

超强激光场等离子体中电子纵向运动的研究*

何 斌 常铁强 张家泰 许林宝

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(2000 年 9 月 20 日收到 2001 年 5 月 20 日收到修改稿)

在数值求解一维 Maxwell 场方程和流体运动方程的基础上, 得到了超强激光场下等离子体中电子纵向运动的行波解, 并分析了等离子体静电场对电子纵向运动的影响.

关键词: 等离子体, 相对论, 电子, 超强激光场

PACC: 5225, 5235, 4720

1 引 言

近年来随着激光脉冲技术的重大进展, 产生了超高强度(功率密度大于 10^{18} W/cm²)的超短激光脉冲. 这样的脉冲与等离子体相互作用揭示了新的物理现象, 形成了许多新的有重要意义和潜在应用价值的研究课题. 超强激光等离子体相互作用的主要特征是很强的有质动力和相对论效应. 在非相对论的激光场下, 电子的运动以横向运动为主, Lorentz 力几乎可以忽略, 激光直接驱动的电子的纵向运动并不重要. 然而超强激光脉冲在短暂的一个激光周期内, 电子的速度可以加速到接近光速. 对圆极化光而言, 电子将在极化面上作圆周运动, 纵向 Lorentz 力可以不予考虑. 而对线极化光, 此 Lorentz 力很大, 电子的纵向运动变得十分重要.

早在 50 年前, 人们就已经找到了真空中线极化激光场作用下电子纵向运动的解析解^[1]. 电子的运动方程如下

$$\begin{aligned} \frac{dP_x}{dt} &= -\frac{eP_y B_z}{m_e c \gamma}, \\ \frac{dP_y}{dt} &= -eE_y + \frac{eP_x B_z}{m_e c \gamma}, \end{aligned} \quad (1)$$
$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{P_x^2 + P_y^2}{m_e^2 c^2}}.$$

这里 x 代表激光传播方向, 激光场的极化沿 y 方向, 其矢势为 $A_y = a_0 \sin \theta$, $\theta = k_0 x - \omega_0 t$ (k_0 与 ω_0 分

别表示光波的波矢与频率), P_x 和 P_y 分别表示电子的纵向和横向动量, m_e 为电子的静止质量, c 为光速, $-e$ 为电子电荷, E_y 和 B_z 分别表示激光电场和磁场强度. 可以精确求解上述方程, $P_y = \frac{e}{c} A_y$. 如果

假定 $P_x(\theta = \frac{\pi}{4}) = 0$, 可得

$$P_x = -\frac{a_0^2}{4\sqrt{1 + a_0^2/2}} \cos 2\theta, \quad (2)$$

由此电子的轨道在其纵向平均速度的参照系下是一个“8”字形. 如果等离子体密度 n_e 十分稀薄 ($n_e \ll n_c$, n_c 为临界密度), 那么等离子体中静电场(沿纵向)的影响较小, 上述解是近似有效的. 在较稠密的等离子体中, 电子的纵向运动将引起较强的静电场, 问题变得复杂得多, 但对这一点人们一直非常感兴趣. 在均匀等离子体中, 最早提出并讨论此问题的是 Akhiezer 和 Polovin^[2]. 他们导出了相应的运动方程, 但在线极化情形下, 只针对稀薄等离子体和近临界密度等离子体两种情况进行了讨论. 70 年代 Kaw 和 Dawson^[3]作了类似的讨论, 但也未讨论一般情形下的求解. 后来有人提出^[4]通过 Lorentz 变换, 变换到入射光波的群速度参照系下, 此时所有的物理量都只是时间的函数, 问题的求解能较为简化. 由此 Decoster^[5]在特定的近似条件下讨论了相关运动方程的求解. 在激光场不太强时, 作微扰展开; 在较一般的情形下作准横波近似, 得到了一些较好的结果. 然而他的结果只考虑了电子纵向运动的二倍频分

* 国家高技术 ICF 主题及其青年基金、国家自然科学基金(批准号: 19735002)和中科院科学技术基金(批准号: 980226)资助的课题.

