

用周期拍方法控制非线性耗散系统和 保守系统的混沌*

李 伟^{1,2)} 陈式刚¹⁾

¹⁾ 中国工程物理研究院北京应用物理和计算数学研究所, 北京 100088)

²⁾ 北京师范大学物理系, 北京 100875)

(2001 年 3 月 16 日收到 2001 年 5 月 12 日收到修改稿)

通过分析无反馈周期拍方法控制耗散系统的动力学特性, 找出了控制耗散系统混沌轨道的必要条件, 并且对周期拍方法进行推广, 在加上作为微扰的反馈项后, 实现对 2 维 Hamiltonian 系统混沌轨道的控制. 对于标准映象, 系统的整体混沌轨道被稳定在目标周期轨道上, 并且在有较弱外噪声的情况下具有鲁棒性. 在 3 维连续流的情况下, 与局限于 Poincaré 截面的脉冲控制方法进行比较, 确定了两种控制方法各自的适用范围, 结论是, 为了稳定控制保守系统的混沌轨道, 外加控制项必为耗散的.

关键词: 混沌控制, 保守系统

PACC: 0545

1 引 言

自从 Ott-Grebogi-Yorke (OGY)^[1] 方法被提出以来, 普遍认识到外力作用在非线性系统上, 可以改变系统的局部或整体的稳定性质, 由外力作用的方式和性质的不同而产生不同的控制混沌的方法^[2-8]. 这些方法大致可以分为反馈的或非反馈的. 反馈控制(如 OGY 方法)的优点是可以选择适当的反馈项使系统进入稳定轨道后, 将微扰减少到非常小的程度, 这是因为反馈控制的大小是根据受控制系统的状态来进行调节的, 可以将控制量取为系统状态对给定不动点偏离的函数. 如果控制整体来说是负反馈的, 即把控制项与原系统当作一个总的系统进行考虑时, 控制使系统总的耗散度增加, 则控制容易实现. 当系统到达被稳定的不动点时, 控制力几乎为零, 因此控制所需要的能量非常小, 而且系统稳定在它固有的周期轨道上. 然而反馈的控制, 由于控制系统与原系统之间有比较紧密的耦合, 因此这种控制方法对系统性质具有深远影响(例如它一般将保守系统改变为耗散的). 就实际应用而言, 在反馈控制中需要即时知道系统的状态, 而这在实际的控制过程中可能并不容易做到. 非反馈的控制可以看作是外力在相空间中对系统状态的平移, 不影

响系统的耗散性质. 在实际控制中也不需要事先知道系统的状态, 因此具有较强的可操作性, 但是控制力必须始终都作用在系统上, 因此控制一般是非微扰的, 即需要比较大的能量. 周期拍方法是一种非反馈的控制方法, 它是以一定的周期对系统作用脉冲力 $F = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, 从而在 nT 时刻使相空间轨道位置从 x 改变为 x' . 周期 T 和相空间轨道的改变量 $\Delta x = x' - x$ 在控制过程中始终保持不变. 假设从 x_s 出发的轨道经过 τ 时间后相空间坐标为 x_e , 如果此时对系统作用一个脉冲, 并且使 $\Delta x \approx x_s - x_e$, 轨道将回到出发点 x_s 附近, 在以后的控制中, 每经过 τ 时间作用一次相同的脉冲(即 $T = \tau$), 如果系统满足稳定控制的条件, 它将被控制在一条周期为 τ 并且通过 x_s 点附近的周期轨道上. 我们发现, 仅在耗散系统中存在满足稳定控制的条件的局部相空间, 对于保守系统则不存在. 因此, 非反馈的周期拍方法可以控制住耗散系统的混沌轨道, 但是对于保守系统, 周期拍的控制中必须加入反馈, 从而使被控制系统成为耗散系统. 直观来看, 如果将保守系统中一条混沌轨道(具有二维的测度)控制在周期轨道上, 因为轨道维数变小, 支撑原混沌轨道的相空间必然发生塌缩, 因而控制必须是强耗散的, 非反馈的周期拍控制是不稳定的控制.

* 国家攀登计划非线性科学基金、国家自然科学基金(批准号:19920003)和中国工程物理研究院基金(批准号:02222440)资助的课题.

2 控制原理及方法

用周期拍方法控制混沌^[9]是对系统施加周期性的不依赖于系统状态的外力,因此不改变系统主要由系统参数决定的性质,其作用是在相空间中移动系统的状态,从而形成稳定的不动点.为了说明这一思想,首先来看一维的简单情况.

考虑一维单峰映象

$$F(a, x) = 1 - \mu x^2, \mu \in (0, 2), x \in [-1, 1], \quad (1)$$

当参数 $\mu > \mu_\infty$ ($\mu_\infty = 1.4011551890\dots$) 后会出现混沌的迭代,我们将参数设置在这一区域,加入周期拍

$$p = \sum_{m=1}^{\infty} p \delta_{n\tau}(m), \delta_{mm} = \begin{cases} 1, & m = \tau n \\ 0, & m \neq \tau n \end{cases}$$

的控制后,通过调整周期拍的周期 τ ($\tau = 1, 2, 3, K$) 及强度 p ,可以将轨道控制在 τ 周期内.

