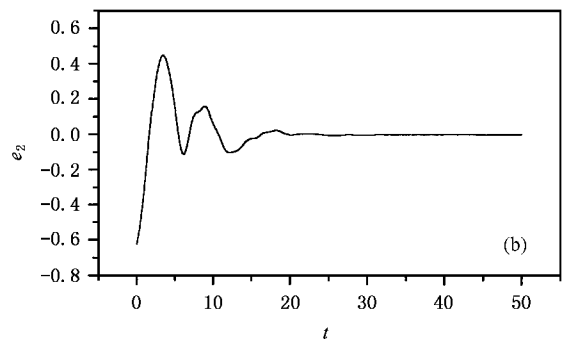


图 1 $e_i = x_i - y_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 随时间的变化

同步.

在 0 到 1 之间的均匀分布随机数序列中随机选取系统的初值作数字模拟. 取耦合系数 $w = 0.15$, 图 1 为系统 (6) 和系统 (7) 的 $e_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 随时间变化的关系图, 图 2 为 e 随时间变化的情况.

从图 1 和图 2 可以明显地看出 $e_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 和 e 随着时间的演化而趋于零. 也就是说, 当取相互耦合系数 $w = 0.15$ 时, 超混沌系统 (6) 和超混沌系统 (7) 达到了精确的同步. 由此可知, 当在超混沌系统上加上适当的相互耦合后, 系统能达到同步.

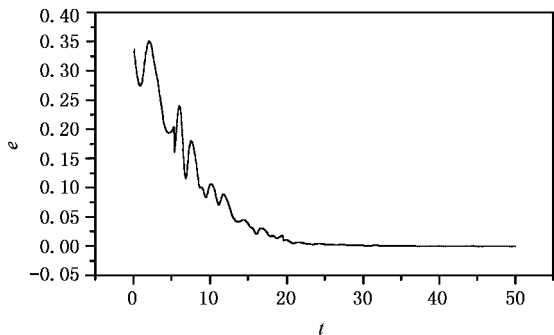


图 2 耦合系数 $w = 0.15$ 时 e 随时间的变化

3.3 耦合系数 w 的确定

但有一点是很明显的, 那就是并非所有的耦合系数 w 值都能使系统 (6) 和系统 (7) 达到同步. 也就是说, 在用相互耦合法使超混沌系统达到同步时, 耦合系数只能在一定的范围内取值. 确定耦合系数的这个范围可以通过计算最大 Lyapunov 指数来确定.

最大 Lyapunov 指数反映了混沌系统的运动行为^[11]. 在一定的耦合下, 当两个系统的最大相对 Lyapunov 指数小于零时, 两个系统就达到了同步, 否则就没有达到同步^[12]. 因此, 可以由两个混沌系统的最大相对 Lyapunov 指数来判断这两个混沌系统是否达到同步. 系统 (6) 和系统 (7) 的最大相对 Lyapunov 指数为

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \delta^2 x_i(t)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \delta^2 x_0(i)}} \right), \quad (10)$$

其中 $\delta x(i) = x_i - y_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 为系统 (6) 与系统 (7) 各对应变量的差, $\delta x_0(i)$ 是 $\delta x(i)$ 在 $t = 0$ 时刻的

值, $\delta x_t(i)$ 是 $\delta x(i)$ 在 t 时刻的值, $\sqrt{\sum_{i=1}^N \delta^2 x_0(i)}$ 是 $t = 0$ 时刻系统 (6) 与系统 (7) 间的距离, $\sqrt{\sum_{i=1}^N \delta^2 x_t(i)}$

是 t 时刻两系统间的距离^[10], N 为系统的维数.

图 3 显示了最大 Lyapunov 指数和耦合系数 w 的关系. 从图 3 中可看出, 当取 $w > 0.05$ 时, 对应的最大 Lyapunov 指数都小于零. 也就是说, 只要加上耦合 w 大于 0.05, 经过一段时间后, 系统 (6) 和系统 (7) 会最终达到同步. 这表明, 只有耦合系数在一定的范围内才能使系统达到同步, 耦合系数存在一定的阈值. 因此, 要使两个超混沌系统达到同步, 耦合系数的选取是至关重要的. 耦合系数选得不合适, 是不会达到同步的. 可见确定耦合系数的阈值是实现同步的关键.