量,未能很好体现静电场的调制作用,而且得到的横向正则动量也不守恒. 80 年代末 Shivamoggi^[6]讨论了运动方程的求解,然而他作了一些近似,其结果难于在一般情形下成立. 最近 Borovsky 等人^[7]也研究了类似的问题,在均匀稀薄等离子体中数值求解了相应的运动方程,显示出等离子体对激光场的调制作用,然而未给出较好的解析结果. 另外有人用简谐振子的回复力代表静电力,对电子的纵向运动作了一些分析^[8,9]. 总的来说目前对此基本问题的认识是不够清楚的. 本文将针对此问题进行讨论,寻找其近似的解析解,这将有助于深入认识电子纵向运动及相关的各种物理问题.

本文暂不考虑受激散射过程对电子纵向运动的影响以及电子的辐射效应,并假定离子不动,电子等离子体温度很低,可以忽略热压力(相对于强场有质动力). 我们将在数值求解有关方程的基础上构造近似解析解,寻找电子纵向运动的行波解.

2 模型的建立和数值求解

由于等离子体静电场的存在,电子的纵向运动将会受到很大的调制,不再是简单的二倍频形式. 电子的横向动量仍为 $P_y = \frac{e}{c}A_y$. 有关的场方程和电子纵向运动方程如下

$$\begin{aligned} \frac{dP_x}{dt} &= -eEx - \frac{eP_y B_z}{m_e c \gamma}, \\ \frac{\partial Ex}{\partial t} &= 4\pi e(n_0 - n_e), \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_x n_e) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$v_x = \frac{P_x}{m_e \gamma}.$$

这里 n_0 为离子的电中性背景密度. 下面来寻找其行波解. 假定所有物理量都是 θ 的函数,可从上述方程得到

$$\begin{aligned} \frac{dP_x}{d\theta} \left(1 - \frac{k_0 P_x}{\omega_0 m_e \gamma}\right) &= \frac{k_0 c}{2\omega_0 \gamma} a_0^2 \sin 2\theta \\ &- \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \int_{\phi}^{\theta} \frac{P_x}{\gamma} \left(1 - \frac{k_0 P_x}{\omega_0 m_e \gamma}\right)^{-1} d\theta. \end{aligned} \quad (4)$$

这里 $\gamma = \sqrt{1 + \alpha_0^2 \sin^2 \theta + \frac{P_x^2}{m_e^2 c^2}}$, $\omega_p^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m_e}$. 取初条件 $P_x(\theta = \phi = \frac{\pi}{4}) = 0$, 在稀薄等离子体中, 激光场有

如下色散关系

$$\omega_0^2 = \frac{\omega_p^2}{\gamma_0} + k_0^2 c^2, \gamma_0 = \sqrt{1 + a_0^2/2}. \quad (5)$$

