

直流偏置的与 RLC 谐振器耦合的约瑟夫森结 动力学行为的数值模拟*

王震宇 廖红印 周世平

(上海大学物理系, 上海 200436)

(2001 年 4 月 13 日收到, 2001 年 5 月 13 日收到修改稿)

用数值模拟方法研究一种直流偏置的与 RLC 电路耦合的约瑟夫森结的动力学行为. 数值模拟发现, 选择合适的偏置电流, 系统表现出周期三与混沌共存的动力学现象. 给出了相应吸引子, 吸引域的几何结构. 对该系统的动力学研究为约瑟夫森器件稳定工作提供了有价值的参考.

关键词: 约瑟夫森结, 混沌, 吸引子, 吸引域, 庞加莱截面, 李雅谱诺夫指数

PACC: 7450, 0545, 0547

1 引 言

自从 1980 年 Huberman 等关于约瑟夫森结 (Josephson junction) 混沌行为的研究工作发表以来^[1], 约瑟夫森电路的混沌研究受到了广泛的重视. 人们热衷于对其进行研究的主要原因是简单的约瑟夫森结电路为混沌科学的研究者提供了理想的工作平台. 例如典型的交流激励带结电容的约瑟夫森结模型^[2-4] 这个看似简单的二阶非自治系统却蕴含着非常丰富的动力学行为. 近些年来混沌控制、同步成为了混沌研究的热点, 于是人们也将一些混沌控制的方法运用于控制约瑟夫森结中的混沌的研究^[5,6].

除交流激励的约瑟夫森结模型以外, 人们还提出了许多直流偏置的约瑟夫森结电路模型, 如 Pedersen 和 Davidson 研究的直流偏置带结电容的与 $R-L$ 负载耦合的约瑟夫森结模型^[7], Jensen 等的直流偏置带结电容的与串联并联谐振器耦合的约瑟夫森结模型^[8], Nerenberg 等的直流偏置无结电容约瑟夫森结阵列^[9]等.

约瑟夫森结作为一种超导元件应用广泛, 如电压标准, 毫米波探测器, 快速磁通量子逻辑电路, 超灵敏器件等. 一方面随着制结工艺的发展其结电容不断减小, 另一方面在应用中约瑟夫森结总是不可避免地要与外接电路中的电感、电容相耦合使用(有

时可能是寄生的). 于是 RLC 谐振器与不带结电容的约瑟夫森结耦合所组成动力学系统成为了我们的研究对象, 为了不失普遍性也可以将结电容并入谐振电路电容中.

2 数学模型

图 1 为所研究电路示意图, 它由一个约瑟夫森结与 RLC 谐振器耦合所组成, 对于约瑟夫森结, 这里采用电阻分路结 (RSJ) 等效模型, 不考虑结电容.

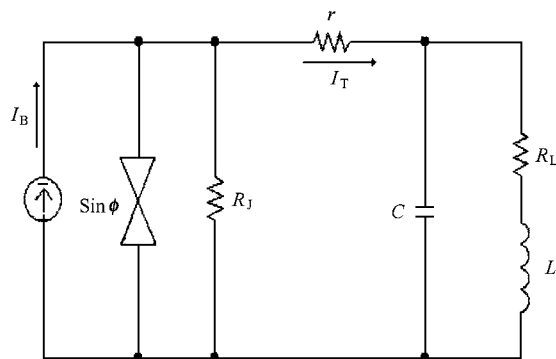


图 1 约瑟夫森结与 RLC 谐振器耦合电路

根据以上所给出的电路图可以写出系统动力学方程. 首先根据基尔霍夫第一定律可得

$$I_B = I_C \sin \phi + \frac{V_J}{R_J} + I_T, \quad (1)$$

* 国家自然科学基金(批准号 69871016)和国家教育部高等学校骨干教师计划资助的课题.

式中 I_B 是系统的直流偏置电流, I_C 则是约瑟夫森结临界电流, ϕ 为结相位, V_J 为结电压, R_J 是 RSJ 模型中的并联电阻, I_T 代表了流经电阻 r 的电流, 即流入谐振器的总电流,

$$I_T = \frac{(V_J - V_T)}{r}, \quad (2)$$

V_T 表示谐振器电容 C 两端的电压值. 根据约瑟夫森方程结电压与结相位的关系为

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2eV_J}{\hbar}. \quad (3)$$

为了便于研究, 我们引进无量纲量

$$\alpha = \frac{\hbar}{2eLI_C}, \quad \beta = \frac{\hbar}{2eCI_C R_J^2}, \quad \gamma = \frac{r}{R_J}, \quad \xi = \frac{R_L}{R_J},$$

其中 L, R_L 分别为 RLC 谐振器中的电感和电阻. 定义归一化电流 $i = I/I_C$, 其中 I 是实际值, I_C 是结临界电流, 归一化电压定义为 $v = V/I_C R_J$, 归一化时间为 $\tau = (2eI_C R_J/\hbar)t$. 随后将 (1) (2) 和 (3) 式合并得

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\gamma}{1 + \gamma} \left(i_B - \sin\phi + \frac{v_T}{\gamma} \right). \quad (4)$$