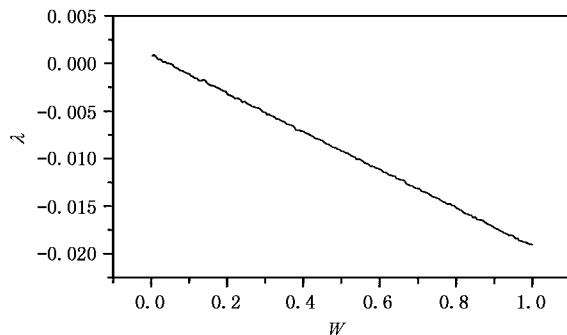


图 3 最大 Lyapunov 指数与耦合系数 w 的关系

3.4 同步时间

但是在实际应用中, 必须考虑同步所需要的时间. 有时需要快速同步, 有的则需要一定的时间再同步. 定义同步时间 T 为两个相互耦合的超混沌系统从零时刻开始, 演化到 $e = 10^{-5}$ 所需的时间. 同步时间 T 和耦合系数 w 有密切的关系.

取耦合系数 $w = 0.35$, 系统 (6) 和系统 (7) 的 e 随时间的变化示于图 4. 可以看到, e 随着时间的演化而趋于零, 系统 (6) 和系统 (7) 达到了同步. 对比图 2 和图 4, 可以明显地看出, 耦合系数 w 取 0.15 时同步所用的时间比耦合系数 w 取 0.35 时同步所用的时间要长.

计算系统 (6) 和系统 (7) 的耦合系数 w 和同步时间 T 的关系, 结果示于图 5. 由图 5 可见, 虽然中间有一些小的起伏, 但大体上耦合系数越大, 同步时间越短. 我们还探讨过时空混沌系统 CODES 的耦合同步, 其耦合系数与同步时间之间也有同样的关系^[13]. 这是一个非常重要的结论, 在同步过程中可以根据该结论和实际的需要来选择合适的耦合系数.

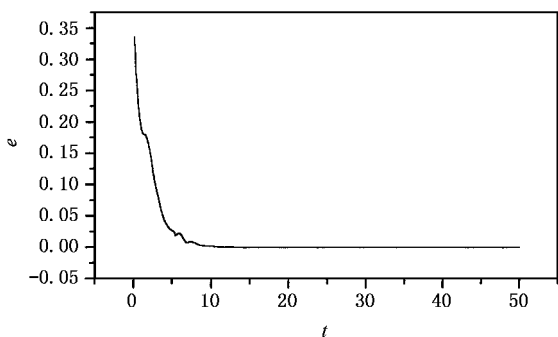


图 4 耦合系数 $w = 0.35$ 时 e 随时间的变化

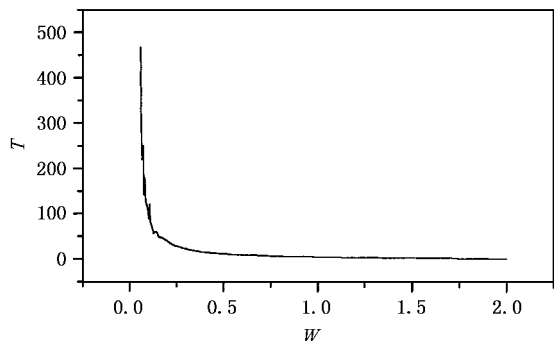


图 5 耦合系数 w 与同步时间 T 的关系

3.5 参数不匹配时的同步情况

把系统 (7) 中的系统参数 $a, b, c, d, \mu, \varepsilon$ 改为 $a', b', c', d', \mu', \varepsilon'$, 则新的系统为

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a'y_1 - y_2 - y_3 + u(x_1 - y_1), \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_1 - b'y_2 + u(x_2 - y_2), \\ \mu' \frac{dy_3}{dt} &= y_1 - c'y_3 - y_4 + u(x_3 - y_3), \\ \varepsilon' \frac{dy_4}{dt} &= y_3 - d'(y_4 - 1)H(y_4 - 1) + u(x_4 - y_4). \end{aligned} \tag{11}$$

仍取 $a' = a = 0.6, c' = c = 0.015, d' = d = 10, \mu' = \mu = 0.3, \varepsilon' = \varepsilon = 0.33$, 但 $b' \neq b$, 取 $b' = 0.1, b = 0.05$. 图 6 为上述不匹配参数情况下, 最大 Lyapunov 指数和耦合系数 w 的关系. 从图 6 可见, 最大 Lyapunov 指数都大于零, 在这种情况下不能达到同步. 也就是说, 相互耦合同步法在参数不匹配情况下失去了同步.