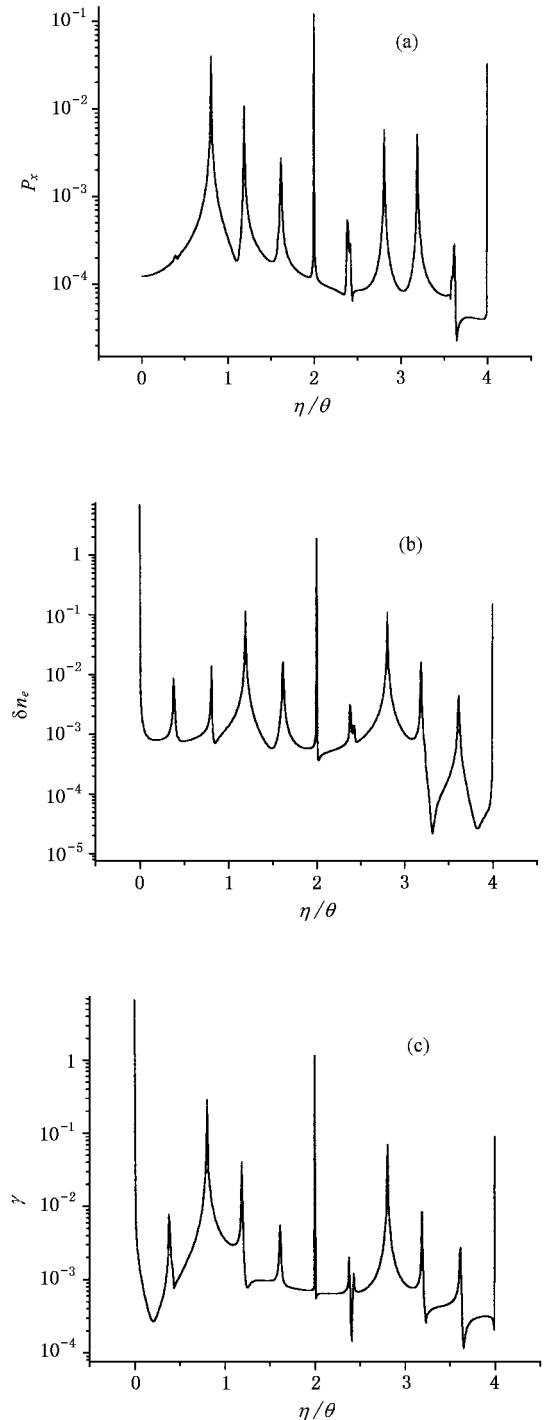


图 1 (a) 纵向动量 P_x 的频谱图 (b) 电子密度变化 δn_e 的频谱图 (c) 相对论因子 γ 的频谱图

方程 (4) 是一个非线性常微分积分方程, 要直接求解十分困难. 但可以数值求解, 并对解作傅氏分析. 有关结果显示在图 1(a)–(c) 中. 图中横坐标为位

相 γ (以 θ 为单位) 纵坐标分别为 P_x (图 1(a)), δn_e (图 1(b)) 和 γ (图 1(c)) 的傅氏变换值. $\delta n_e = n_e - n_0$. 可以看出:

1) P_x 有常数项, θ_p 项 ($\theta_p = k_p \theta$, k_p 待定, 它与 ω_p/ω_0 及 a_0 有关) $2\theta_p$ 项, 2θ 项, 4θ 项, $2\theta \pm \theta_p$ 项, $2\theta \pm 2\theta_p$ 项和 $4\theta \pm \theta_p$ 等项. 但主要的分量是: θ_p 项, 2θ 项, 4θ 项, $2\theta \pm \theta_p$ 项.

2) P_x 以 2θ 项为主, 在绝大多数情况下它比其他分量要大好几倍.

3) γ 以常数项和 2θ 项为主.

4) P_x 和 2θ 与 4θ 分量中, 正弦函数部分与余弦函数部分相比非常小.

有了上述结果, 我们可以寻找 P_x 的主要部分.

3 纵向运动近似解析求解

在上述结果基础上, 我们取以下近似解析解形式:

$$P_x = c_0 + a_1 \cos \theta_p + b_1 \sin \theta_p + a_2 \cos 2\theta + a_3 \cos(2\theta + \theta_p) + b_3 \sin(2\theta + \theta_p) + a_4 \cos(2\theta - \theta_p) + b_4 \sin(2\theta - \theta_p) + a_5 \cos 4\theta, \quad (6)$$

代入方程(4)展开, 忽略除包括 a_2 外的所有系数的乘积, 比较两端对应系数项, 并利用初条件可得

$$a_2 = -\frac{k_0 a_0^2}{4\gamma_0 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}}, \quad (7)$$

$$a_5 = \frac{4a_2 k_0 + \frac{a_0^2}{\gamma_0} + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{a_0^2}{4\gamma_0}}{16\gamma_0 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}} a_2, \quad (8)$$

$$c_0 = \frac{a_2}{2\gamma_0} \left(\frac{a_0^2}{4\gamma_0} - k_0 a_2 \right), \quad (9)$$

$$k_p^2 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 \gamma_0}, \quad (10)$$

$$a_1 = \frac{B_1(c_0 - a_5) - 2\omega B_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \quad (11)$$

$$b_1 = \frac{-A_1(c_0 - a_5) + 2\omega A_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \quad (12)$$

$$a_3 = \frac{u}{2 + k_p} a_1, \quad a_4 = \frac{v}{2 - k_p} a_1, \quad (13)$$

$$b_3 = \frac{u}{2 + k_p} b_1, \quad b_4 = -\frac{v}{2 - k_p} b_1. \quad (14)$$

这里

$$w = -\frac{a_0^2}{4\gamma_0} - k_0 a_2, \quad u = \frac{sb - (2 + k_p)a_2 k_0 k_p/2}{k(2 + k_p)^{-1} - \gamma_0(2 + k_p)},$$

$$v = \frac{sb + (2 - k_p)a_2 k_0 k_p/2}{k(2 - k_p)^{-1} - \gamma_0(2 - k_p)}.$$

$$A_1 = (u - k_p - v) \sin \beta,$$

$$B_1 = -(u - k_p - v) \cos \beta,$$

$$A_2 = \cos \beta - \left(\frac{u}{2 + k_p} - \frac{v}{2 - k_p} \right) \sin \beta,$$

$$B_2 = \sin \beta + \left(\frac{u}{2 + k_p} - \frac{v}{2 - k_p} \right) \cos \beta.$$

