第 50 卷 第 10 期 2001 年 10 月
1000-3290/2001/50(10)/1946-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.50,No.10,October,2001

欠稠密等离子体中诱发的偶次相对论谐波

曾贵华[1)] 诸鸿文[1)] 徐至展[2)]

[1)](上海交通大学电子工程系,上海 200030)

[2)](中国科学院上海光学精密机械研究所,上海 201800)

(2000 年 12 月 4 日收到;2001 年 4 月 23 日收到修改稿)

在自生磁场或背景磁场的作用下,等离子体被磁化.磁化后的欠稠密等离子在超强激光的辐射下诱发相对论相干谐波辐射.由于磁场的影响,诱发的相对论相干谐波辐射中产生偶次谐波辐射.从理论上研究了这一现象,导出了谐波辐射的一般性方程,并特别研究了二次谐波辐射的有关参数.

关键词:二次谐波辐射,自生磁场,强激光,欠稠密等离子体

PACC:5240D,4265K,5260

1 引 言

产生高次谐波的方式有多种[1—6],例如,激光与原子相互作用因原子效应而产生谐波[2];激光强度在电离阈值附近因电离效应而诱发谐波[3].相对论相干谐波辐射是最近发现的一种谐波辐射机制[4—6],由超强激光与等离子体相互作用产生.强激光在等离子体中传播时,如果激光强度很强,如 10^{18} W/cm^2(实验上已实现),等离子体中的电子的运动速度接近光速,其相对论效应必须考虑;另外,由光场包络造成的有质动力亦不可忽略.相对论和有质动力效应,造成电子运动的强非线性,这种非线性效应及等离子体的集体相干运动激发相对论相干谐波辐射.

当一束细激光束在等离子体中传播时,强激光在等离子体中引起一准静态磁场[7—9],产生的自生磁场使等离子体磁化,这一效应等价于强激光束在磁化等离子体中的传播.诱发的自生磁场在强激光与等离子体的相互作用中产生新的效应和现象.例如对超热电子的产生[10—11]、激光束传输[12,13]、激光点火[14,15]等现象都将产生一定程度的影响.

通常认为,欠稠密等离子体在强激光的辐射下无偶次谐波产生[1,4,5],因为在这种情况下,由于电子横向相对论运动的对称性使得引起的电流密度只有奇次分量.这是在没有考虑强激光与欠稠密等离子体相互作用产生的自生磁场时得出的结论,当考虑这一效应,或者预先对欠稠密等离子体磁化时,情况将发生变化.本文研究了这个问题,发现磁场的作用导致偶次谐波辐射,并研究了二次谐波辐射.

相对论谐波辐射是强激光等离子体集体相互作用中重要的前沿课题之一,在做为相干短波长辐射源中,高阶谐波以其短波长特性及其与基波相同的相干性,被认为是做为实现 X 射线激光的一条重要途径.而偶次谐波(特别是二次谐波)在等离子体加速和等离子体诊断中亦起着重要的作用,与 ICF 亦有着紧密的联系.因此本文的研究具有一定的实际意义.

2 基本方程

激光等离子体相互作用可用矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 Φ 所满足的 Maxwell 方程

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi + \frac{4\pi e}{c}n\boldsymbol{V}, \quad (1)$$

$$\nabla\Phi = 4\pi e(n - n_0) \quad (2)$$

以及等离子体中电子流体所满足的动力学方程和连续性方程(冷等离子体)

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} = e\left(\nabla\Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + \boldsymbol{F}_{\mathrm{p}}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot(n\boldsymbol{V}) = 0 \quad (4)$$

来描述.式中 n,n_0 分别为电子等离子体密度及等离子体初始密度,e,m_0 为电子电量和电子质量,$\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{V}$ 为电子动量和速度,相对论因子为

$$\gamma = \sqrt{1 + (P/m_0c)^2}, \quad (5)$$

F_p 为有质动力可表示为

$$F_p = -(V \cdot \nabla)P - \frac{e}{c}V \times B. \tag{6}$$

方程(1—4)中采用了库仑规范$\nabla \cdot A = 0$.电子等离子体的热运动被忽视,这在以下的条件下是可行的:1)电子的颤动运动速度远大于其热运动速度,2)电子不被等离子波俘获,即电子纵向速度 v_z 与等离子体波的相速 V_{ph} 相差较大.另外,若激光的脉宽 γ 远小于离子等离子体波频率的倒数 ω_{pi}^{-1},离子可视为不动.上述条件 1)在相对论强激光的条件下是很容易满足的,因为等离子体可在瞬间产生,其热效应是很弱的,而强激光电场中的电子运动速度接近光速,因此很容易有 $v_{quiver} \gg v_{hot}$.条件 2)在一般情况下容易得到满足.