τ 周期轨道的稳定性条件为

$$\left| \frac{\partial F^\tau(\mu, x)}{\partial x} \right|_{x=x^*} \leq 1, \quad (2)$$

其中 x^* 为不动点,但是对于前面给定的参数 μ , 上式一般不能得到满足.注意到相空间可能存在一些满足条件

$$s = \left| \frac{\partial F^\tau(\mu, x)}{\partial x} \right| \leq 1 \quad (3)$$

的区域(2)式与(3)式的差别只是后者 $x \in s$ 的点并非限定为系统的不动点.周期拍方法通过移动系统的状态,使满足(3)式条件的 s 区域产生不动点,从而建立稳定的 τ 周期轨道.例如当 $\tau = 1$ 时,在周期拍的作用下,单峰映象函数可以写为 $F(a, x) + p$, 这相当于对原来函数在垂直方向的平移,选择 p 在范围 $-1 - \frac{1}{4\mu} \leq p \leq -1 + \frac{3}{4\mu}$ 内时,可以将轨道稳定在 s 区域中的不动点 $x^* = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\mu(1+p)}}{2\mu}$

上,如图 1 所示,其中 F_1 为原函数, F_2 为经周期拍移动后的函数.当 $p = -1 + \frac{3}{4\mu}$ 时,在 $x^* = \frac{1}{2\mu}$ 处有倍周期分岔,而当 $p = -1 - \frac{1}{4\mu}$, $x^* = -\frac{1}{2\mu}$ 处存在切分岔.从以上分析可以看出,原系统中是否存在满足(3)式条件的 s 区域是能否用周期拍方法控制系统混沌的必要条件,如果原系统中不存在满足 s 区域(例如 tent map)就不能用周期拍方法控制混沌.一般耗散的混沌吸引子中都可能存在 s 区域,这是

因为它们之中可能镶嵌类似单峰映象的结构.对于高周期的轨道, s 区域是非连通的,通过选择适当的周期拍的强度 p ,同样可以实现控制.值得注意的是,对于一维单峰映象,我们并不知道当 p 值给定时, τ 周期不动点是否是唯一的,如果只有唯一的不动点,从 $x \in [-1, 1]$ 内任意位置出发的轨道最终都收敛到这一不动点上,但是如果不动点不是唯一的,在不同的流域出发的轨道将收敛到不同的吸引子上,这相当于求方程

$$F^\tau(a, x) + p - x = 0 \quad (4)$$

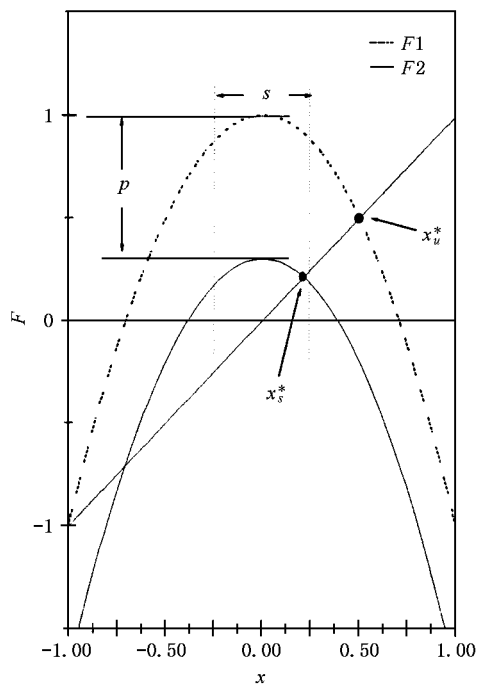


图 1 F_1 为原函数,具有不稳定不动点 x_s^* , F_2 为经周期拍 p 移动后的函数,在满足(3)式条件的 s 区域内形成稳定的不动点 x_s^*

在满足(3)式条件下解的唯一性的问题,即 p 与 x 是否一一对应.在低周期的情况下,可以直接看出解或者不存在,或者仅有唯一的解,但是在高周期的情况下,对于给定的 p ,如果同时存在多个满足(3)式条件的不动点,即多条稳定轨道将同时存在.但是通过数值计算,在 20 周期内我们还没有发现一维单峰映象中存在具有多吸引子的情况.对于其他的情况,如何解析地找出吸引子的个数及其流域是一个相当复杂的问题.

在高维情况下,周期拍控制对系统的作用不如一维情形这样的直观,因为无法像单峰映象那样把握系统的整体性质,只能进行局部稳定性的分析.

映象一般可以描述为 $x_{n+1} = F(a, x_n)$, 加入控制后, 系统可以被写为

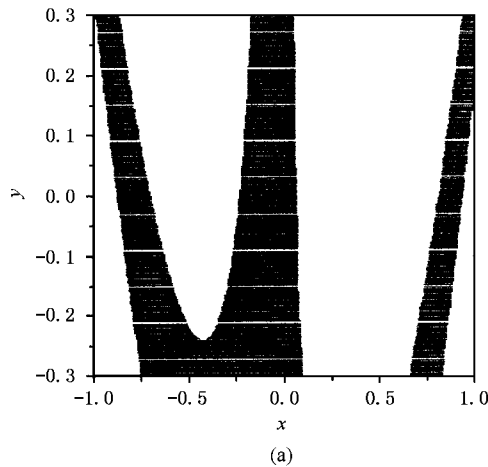
$$x_{n+1} = F(a, x_n) + p_n. \quad (5)$$

其中 a, p 为矢量, a 为参数,

$$p_n = p \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{n(\tau m)} \cdot \delta_{n(\tau m)} = \begin{cases} 1, & m = \tau n, \\ 0, & m \neq \tau n, \end{cases} \quad (6)$$