其中

$$s \equiv \frac{\omega}{2\gamma_0}, \quad b \equiv \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}, \quad \beta \equiv \frac{k_p \pi}{4}.$$

至此我们定出了各项系数, 同时定出了 k_p . 不难验证, 当 $\omega_p = 0$ 时上述解回到真空解. 下面将对此解与数值解的结果进行比较, 并对它各部分及总的物理意义等进行分析讨论.

4 讨论和结论

首先来看此非线性解的可信程度. 经对其与数值解的结果进行比较发现

1) 当 $k_p < 0.5$ 时, a_2 的误差小于 2%, 其他项的误差小于 5%.

2) 当 $k_p < 0.9$ 时, a_2 的误差小于 5%, 其他项的误差小于 10%.

3) 当 $k_p \geq 0.9$ 时, a_2 的误差小于 7%, 其他项的误差小于 30%.

由此可见此解是可靠的, 它描述了电子纵向运动的主要部分. 至于误差产生的原因, 是在近似解法上的一些简化造成的. 如在求解中认为 a_2 比其他项大得多, 忽略了其他项之间的乘积, 这在 k_p 较小时是合理的, 然而当 k_p 较大如接近于 1 时, 其他项与 a_2 较接近, 这样做就不太合理了, 然而要合理求解需要解多个未知数的高次代数方程组, 难以得到解的解析表达式. 有趣的是当 k_p 接近 1 时, 意味着电子等离子体频率 ($k_p \omega_0$) 接近激光频率, 激光波矢 k_0 接近 0, 在等离子体中激光磁场非常小, 纵向的 Lorentz 力和静电场都变得很弱, 结果此时电子纵向动量变得很小 (见方程(4)), 电子运动主要是横向的.