方程(1,2)可用磁场 B 来表示,我们做如下推导.从麦克斯韦方程出发

$$\nabla \times B = \frac{4\pi}{c}J + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}, \tag{7}$$

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{8}$$

得到

$$\nabla^2 B - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\nabla \times J, \tag{9}$$

这里 $J = -enV$,n 和 V 为电子等离子体密度和速度.令

$$S = \frac{4\pi}{c}\nabla \times J, \tag{10}$$

则

$$S = \frac{4\pi e}{c}(\nabla n \times V + n\nabla \times V), \tag{11}$$

利用式$\nabla \times P_c = 0$,并考虑到正则动量的表达式 $P_c = P - \frac{e}{c}A$,容易得出

$$\frac{e}{c}B = \nabla \times P. \tag{12}$$

由方程(12)及 $P = m\gamma V$ 得出

$$\nabla \times V = \frac{e}{mc}\frac{B}{\gamma} - \nabla \ln\gamma \times V, \tag{13}$$

应用关系式

$$\nabla\left(\frac{n}{\gamma n_0}\right) = \frac{1}{\gamma}\nabla\left(\frac{n}{n_0}\right) - \frac{\nabla\gamma}{\gamma^2}\frac{n}{n_0}, \tag{14}$$

方程(10)成为

$$S = k_p^2\nabla\left(\frac{n}{\gamma n_0}\right) \times P - \frac{nk_p^2}{\gamma n_0}B, \tag{15}$$

于是总磁场满足如下演化方程

$$\nabla^2 B - \frac{\partial^2 B}{\partial \tau^2} - \frac{n}{\gamma n_0}B = \sqrt{\frac{4\pi n_0}{m}}\nabla\left(\frac{n}{n_0\gamma}\right) \times P. \tag{16}$$

在方程(16)中,坐标归一化为 $\rho = k_p r$,$\theta' = k_p\theta$,$\eta = k_p z$,$\tau = \omega_p t$,∇^2为 Laplacian 算符.方程(16)亦可用于描述激光等离子体相互作用中场的演化,例如对激光在等离子体中的传播,谐波辐射等问题.理论上,只要知道等离子体的密度和动量,则有方程(16)可知场的信息可以全部获得.

(16)式可改写为

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)b = \frac{1}{\gamma}b + R, \tag{17}$$

式中 $b = eB/m\omega c$,b 为归一化磁场,包括背景磁场 b_s 及高频振荡磁场 b_L,γ 为相对论因子,R 为

$$R = \frac{\omega_p}{\omega}\nabla\left(\frac{n}{\gamma n_0}\right) \times P, \tag{18}$$

ω_p 为等离子体频率,ω 为激光频率,P 为归一化动量,$p = P/mc$.在(17)及(18)式中的各量是 ρ, θ', η, t' 的函数,其中 $\rho = k_p r$,$\theta' = k_p\theta$,$\eta = k_p z$,$\tau = \omega_p t$.

用各谐波分量表示 b,$\frac{n}{\gamma n_0}$及 R.

$$\begin{aligned} b &= b_s + b_1 e^{i\omega t} + b_2 e^{i2\omega t} + \cdots, \\ N &= \frac{n}{\gamma n_0} = N_s + N_1 e^{i\omega t} + N_2 e^{i2\omega t} + \cdots, \\ R &= R_s + R_1 e^{i\omega t} + R_2 e^{i2\omega t} + \cdots, \end{aligned} \tag{19}$$

则第 j 阶谐波满足如下方程:

$$(\nabla^2 + \alpha_j)b_j = \sum_m N_{j-m}b_m + R_j, \tag{20}$$

式中 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$,$\alpha_j = j^2\beta^2$,$\beta = \omega/\omega_p^2$.由于背景磁场影响等离子体密度分布及等离子体电子的动量,因而 B_s 影响 R_j;另外,由(20)式右边的第一项可知,该项包含磁场 R_s 的影响,因此在磁化等离子体中或者在考虑自生磁场的情况下,磁场将影响相对论相干谐波辐射,并产生新的效应.方程(20)的源项还包括了各次谐波辐射的耦合效应,这种耦合效应将影响谐波辐射的饱和[5].方程(20)是一个没有任何近似的普遍性方程,解析求解方程(20)是很困难的,以下我们讨论二次谐波辐射的有关参数.