从 x_s 出发的轨道经过 τ 次迭代后成为 x_e , 选择 τ 周期拍为 $p = x_s - x_e$, 即经过 τ 周期后将轨道返回出发时的邻域, 容易看出, 在这一 p 的作用下 (5) 式必然在 x_s 形成 τ 次不动点 (稳定或不稳定不动点). 这种控制相当于截取原系统轨道的一个有限的片段, 具有稳定不动点的条件是其 τ 次迭代的 Jacobian 矩阵

$$A = \prod_{n=0}^{\tau-1} J_n, \quad J_n = \left. \frac{\partial F(a, x)}{\partial x} \right|_{x=x_n} \quad (7)$$



所有本征值的模都小于 1, 类似于 (3) 式给出的条件, 所有在相空间中满足这一条件的集合即为类似前面提到的 s 区域, 只有从 $X_s \in s$ 出发的轨道才是可以被控制的. 需要指出的是我们仍然不能通过求解高维情况下类似方程 (4), 满足 (3) 式条件的方程来确定在同一周期拍控制下, 稳定吸引子的个数及其流域. 但是在周期较低的情况下, 正如我们将要看到的, 仅存在唯一解. 直观看来, 假设目标控制轨道为 $\Gamma^* = X_s^* \dots X_e^*$, 从 $X_s^* \in s$ 的邻域 $x_s^* + \delta x_s$ 出发的轨道经过 τ 次迭代后被周期拍返回出发时的邻域 $x_s^* + \delta x_e$, $N\tau$ 次迭代后, $\delta x_{s+N\tau} = A^N \delta x_s$, 令 $N \rightarrow \infty$, 可以算出这条轨道的 Lyapunov 指数

$$L_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \ln \lambda_n^N = \frac{1}{\tau} \ln \lambda_n,$$

这里 λ_n 为矩阵 A 的第 n 个本征值, 可见 $\lambda_n \leq 1$ 是轨道能够被控制的必要条件. 实际上, 我们发现在相

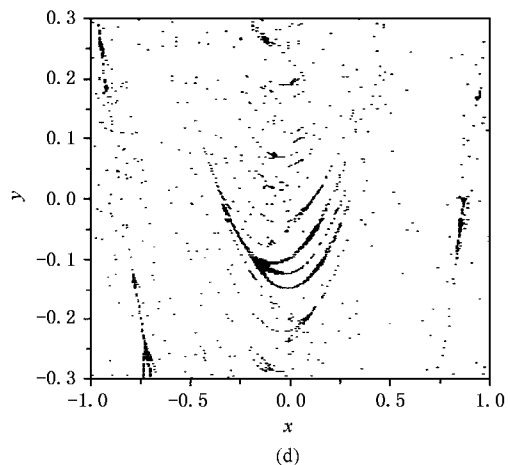
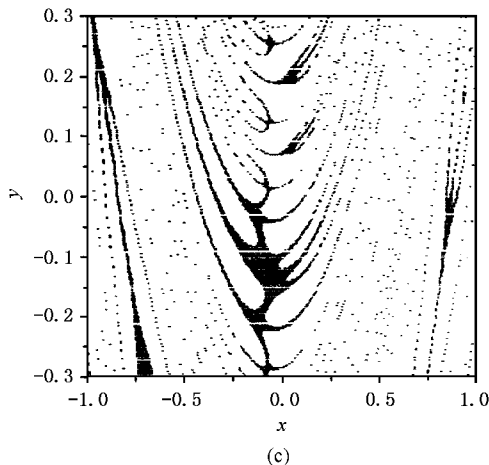
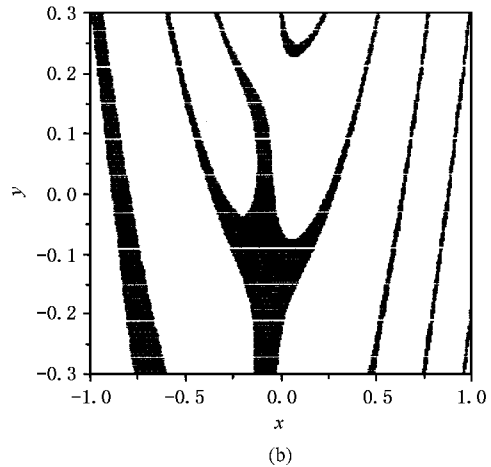


图 2 x_s^* 的邻域 Σ_1 经映象的 τ 次映射被映射成为 x_e^* 的等面积邻域 Σ_2 , s 表示稳定方向, 实际周期拍方向 p 与固定方向 p_0 平行, n 为垂直于 p_0 方向的单位矢量

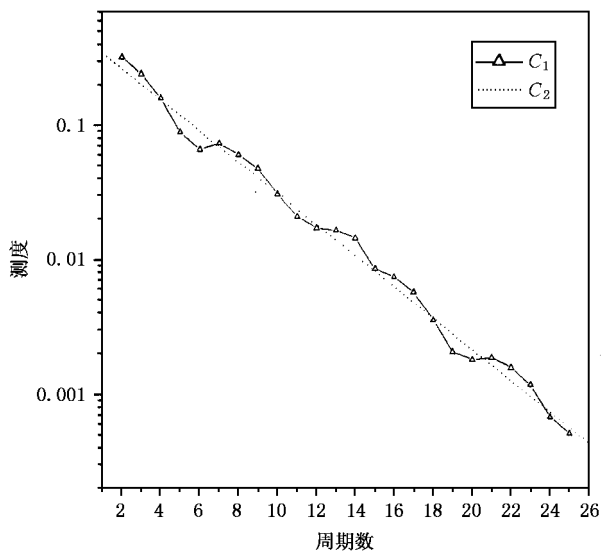


图3 (a)–(d)分别表示2周期、4周期、8周期和12周期轨道满足控制条件的 s 区域。低周期轨道的 s 区域是成片的,在高周期轨道的 s 区域可能具有分形的结构,这说明较低周期的轨道比较容易得到控制