其次来看纵向运动解中每部分的由来. 激光场

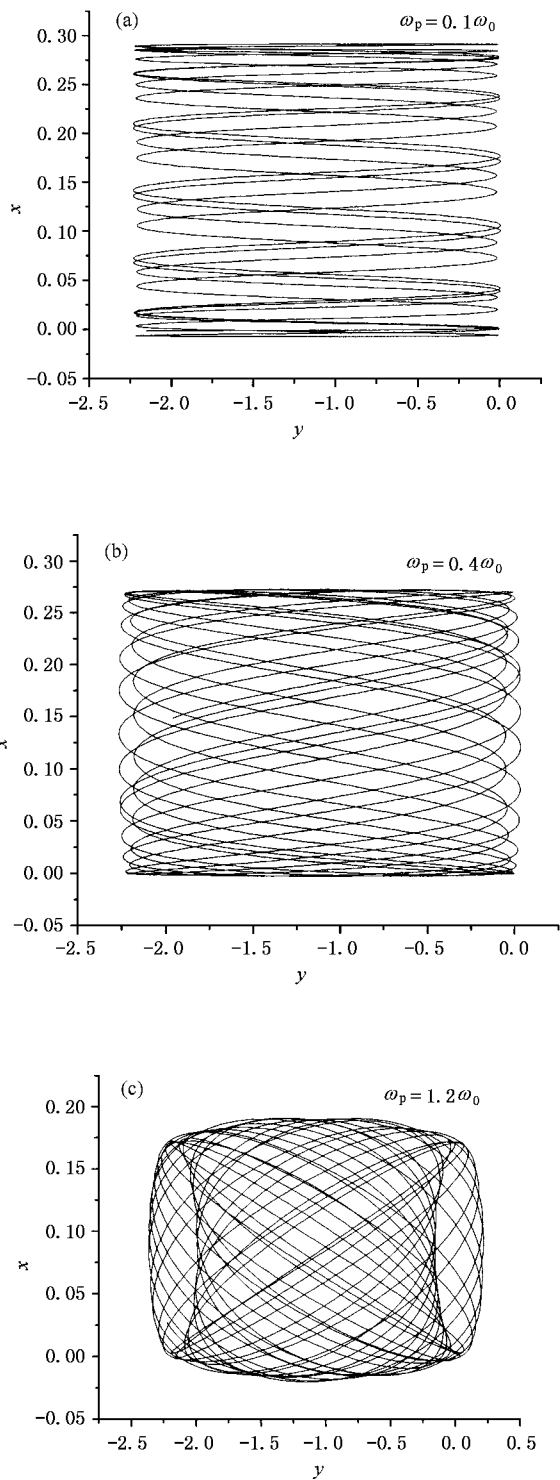


图 2 不同等离子体频率 ω_p 下的电子空间轨道图 ($a_0 = 0$, 只取电子纵向动量 $P_x(\theta_p)$ 部分, x 是在电子纵向平均速度参考系下的位移)

纵向运动,产生 $2\theta \pm \theta_p$ 项,在多数情况下它们比 θ_p 项小得多,如果激光强度和等离子体密度更高,更多的耦合就会形成,产生出更复杂的纵向运动项.另外 $k_p \omega_0$ 代表等离子体有效频率,它和相对论因子 γ 有关.

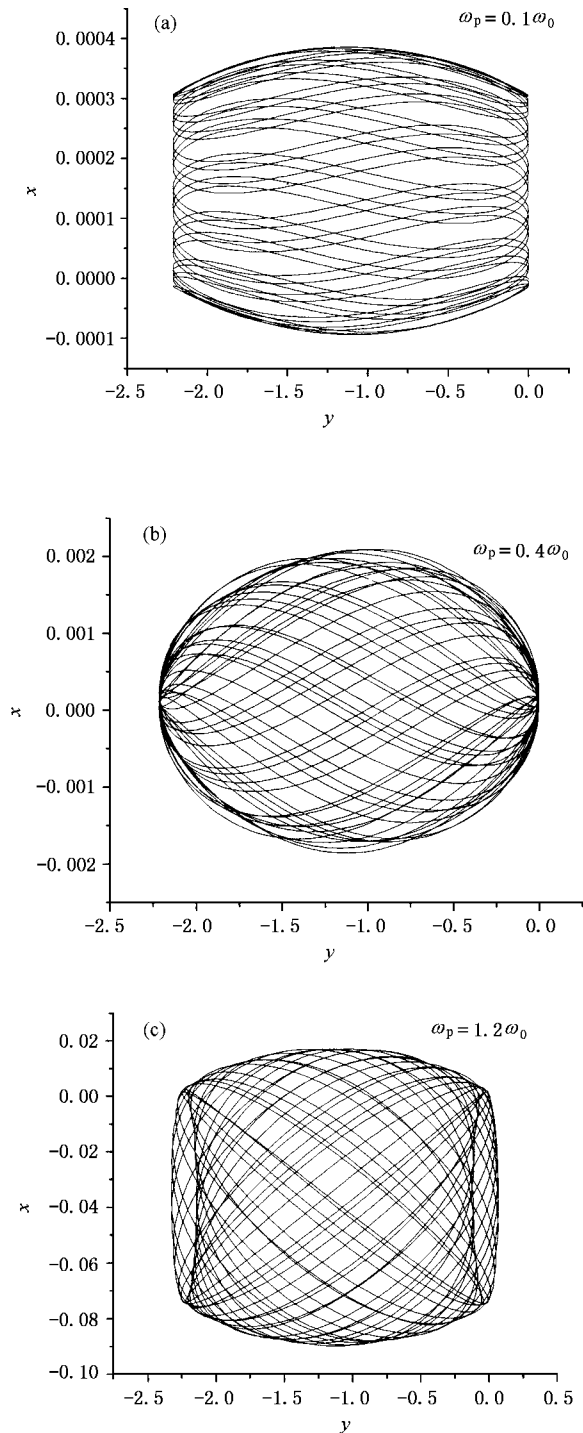


图 3 与图 2 相似,不同的是只选取电子纵向动量 $P_x(2\theta - \theta_p)$ 部分

的纵向 Lorentz 力产生二倍频项 a_2 (4) 式右端第二项的非线性行为产生四倍频项 a_5 ; θ_p 项相应于等离子体本征振荡,它与二倍频项的耦合的结果是调制