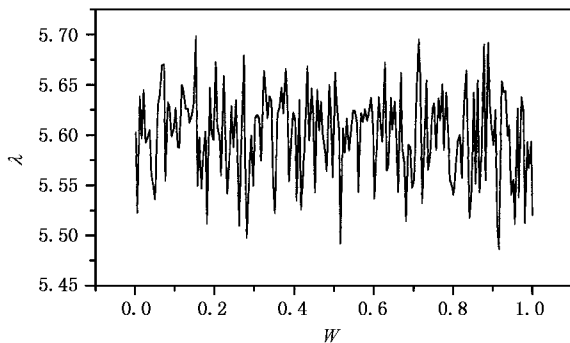


图 6 参数不匹配 ($b' \neq b$) 时, 最大 Lyapunov 指数与耦合系数 w 的关系

4 结 论

我们以超混沌 LC 振子系统为例, 用相互耦合的方法实现了超混沌 LC 振子系统的同步. 给出了确定耦合系数的两种方法, 并计算了最大 Lyapunov 指数谱, 得出了能使超混沌 LC 振子系统实现同步的耦合系数的阈值, 讨论并给出了耦合系数和同步时间的关系. 该方法在参数不匹配的情况下失去了同步. 超混沌系统具有两个或多于两个正的 Lyapunov 指数, 其不确定性和保密性更强. 因此, 超混沌系统的混沌同步在保密通讯中的应用前景是相当广阔的. 相互耦合的方法有其特有的优点, 可望在保密通讯中大显身手.

特别感谢广西大学物理系吴伟明教授的帮助.

[1] L. M. Pecora, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 821.
 [2] L. Kocarev, U. Parlitz, *Phys. Rev. Lett.*, **74**(1995), 5028.
 [3] J. K. John, R. E. Amritkar, *Phys. Rev.*, **E49**(1994), 4843.
 [4] S. Hayes, C. Grebogi, E. Ott, *Phys. Rev. Lett.*, **70**(1993), 3031.
 [5] G. Perez, H. A. Cerderra, *Phys. Rev. Lett.*, **74**(1995), 1970.
 [6] G. L. Wang, G. Z. Chen, *Acta Physica Sinica*, **48**(1999), 1605 (in Chinese) [王金兰、陈光旨, *物理学报*, **48**(2000), 1605].
 [7] D. H. He, J. X. Xu, Y. H. Chen, *Acta Physica Sinica*, **49**(2000), 833 (in Chinese) [何岱海、徐键学、陈永红, *物理学报*, **49**(2000), 833].

- [8] J. Q. Fang , *Science Bulletin* , **40**(1995) , 306 [in Chinese] 方锦清 *科学通报* , **40**(1995) 306] and *Chinese Science Bulletin* , **40**(1995) , 988 .
- [9] J. Q. Fang , *Progress In Physics* , **16**(1996) , 182 [in Chinese] 方锦清 *物理学进展* , **16**(1996) , 182] .
- [10] A. Tamasevicius , A. Namajunas , A. Cenys , *Elestron Lett .* , **32**(1996) , 957 .
- [11] P. L. Shi , G. Hu , L. M. Xu , *Acta Physica Sinica* , **49**(2000) , 24 [in Chinese] 石朋亮、胡岗、徐莉梅 *物理学报* , **49**(2000) , 24] .
- [12] Z. H. Liu , S. G. Chen , B. Hu , *Phys. Rev. .* , **E59**(1999) , 2817 .
- [13] T. B. Wang , G. Z. Chen , T. F. Qin , *Guangxi Sciences*(in Chinese) 王铁邦、陈光旨、覃团发 *广西科学*] (待出版)

COUPLED SYNCHRONIZATION OF HYPERCHAOTIC SYSTEMS*

WANG TIE-BANG¹⁾ QIN TUAN-FA²⁾ CHEN GUANG-ZHI¹⁾

¹⁾ *Department of Physics , Guangxi University , Nanning 530004 , China)*

²⁾ *College of Computer and Information Engineering , Guangxi University , Nanning 530004 , China)*

(Received 23 November 2000 ; revised manuscript received 20 May 2001)

ABSTRACT

The hyperchaotic synchronization was achieved in *LC* oscillator via the mutual coupling method. The method to confirm coupling coefficient was given , the largest Lyapunov exponent spectra were calculated , and the connection between the coupling parameter and the synchronization time is discussed and given. Synchronization will be lost in the case of mismatched parameters.

Keywords : hyperchaos , chaotic synchronization , coupling coefficient

PACC : 0545

* Project supported by the Natural Science Foundation of Guangxi(Grant No.9912005) , China.