空间中仅存在以下两种区域,一是属于 Γ^* 的流域,从这一区域内出发的轨道(并不要求是在 x_s^* 的邻域)在周期拍的作用下,最终都收敛到 Γ^* 上,在相空间中的另外一些区域中,周期拍的作用将使从这些区域出发的轨道成为发散的。

3 用周期拍方法控制耗散系统的混沌轨道

从上面的分析容易看出,耗散系统由于系统本身的耗散性质,在周期拍作用下,有一部分轨道能‘自动’被稳定到目标周期轨道上。例如二维 Henon 映象

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + 1 - ax_n^2, \\ y_{n+1} &= bx_n, \end{aligned} \quad (8)$$

它是单峰映象的二维推广,为最简单的非平庸二维映象。当 $|b| < 1$ 时它是耗散的,取 $a = 1.4, b = 0.3$,映象有奇怪吸引子。图2表明了各周期轨道满足控制条件的 s 区域。低周期轨道的 s 区域是成片的,在高周期轨道的 s 区域可能具有分形的结构,这说明较低周期的轨道比较容易得到控制。数值计算表明, s 区域的测度随周期数呈指数减小,见图3, C_1 是测度随周期数变化的数值模拟结果, C_2 是线性拟合的结果,其斜率 $\alpha = -0.268$ 。实际控制中,选择 $x_s \in s$,即可以得到 $p = x_s - x_e$,我们发现在一些区域 x_s 与 p 是一一对应的,例如在图3(c)所示的8周期稳定区域内选择 $x_s^* = (-0.1, -0.12)$,有 $x_e^* = (0.79182, -0.00907)$,容易算出 $p = (0.89182, -0.12907)$ 。结果从区间 $\Psi \in [-1.4, 1.4] \times [-0.4, 0.4]$ 内任意点出发的轨道如果 $x_s \in \Phi$ 为

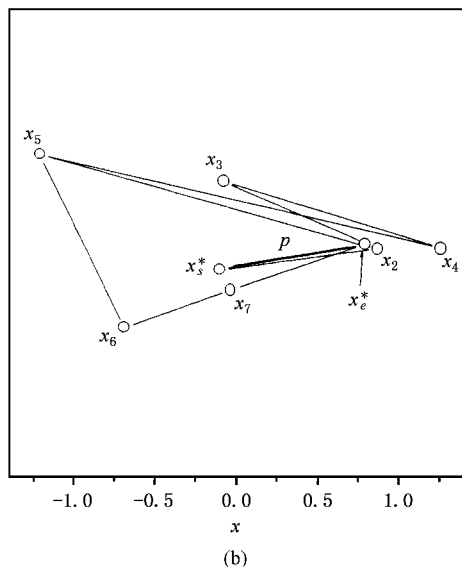
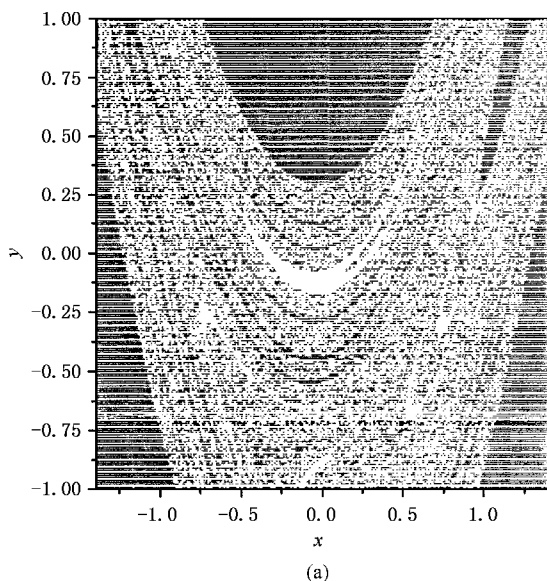


图4 s 区域的测度随周期数呈指数减小, C_1 是测度随周期数变化的数值模拟结果, C_2 是线性拟合的结果,其斜率 $\alpha = -0.268$

图 4 (a) 所示黑色区域), 轨道在周期拍作用下将是发散的, 而在其他的区域 (白色区域, 即 $x_s \in \Psi - \Phi$) 出发的轨道都将被控制在目标周期轨道 Γ^* 上, 如图 4 (b) 所示. 不能排除在同一 p 值对应多个稳定目标轨道的情况, 虽然在 20 周期以内数值计算中尚未发现这种情况.