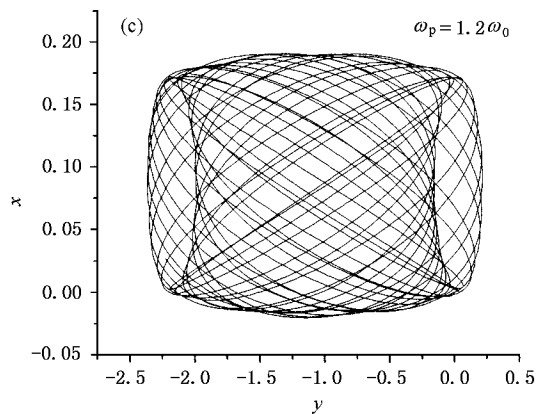
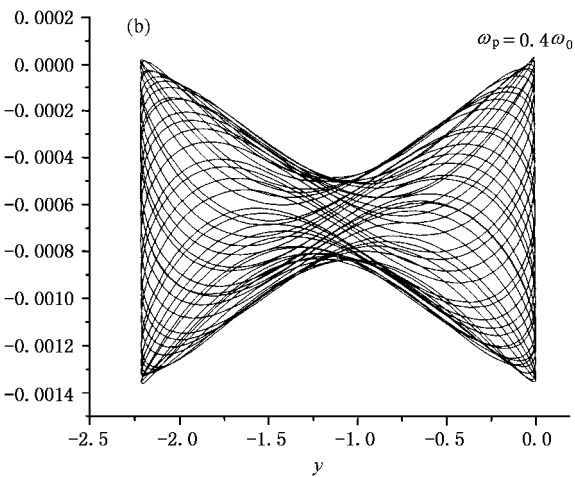
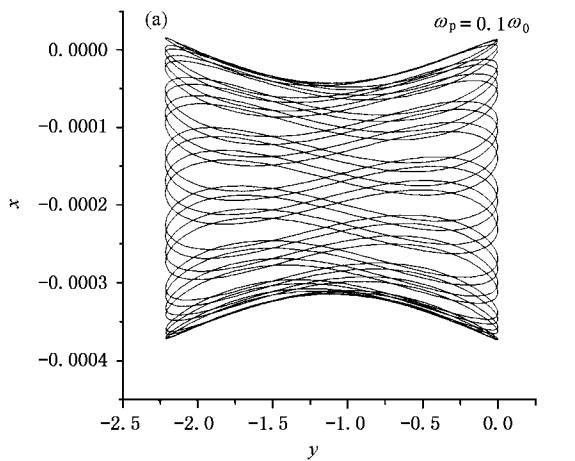


图 4 与图 2 相似,不同的是只选取 $P_x(2\theta + \theta_p)$ 部分

根据此纵向运动解,可以画出其中每部分单独所引起的电子空间轨道图,见图 2—4,这是在其各部分相应的纵向平均速度参照系下画的,所有图的横坐标表示电子的纵向位置 x ,纵坐标表示横向位

置 y (x 和 y 已无量纲化,以 c/ω_0 为单位),激光场振幅 $a_0 = 2.0$;每个图有三个子图,分别对应于电子等离子体频率 $\omega_p = 0.2\omega_0, 0.4\omega_0$ 和 $1.2\omega_0$.很显然由二倍频项 a_2 所得到的应当是一个“8”字形(未画出),由四倍频项 a_4 所得到的应是一个双“8”字形.由与 θ_p 有关项 $P_x(\theta_p)$ 项(即 $a_1 \cos\theta_p + b_1 \sin\theta_p$)得到的见图 2(a)—(c),可看出当 ω_p 较小时,电子在 y 方向已振荡好几个周期后,在 x 方向才振荡一个周期.而随着 ω_p 的增加,电子在 x 方向振荡加快;当 $\omega_p = 1.2\omega_0$ 时(即 $k_p \approx 1$),它沿两个空间方向几乎以同样的频率振荡,空间轨道图是椭圆,只是其偏转方向在不断变化而已.由 $P_x(2\theta - \theta_p)$ 项(即 $a_4 \cos(2\theta - \theta_p) + b_4 \sin(2\theta - \theta_p)$)得到的见图 3(a)—(c),可看出当 ω_p 较小时,空间轨道接近不断扭曲的“8”字形.随着 ω_p 的增加它扭曲得更加厉害;而当 $\omega_p = 1.2\omega_0$ 时,即 $2\theta - \theta_p \approx \theta$,空间轨道图变为椭圆.由 $P_x(2\theta + \theta_p)$ 项(即 $a_3 \cos(2\theta + \theta_p) + b_3 \sin(2\theta + \theta_p)$)得到的见图 4(a)—(c),可以看出当 ω_p 较小时,空间轨道接近不断扭曲的“8”字形,只是扭曲的方向变了.随着 ω_p 的增加它扭曲得更加厉害;而当 $\omega_p = 1.2\omega_0$ 时,即 $2\theta + \theta_p \approx 3\theta$,空间轨道图变为一个半的“8”字图,只是中间一处特别狭窄.而对于总的空间轨道图(见图 5(a)—(c)),可以看出当 ω_p 不大时,它仍以“8”字形为主,只不过由于电子等离子体波的影响,这“8”字形在来回移动,这说明此时 P_x 中仍以二倍频项 a_2 为主,而当 ω_p 增加时,轨道图变得较为复杂.若 $k_p (= \frac{\omega_p}{\omega_0 \gamma_0^{1/2}})$ 是一个无理数,总的 P_x 不再是周期函数,空间轨道也不再是周期性的,其中心会有一个小漂移,见图 5(d).