3 二阶谐波辐射

由方程(20)容易得到二阶和三阶谐波的方程

$$[\nabla^2 + 4\beta^2 - N_0]b_2 = N_2 b_s + N_1 b_L + R_2, \tag{21}$$

$$[\nabla^2 + 9\beta^2 - N_0]b_2 = N_3 b_s + N_2 b_L + N_1 b_2 + R_2. \tag{22}$$

本文只考虑偶次谐波. 一般来说,R_2 很小,特别对均匀等离子体. 于是(21)式可改写为

$$[\nabla^2 + k_2^2] b_2 = N_2 b_s + N_1 B_1, \quad (23)$$

式中 $k_2 = \sqrt{4\beta^2 - N_0}$. 方程(23)中右边第一项为背景磁场或自生磁场的贡献,第二项为抽运激光的贡献,可见,背景磁场或自生磁场能够诱发偶次谐波辐射.

由连续性方程(4)得到

$$N_1 = \frac{\mathrm{i}}{\gamma n_0 k} \nabla \cdot (N_0 p_1), \quad (24)$$

$$N_2 = \frac{\mathrm{i}}{\gamma n_0 2k} \nabla \cdot (N_0 p_2 + N_1 p_1), \quad (25)$$

由等离子体电子动量方程(3)得到

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} + \mathrm{i}\Omega P = -eE - eV_{sz}\int \partial_z E \mathrm{d}t. \quad (26)$$

于是有

$$P_s = \frac{-\mathrm{i}eE(1 - kv_z/\omega)}{\omega - \Omega - kv_z}, \quad (27)$$

$$P_2 \simeq \frac{-\mathrm{i}eE_2}{2\omega - \Omega}, \quad (28)$$

式中

$$\Omega = -\frac{eB_s}{mc\gamma}. \quad (29)$$

对于宽激光束,$\nabla_r^2 \ll \nabla_z^2$,则由方程(23)得到

$$b_2 = \frac{1}{k_2}\int \cos k_2(\eta - \eta') N_2 b_s \mathrm{d}\eta, \quad (30)$$

于是转化效率为

$$P_2 = \left|\frac{b_2}{b_1}\right| = \left|\frac{b_s}{b_1}\right|^2 \alpha^2, \quad (31)$$

式中

$$k_2 \alpha = \int \cos k_2(\eta - \eta') N_2 \mathrm{d}\eta. \quad (32)$$

这里假定 b_s 不随坐标 η 变化. (30)式表明自生磁场诱发了二次谐波,其转化效率与磁场的平方成正比.

在三维情况下,引入格林函数 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$,它满足方程

$$(\nabla + k_2^2) G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = -4\pi\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'), \quad (33)$$

该方程的解为

$$G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2}(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}. \quad (34)$$

于是二次谐波为

$$b_2 = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r} N_2 b_s G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'), \quad (35)$$

转化效率为

$$P_2 = \left|\frac{b_2}{b_1}\right| = \left|\frac{b_s}{b_1}\right|^2 \alpha'^2, \quad (36)$$

式中

$$\alpha' = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r} N_2 G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \quad (37)$$

可见,一维和三维情况下的形式一样,但它们是不同的,因为其中的系数完全不同.

由上述分析可知,二阶谐波对自生磁场有强烈的依赖性,这一结论可从方程(30)和(35)得出:当 $b_s = 0$ 时,显然有 $b_2 = 0$,说明在没有自生磁场的情况下,二阶谐波消失. 由此,我们也获得了产生二阶谐波的一种方法:让等离子体磁化. 这可以采用两种方法:加入背景磁场或选取能产生更强自生磁场的等离子体和强激光.