4 控制保守系统的混沌轨道

对于保守系统, 由于不存在满足 (3) 式条件的 $s < 1$ 的区域, 最多仅存在 $s = 1$ 的区域, 与 $s < 1$ 的区域不同, $s = 1$ 区域内的周期拍控制不是“自动”稳定的, 例如, 在外噪声作用下, 原周期轨道变为绕原周期点附近的椭圆准周期轨道, 当这些椭圆形超出 $s = 1$ 区域, 则失去控制. 为了在整个相空间对轨道进行稳定控制, 可能的选择是反馈控制^[10]. 这里, 我们对周期拍方法进行推广, 在加上作为微扰的反馈项后, 实现对 2 维 Hamiltonian 系统混沌轨道的控制. 对于 2 维保面积映象, 从 τ 次迭代后 Jacobian 矩阵 (见 (7) 式) 可以得出其本征值和本征矢量, 从而确定稳定方向和非稳定方向 (设 s 和 u 分别为相应方向的单位矢量) 以及相应的本征值 λ_s, λ_u . 轨道的稳定

性由余数 $R = \frac{1}{4}(2 - \text{Tr}A)$ 表示, 有三种可能性^[11]:

1) $0 < R < 1$, 轨道是稳定的, A 的本征值是复数. 设 $\lambda_{1,2} = e^{\pm i2\pi\nu}$, $R = \sin^2(\pi\nu)$. 2) $R < 0$, 轨道是不稳定的 $0 < \lambda_s = \frac{1}{\lambda_u} < 1$, 轨道点为普通双曲点. 3) $R > 1$,

轨道不稳定, $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2} < 0$, 轨道点为反演双曲点, 即在两个相反的方向跳跃地远离或逼近不动点. 我们对第二种情况进行讨论. 选择从 x_s^* 点邻域 $x_s = x_s^* + r_0 s$ 点出发的轨道, 经 τ 次迭代后, 其轨道点在 x_e^* 点邻域 $x_e = x_e^* + r_1 s$, 由于 $r_1 = \lambda_s r_0$, 因此 $r_1 < r_0$ ($\lambda_s < 1$). 我们的方法就是用周期拍将其返回到 x_s 点邻域 $X_s' = X_s + r_1 s$, 它比 x_s 点更加靠近 x_s^* . 假设 p 保持不变, 可以算出此时轨道的 Lyapunov 指数分

别为 $L_1 = \frac{\ln \lambda_s}{\tau}$, $L_2 = \frac{\ln \lambda_u}{\tau}$. 由于 $L_2 > 0$, 控制是不稳定的, 它有赖于每次经周期拍返回 x_s 邻域的点都必须精确地保持在 s 方向, 如果 p 是不变的, 它就不能保证在每一次周期拍作用后, 轨道都正确返回 s 方向, 特别是在有外界噪声的情况下, 只要 $\delta X^u \neq 0$, 轨道即在不稳定方向指数发散, 从而失去控制. 要进行稳定控制, 就必须对 p 适当进行调整, 使返回后的

轨道保持在 s 方向, 因此, 控制是有反馈的, 并且将保守系统改变为耗散系统. 如图 5 所示, x_s^* 的邻域 Σ_1 经映象的 τ 次映射被映射成为 x_e^* 的等面积邻域 Σ_2 . 我们首先在 Σ_1 中选择一个单位矢量 s' , 要求它比较靠近 s 方向. 设 $p_0 = x_s^* - x_e^*$ 为不变周期拍的强度, 由于 s' 不在 s 方向, δx_s 与 δx_e 不平行, 因此 p_0 不能将轨道点返回 s' 方向. 现在将 p 调整为

$$p = p_0 + \Delta p, \tag{9}$$

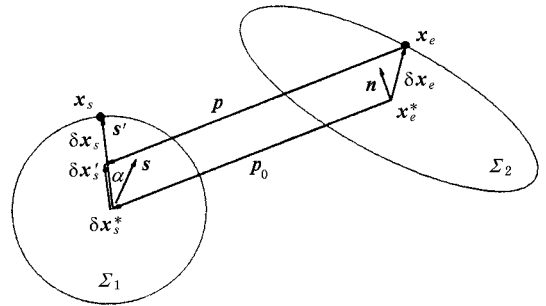


图 5 (a) 在周期拍 $p = (0.89182, -0.12907)$ 作用下 8 周期轨道的发散区域 Φ (b) 从 $x_s \in \Psi - \Phi$ 出发的轨道, 在周期拍 p 作用下, 被控制在目标周期轨道 Γ^* 上

其中 $\Delta p = \delta X_s' - \delta X_e$, $\delta X_s' = \frac{\delta X_e \cdot n}{s' \cdot n} \cdot s'$ (n 为垂直于 p_0 方向的单位矢量, 其他矢量的定义见图, p 与 p_0 方向保持平行) 则可以将轨道点返回 s' 方向. 假设 α 为 s 与 s' 的夹角, u 为对应 λ_u 的不稳定方向的单位矢量, $\delta X_s = r_0 s' = r_0 (\sin \alpha s + \cos \alpha u)$, 在 Jacobian 矩阵 A 的作用下 $\delta X_e = r_0 (\lambda_s \sin \alpha s + \lambda_u \cos \alpha u)$, 经过周期拍 p 返回 Σ_1 , 得到 $\delta X_s' = r_1 s'$, 其中 $r_1 = \chi = \frac{(\lambda_s \sin \alpha \cdot s + \lambda_u \cos \alpha \cdot u) \cdot n}{(\sin \alpha \cdot s + \cos \alpha \cdot u) \cdot n} r_0$, 因此轨道的稳定条件为 $\chi < 1$, 在此条件下, s' 可选择的范围被限制在

$$\alpha_{1,2} = \pm \tan^{-1} \left(\frac{1 - \lambda_s}{\lambda_u - 1} \cdot \frac{s \cdot n}{u \cdot n} \right) \tag{10}$$

规定的区间内. 由于 Δp 依赖 δX_e , 因此是一种反馈控制, 它将系统变为耗散的. 但是经过一定次数的迭代后, Δp 将是非常小的量, 反馈项仅是对无反馈周期拍的微扰. 容易计算出在这种控制下稳定轨道

的 Lyapunov 指数为 $L_{1,2} = \frac{\ln \chi}{\tau} < 0$. 当 $\alpha = 0$ 时, $r_1 = \lambda_s r_0$, 而且 $\delta X_s' = \delta X_e$, $\Delta p = 0$, 因此在一定的时间内, 控制可以是非反馈的, 但是根据前面所做分析, 非反馈的控制是不稳定的, 一旦偏离稳定方向 s , 即需要用 (9) 式的控制使它回到 s 方向. 数值计算表明, 在

控制(9)式的作用下,即使存在外界噪声,也能对系统进行稳定的控制.