现在来看纵向运动解与电子等离子体波的关联.方程(4)右面的静电场部分(第二项)是由电子密度涨落 δn_e 引起,这里 $\delta n_e = \frac{\beta_x n_0}{v_{ph} - \beta_x} e^{i\beta_x x}$, $v_{ph} = \frac{\omega_0}{k_0}$.这意味着在等离子体中存在与电子纵向动量位相一致的电子密度涨落和电子等离子体波,其中仍以二倍频项和 θ_p 项为主,二倍频项与高次谐波的产生有关^[10]. θ_p 项产生 $2\theta \pm \theta_p$ 位相的电磁波,这在我们以后的工作中会仔细讨论.值得注意的是这样产生的电子等离子体波,其相速度与激光光波的一致,它在 SRS(受激拉曼散射)发生不了的密度区

域 ($\omega_p > \omega_0 \kappa_p / 2$) 会起主要作用.

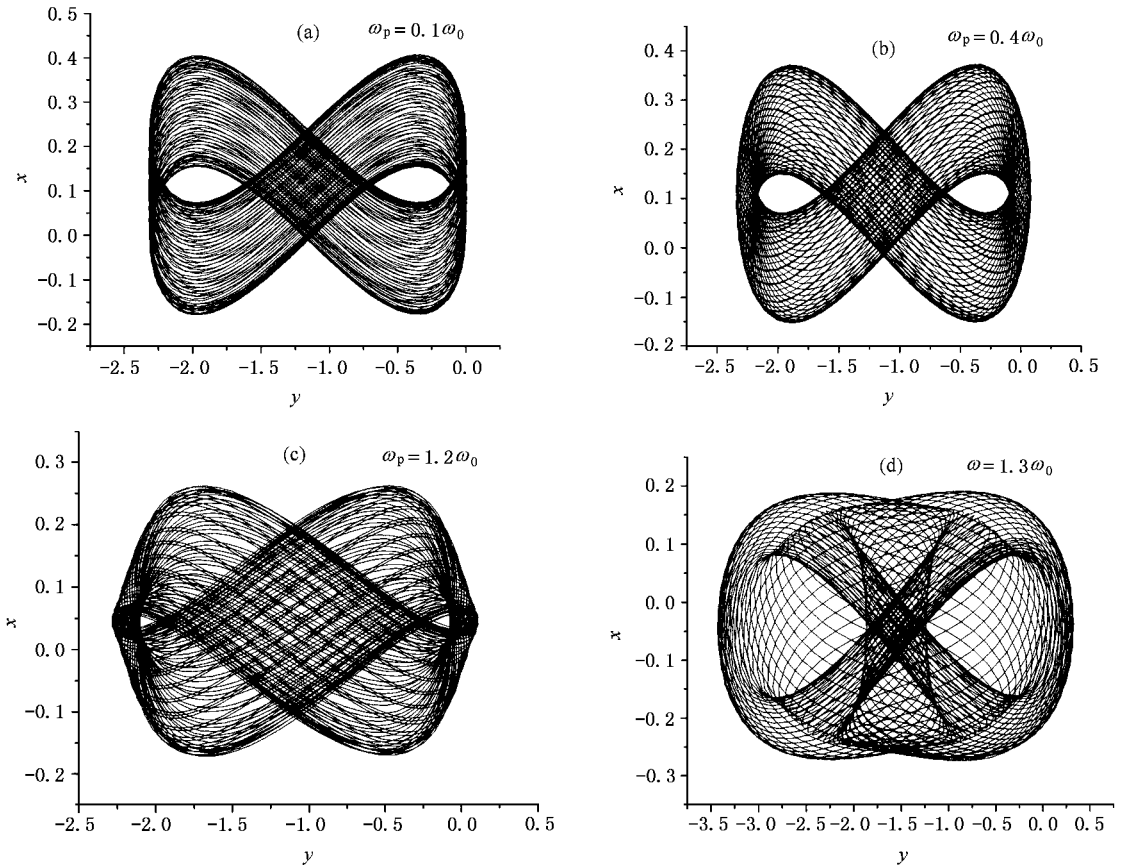


图 5 与图 2 相似,不同的是选取 P_x 的所有分量

另外与 Sprangle 等人的工作^[10]相比,可发现我们的出发点(方程(4))与其作准静态假定得到的方程是完全一致的,只是形式不同而已, P_x 的初始条件也是同样的.本质上都是近似认为 n_e , P_x 和 γ 与时间无关,仅是位相的函数.实际上激光在等离子体中传播时,其振幅会随时间变化,此时要严格求解较为困难,不过我们所得到的解仍能反映 P_x 的主要行为.

总之,我们找到了强场下均匀等离子体中电子

纵向运动的近似解析解,分析了其中每个主要部分的形成原因;与前人的工作相比,我们的结果适用于大多数情况,得到了强场下等离子体中特有的一些电子等离子体波.数值计算表明电子的空间轨道不再是纯粹的“8”字形,当电子密度比较小时是一些“8”字形的叠加,而当电子密度较高时图形较为复杂,而且其轨道中心在逐渐漂移.

本文作者何斌感谢与郑春阳博士的多次有益讨论.

- [1] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Pergamon Press, 1975).
- [2] A. I. Akhiezer, R. V. Polovin, *Sov. Phys. JETP*, **2**(1956), 696.
- [3] P. Kaw, J. Dawson, *Phys. Fluids*, **13**(1970), 472.
- [4] B. B. Winkles, O. Eldridge, *Phys. Fluids*, **15**(1972), 1790; P. C. Clemmow, *J. Plasma Phys.*, **12**(1974), 247; P. C. Clemmow, *J. Plasma Phys.*, **13**(1975), 231.
- [5] A. Decoster, *Phys. Rep.*, **47**(1978), 286.
- [6] B. K. Shivamoggi, *Introduction to Nonlinear Fluid-Plasma Waves* (Kluwer Academic Publishers, 1988).