4 产生偶次谐波的机理

以上从数学的角度分析了偶次谐波的产生,下面对这种情况下产生的偶次谐波的机理进行初步分析. 由于强激光等离子体的相互作用是强非线性的,这种背景下相互作用中产生的奇次电流与产生自生磁场的静态电流以及与自生磁场的反作用而产生的静态电流耦合,形成偶次电流,于是产生偶次谐波. 这个结论也可以从(18)式得出:R 可做为诱发谐波的源项,考虑到自生磁场后,显然 R 中有奇次也有偶次成分,因而诱发偶次谐波.

值得指出的是,方程(17)中,线性项 $n/(\gamma n_0)$ 是起着重要的作用,它对各次谐波的振幅产生饱和,从而保证了谐波不会产生久期发散. 至于该项如何影响谐波的特性有待进一步研究.

5 结 论

本文研究了背景磁场和自生磁场对相对论相干谐波幅射的影响. 研究表明,自生磁场和背景磁场的引入使得等离子体被磁化,在磁化等离子体中,即使是在欠稠密等离子体中,强激光与等离子体的相互作用将导致偶次谐波的产生,这与不考虑磁场作用的效果时是完全不一样的. 本文研究了这种情况,并分析了二次谐波辐射.

[1] P. Sprangle, E. Esarey, A. Ting, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 2011.

[2] A. McPherson *et al.*, *J. Opt. Soc. Am.*, **B14**(1987), 595.

[3] F. Brunel, *J. Opt. Soc. Am.*, **B7**(1990), 521.

[4] P. Sprangle *et al.*, *Phys Rev.*, **A41**(1990), 4463.

[5] G. Zeng, B. Shen, W. Yu, Z. Xu, *Phys. Plasmas*, **3**(1996), 4220.

[6] Zeng Gui-hua, Yu Wei, Shen Bai-fei, Xu Zhi-zhan, *Acta Physica Sinica* **45**(1996), 1487(in Chinese)[曾贵华、余玮、沈百飞、徐至展,物理学报,**45**(1996), 1487].

[7] G. Zeng, X. Tu, *Phys. Plasmas*, **6**(1999), 2954.

[8] G. Zeng, W. Yu, B. Shen, Z. Xu, *Chin. Phys. Lett.*, **13** (1996), 747.

[9] Liu Guo-zhi *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **47**(1998), 288(in Chinese)[刘国治等,物理学报,**47**(1998), 288].

[10] S. C. Wilks, W. L. Kruer, M. Tabak, A. B. Landon, *Phys. Rev. Lett.*, **69**(1992), 1383.

[11] G. Zeng, *Phys. Plasmas*, **7**(2000), 1539.

[12] Z. M. Sheng, J. Meyer-ter-Vehn, *Phys. Rev.*, **E54** (1996), 1833.

[13] Zeng Gui-hua, Doctoral Dissertation of Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, 1997 (in Chinese)[曾贵华,中国科学院上海光学精密机械研究所博士论文,1997].

[14] Song Xiang-yang, Doctoral Dissertation of Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, 1996 (in Chinese)[宋向阳,中国科学院上海光学精密机械研究所博士论文,1996 年].

[15] Du Chun-gang, Zeng Gui-hua, Xu Zhi-zhan, *Acta Physica Sinica*, **48**(1999), 78 (in Chinese)[杜春光、曾贵华、徐至展,物理学报,**48**(1999), 78].

RELATIVISTIC EVEN-ORDER HARMONICS GENERATED IN UNDERDENSE PLASMA

ZENG GUI-HUA[1)] ZHU HONG-WEN[1)] XU ZHI-ZHAN[2)]

[1)] (*Department of Electronic Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030, *China*)

[2)] (*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai* 201800, *China*)

(Received 4 December 2000; revised manuscript received 23 April 2001)

ABSTRACT

In the self-generated magnetic field produced by ultra-intense laser-plasma interaction or background magnetic field, even relativistic harmonics is excited by the ultra-intense laser propagating in underdense plasma which is magnetized by the self-generated magnetic field or backgroud magnetic field. In this paper, the second harmonics and its parameters are investigated.

Keywords: second harmonic generation, self-generated magnetic field, ultra-intense laser pulse, underdense plasma

PACC: 5240D; 4265K; 5260