例如考虑标准映象(standard map)

$$y_{n+1} = y_n - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x_n \pmod{1}, \quad (11)$$

$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \pmod{1},$$

它是一个重要的保守系统模型.当 k 大于临界值 0.9716354 时,会出现整体混沌.取 $k = 1.1$,选择从相空间 $X_s^* = (0.538, 0.7)$ 出发的轨道¹⁾,经过三次迭代后,得到 $X_e^* = (0.56049, 0.71177)$.如果用非反馈的周期拍 p_0 对系统的控制,系统总的来说仍然是保守的,但是周期拍的作用将原系统的 Hamiltonian 改变为

$$H = \frac{y^2}{2} + k \cos(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) + (p_{0x}y - p_{0y}x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau T), \quad (12)$$

按照前面的分析,具有上述 Hamiltonian 量的系统存在 τ 周期(不稳定)不动点,只有从稳定方向 s 出发的轨道才能被控制,而稳定控制由于具有反馈,将使系统变为耗散系统.下面用(9)式对系统进行控制.映射(11)式将 X_s^* 的邻域映为等面积的 X_i^* ($i = 1, 2, \dots, e$) 邻域,如图 6(a)所示.我们将 X_s 的邻域取为半径是 0.01 的圆,比较 X_e^* 的邻域,可以大致看出稳定或不稳定的方向.轨道的 Jacobian 矩阵

$$A = \prod_{n=1}^3 \begin{pmatrix} 1 - k \cos 2\pi x_n & 1 \\ -k \cos 2\pi x_n & 1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

在给定的初值下,本征值分别为 $\lambda_s = 0.71758, \lambda_u = 1.39357$,归一化的稳定方向的本征矢量为 $\Psi_s = s = (-0.65724, 0.75368)^T$.具体控制方法是:在相空间中选择一条混沌轨道,当它经过 X_s^* 邻域,并且靠近 s 方向时(在(10)式限制的方向内),即进行周期拍的控制.数值计算表明,满足这一条件的轨道容易被稳定在如图 6(b)所示目标周期轨道上.当 s' 分别取稳定方向 $s'_1 = s$ (无反馈)和另一靠近 s 的矢量 $s'_2 = (-0.62569, 0.78007)^T$ 时, Δp 随时间变化具有几乎相同的指数的收敛率,如图 7 所示.图中 C_1 和 C_2 分别表示取 s'_1 和 s'_2 时 $|\Delta p|$ 随周期拍次数的收敛情况,容易看出它们具有指数收敛率.一般经过几十的迭代后, $|\Delta p|$ 已经变得非常小,仅作为微扰项出现.因此可以 p 几乎不再随时间改变.如果 $s' = s$,

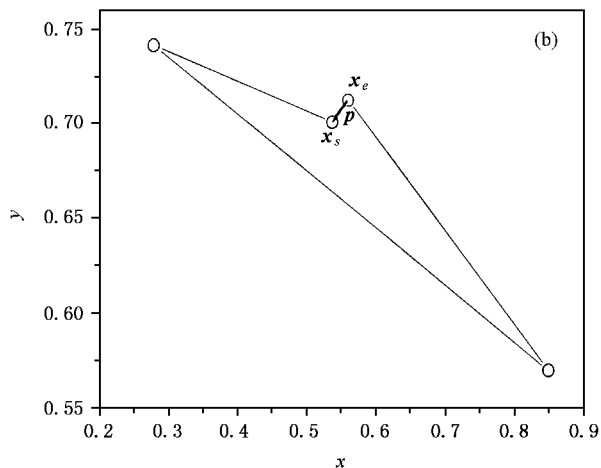
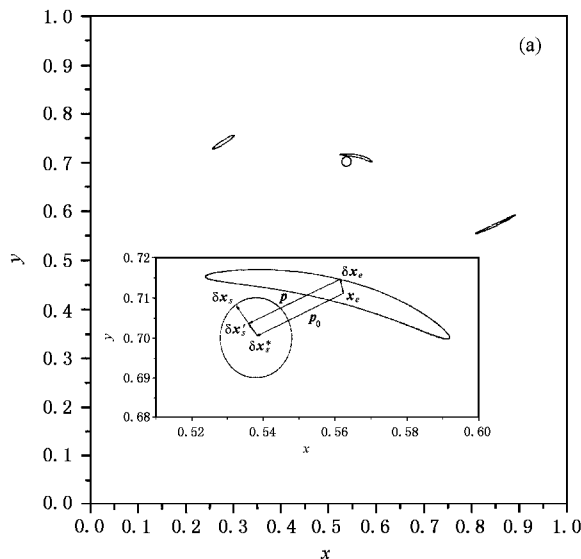


图 6 (a) 映射(9)式将 X_s^* 的邻域映为等面积的 X_i^* ($i = 1, 2, \dots, e$) 邻域.左下角图内是对 X_s^* 和 X_e^* 邻域的放大,实际系统的反馈控制与图 5 中所描述的类似.(b) 通过周期拍的控制,轨道被稳定在目标周期轨道上.