- [7] A. V. Borovsky *et al.*, *Phys. Rev.*, **E59**(1999), 2253.
- [8] J. M. Rax, N. J. Fisch, *Phys. Fluids*, **B5**(1993), 2578.
- [9] J. M. Bardsley *et al.*, *Phys. Rev.*, **A40**(1989), 3823.
- [10] P. Sprangle, E. Esarey, A. Ting, *Phys. Rev.*, **A41**(1990), 4463; E. Esarey, A. Ting, P. Sprangle, D. Umstadter, X. Liu, *IEEE Transaction on Plasma Science*, **21**(1993), 95.

INVESTIGATION OF THE LONGITUDINAL MOTION OF ELECTRONS IN THE PLASMAS WITH ULTRA-INTENSE LASER PULSE*

HE BIN CHANG TIE-QIANG ZHANG JIA-TAI XU LIN-BAO

(*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics , Beijing 100088 , China*)

(Received 20 September 2000 ; revised manuscript received 20 May 2001)

ABSTRACT

On the basis of numerical solution of Maxwell equations and fluid motion equations in 1-dimension , it is obtained that the travelling wave-solution of the longitudinal motion equation of electrons in the plasmas with ultra-intense laser pulse. The influence of electro-static field in the plasmas on the longitudinal motion is also analyzed.

Keywords : plasma , relativity , electron , ultra-intense laser pulse

PACC : 5225 , 5235 , 4720

* Project Supported by the National High-Tech. ICF Committee in China and National Youth Foundation of High Technology , by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19735002) , and by the Science and Technology Funds of CAEP (Grant No. 980226).