此时可以令(9)式控制项中 $\Delta p = 0$,系统将继续保持被控制的周期状态,但是这种被控制状态是不稳定的.极小噪声的作用都将使系统回到混沌状态.对于 $s' = s'_2$,虽然 $\Delta p \sim 10^{-10}$,但如果此时令 $\Delta p = 0$,轨道仍将是发散的.直观的看,由于非反馈周期拍控制的轨道 Lyapunov 指数有一个大于零的分量,它是不稳定的,而在有反馈的情况下,所有 Lyapunov 指数都小于零,控制是稳定的.

5 噪声的影响

以上讨论表明,周期拍方法可以将保守系统的

¹⁾ 从 X_s^* 点出发的轨道,在不作任何控制的情况下将是混沌的.

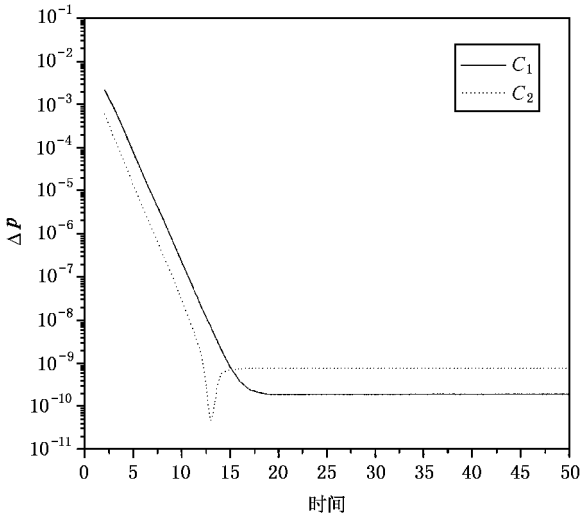


图 7 C_1 和 C_2 分别表示取 s'_1 和 s'_2 时 $|\Delta p|$ 随周期拍次数的收敛情况,容易看出它们具有指数收敛率

整体混沌控制在规则轨道上. 下面讨论在外界噪声影响下控制混沌的鲁棒性,这在实际应用中是重要的. 考虑噪声的影响

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x_n + p_{y_n} + \rho \xi_n \quad \text{mod } 1, \\
 x_{n+1} &= x_n + y_{n+1} + p_{x_n} + \rho \eta_n \quad \text{mod } 1, \quad (14) \\
 \xi_n \xi_{n'} &= \eta_n \eta_{n'} = \delta(n - n'), \quad \xi_n \eta_{n'} = 0, \\
 \xi_n &= \eta_n = 0,
 \end{aligned}$$

上式中 $p_n = p \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{n(k\tau m)} \delta_{n(k\tau m)} = \begin{cases} 1, & m = \tau n \\ 0, & m \neq \tau n \end{cases}, \xi_n$

和 η_n 是通过 Box-Muller 方法^[12]产生的 Gaussian 白噪声,这里 ρ 表示外噪声的强度. 图 8 表明了噪声对系统稳定性的影响,图中横坐标表示周期拍作用的次数,纵坐标表示每次周期拍作用后返回的轨道点 X'_s 与轨道初值点之差 $|X'_s - X_s^*|$. 选择一个较大的时间 t_c ,我们在 $0 \leq t < t_c$ 时进行(9)式的反馈控制,而在 $t \geq t_c$ 时使 $\Delta p = 0$,进行非反馈的控制. 发现如果噪声强度比较小,系统能在稳定轨道上保持较长时间,但是即使只有极小的噪声,比如 $\rho = 10^{-8}$,较长时间后也足以使系统失去控制. 另一方面,在有反馈的周期拍(9)式的作用下,即使存在较大的噪声,也能将系统控制在没有目标周期轨道附近.

6 周期拍方法在三维连续流系统中的推广

对于三维保守系统连续流形的情况,设原系统

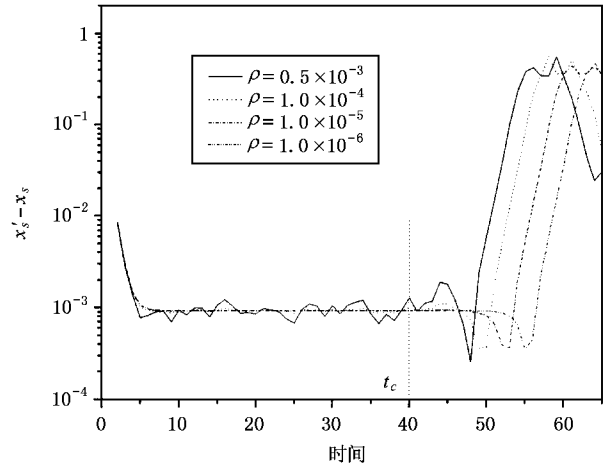


图 8 噪声对系统稳定性的影响,横坐标表示周期拍作用的次数,纵坐标表示每次周期拍作用后返回的轨道点 X'_s 与轨道初值点之差 $|X'_s - X_s^*|$. 在 $0 \leq t < t_c$ 时进行反馈周期拍控制,当 $t \geq t_c$ 时使 $\Delta p = 0$. 如果噪声强度 ρ 比较小,则系统能在稳定轨道上保持较长时间

的 Hamiltonian 为 H ,增加了控制项后,系统的 Hamiltonian 改变为

$$\bar{H} = H + \mathcal{V}(q, p) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (15)$$

由 Hamilton 方程得到

$$\begin{aligned}
 q' &= q + \frac{\partial \mathcal{V}(q, p)}{\partial p}, \\
 p' &= p - \frac{\partial \mathcal{V}(q, p)}{\partial q}.
 \end{aligned} \quad (16)$$

容易看出,非反馈的周期拍方法并不改变系统的保守性质,被控制的系统仍然是保守系统. 控制项 $\mathcal{V}(q, p) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ 中函数 $\mathcal{V}(q, p)$ 和周期 T 可以根据需要而灵活改变. 最简单的情况是 $\mathcal{V}(q, p)$ 为 p, q 的一次函数,即每经过 T 时间使相空间坐标移动一个固定量. 一般情况下,对于连续的三维自治非线性常微分方程,取适当的 Poincaré 截面,可将系统转化成二维映象. 设轨道第 n 次通过 Poincaré 截面的时刻和位置分别为 t_n, x_n ,一般情况下, $t_{n+1} - t_n$ 与 x_n 有关,并非固定常数,只有少数情况(例如周期驱动 Hamiltonian 系统) $t_{n+1} - t_n = T$ 与 x_n 有关. 文献 9 用周期拍 $p \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_n)$ (周期脉冲强度 p 固定不变且被限制在 Poincaré 截面内)方法对保守系统混沌轨道进行控制,它需要知道轨道每次通过 Poincaré 截面的时刻,因此利用 Poincaré

截面的周期脉冲方法实际上是耗散的,控制项的加入使整个系统变为耗散的.为了更好地说明控制的耗散性,假设 t_1 时在 Poincaré 截面取 S_1 ,当 t_2 时 $S_1 \rightarrow S_2$,因为保守系统具有保面积性,因此 $S_1 = S_2$,但是, S_2 在 Poincaré 截面上的投影 $S_3 < S_2$,见图 9.按照第二节分析,可以在 Poincaré 截面上用无反馈的周期拍方法进行控制.问题的关键是从 S_1 出发的点不一定能同时到达 S_3 (如文献 [9] 的情况),如果所有从 S_1 出发的点都同时到达 S_3 (如周期驱动 Hamiltonian 系统),则该方法不能对周期驱动 Hamiltonian 系统的混沌轨道进行控制.

在本章讨论的方法中,我们选择了固定时间间隔的周期脉冲.为了实现稳定控制,必须对脉冲强度进行反馈调节,因此控制项是耗散的.这一方法

适用于周期驱动 Hamiltonian 系统,也适用于其他连续流形混沌轨道的控制.

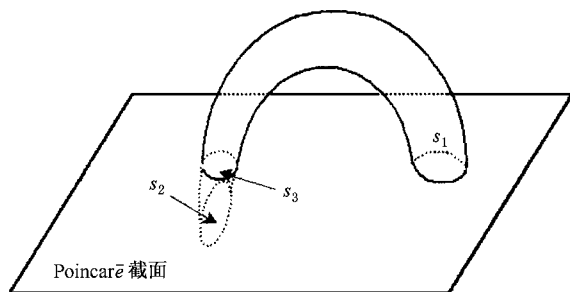


图 9 从 S_1 出发的轨道不一定同时落在 S_3 ,因此有可能 $S_1 > S_3$,如果同时到达 S_3 ,则 $S_1 = S_3$,无法用无反馈周期拍稳定控制(为简单起见,图中只画出了半个周期的情况)

[1] E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 1196.
 [2] W. L. Ditto, S. N. Rauseo, M. L. Spano, *Phys. Rev. Lett.*, **65**(1990), 3211.
 [3] E. R. Hunt, *Phys. Rev. Lett.*, **67**(1991), 1953.
 [4] R. Roy, T. W. Murphy, Jr., T. D. Maier, Z. Gills, *Phys. Rev. Lett.*, **68**(1992), 1259.
 [5] V. Petrov, V. Gaspar, J. Masere, K. Showalter, *Nature* (London), **361**(1993), 240.
 [6] A. Garfinkel, M. L. Spano, W. L. Ditto, J. Weiss, *Science*, **257**(1993), 1230.

[7] K. Pyragas, *Phys. Lett.*, **A170**(1992), 421.
 [8] J. E. S. Socolar, D. W. Sukow, D. J. Gauthier, *Phys. Rev.*, **E50**(1994), 3245.
 [9] W. Li et al., *Acta Phys. Sinica.*, **48**(1999), 581 (in Chinese) [李伟等, *物理学报* **48**(1999), 581].
 [10] Y. Zhang et al., *Phys. Rev.*, **E61**(2000), 7219.
 [11] L. E. Reichl, *The Transition to Chaos* (Springer-Verlag, Berlin, 1992).
 [12] W. H. Press, Bk. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, New York, 1986).

CONTROLLING CHAOTIC OF THE NONLINEAR SYSTEM VIA PERIODS PULSES^{*}

LI WEI^{1,2)} CHEN SHI-GANG¹⁾

¹⁾*(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China)*

²⁾*(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)*

(Received 16 March 2001 ; revised manuscript received 12 May 2001)

ABSTRACT

An essential condition for controlling dissipative systems has been obtained via an analysis of the dynamical character of open-loop periods pulses, at the same time, we extend the applied range of the periods pulses. After a close-loop perturbation is added, a method for controlling global chaotic in two-dimensional Hamiltonian systems is proposed in a model of the standard map. The method is robust under the presence of weak external noise.

Keywords : controlling chaos, conservative systems

PACC : 0545

^{*} Project supported by the special funds for major state basic research projects, by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19920003), and by the Science Funds of China Academy of Engineering Physics (Grant No. 20000440).