再由电感的定义 $V_L = L(dI_L/dt)$ 其中 V_L 为电感 L 两端的电压, I_L 为通过电感的电流, 及 $V_T = V_{R_L} + V_L, V_{R_L}$ 为电阻 R_L 上的压降, 可得

$$\frac{di_L}{d\tau} = \alpha(v_T - i_L\xi). \quad (5)$$

最后由电容的定义 $I_{CAP} = C(dV_T/dt)$, 此处 $I_{CAP} = I_T - I_L$, 可得

$$\frac{dv_T}{d\tau} = \frac{\beta}{1 + \gamma} (i_B - \sin\phi - v_T) - i_L\beta. \quad (6)$$

至此我们得到本文所要研究系统的动力学描述方程组 (4) (5) 和 (6). 系统相空间的坐标分别是结相位 ϕ 、电感电流 i_L 、谐振器电容两端电压 v_T . 动力学方程中 α, β, γ 和 ξ 分别取为 0.07, 2/7, 3/7 和 0.005. 我们取比较典型的约瑟夫森结参数: $I_C = 100\mu A, R_J = 1\Omega$, 而谐振器电感 $L = 47pH$ 、电容 $C = 11.5pF$ 、电阻 $r = 0.43\Omega, R_L = 0.005\Omega$. 显然, 就目前的平面工艺水平而言这些参数是较容易做到的. 这一点将有利于对模拟结果的可能的实验验证.

3 周期三与混沌吸引子

我们采用四阶定步长 Runge-Kutta 法进行数值模拟. 这里注意到 RLC 谐振电路的谐振频率为 $\omega_{RLC} = [(1/LC) - (R_L/L)^2]^{1/2}$, 归一化周期 $T_{RLC} = 2\pi[\alpha\beta$

$-(\xi\alpha)^2]^{-1/2} \approx 44$. 而 I_C 偏置下的约瑟夫森结振荡频率为 $\omega_{Josphson} \approx 2eI_C R_J/\hbar$, 归一化周期为 $T_{Josphson} = 2\pi(T_{Josphson} < T_{RLC})$. 因此选择步长时以 $T_{Josphson}$ 为标准, 在所有的数值模拟中将步长定为 $\Delta t = 0.005$ (约 $T_{Josphson}/1000$). 由于外部驱动电流为直流, 显然系统是自治的. 对此三阶自治系统, 我们选择当 ϕ 达到某一预设值时对系统进行一次取样. 这一预设的 ϕ 值完全是任意的, 本文默认 ϕ 为 π 时进行取样.

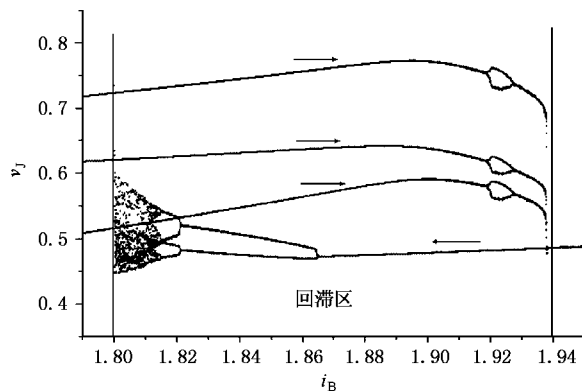


图2 结电压 v_j 与直流驱动电流 i_B 的关系, $i_B = 1.802$ 附近出现混沌与周期三共存 ($\phi = \pi$ 时取样)

下面我们给出结电压 v_j ($d\phi/d\tau$) 随电流 i_B 变化的分岔图 (图 2), 这里我们在 $\phi = \pi$ 时对系统取样. 从图中可以清楚地看到, 当 $i_B \leq 1.80$ 时仅有周期三的解, $i_B \geq 1.94$ 时解是周期一的. 然而在 $1.80 \leq i_B \leq 1.94$ 之间情况则有所不同, 结电压 v_j 与偏置电流 i_B 的关系曲线因 i_B 变化方向的不同分为了“上下”两支. 这说明在此区域内同一直流电流 i_B 的偏置下, 此动力系统可以有两种不同的动力学模式与之对应, 形成了所谓的回滞区. 当 i_B 由 1.79 逐渐增加时, 结电压 v_j 随电流 i_B 的变化则由上分支所描述. 上分支除了在 $i_B = 1.92$ 附近形成“小环”以外, 可以看到在 $1.80 \leq i_B \leq 1.94$ 范围内几乎都是周期三的解, 直至 $i_B = 1.94$ 附近其变为周期一. 而当 i_B 由大变小时情形则不同, 其由下分支所描述. 在 i_B 下降至 1.87 之前一直为周期一, 然后分叉, 最后在 $i_B = 1.813$ 附近进入混沌. 这可以由图 3 看出, 在 $i_B = 1.813$ 附近系统的最大 Lyapunov exponents (李雅普诺夫指数) 变为正. 这里值得指出的是, 如图 4 所示当 i_B 由 1.79 逐渐增加时系统的最大 Lyapunov exponents 却始终没有出现正值, 这与 i_B 由 1.95 逐渐减少时所对应的最大 Lyapunov exponents 是不同的. 这

是由于偏置电流 i_B 变化方向的不同,使得系统在同一 i_B 偏置下进入了不同的动力学模式,因此同一 i_B 对应的最大 Lyapunov exponents 是不同的.

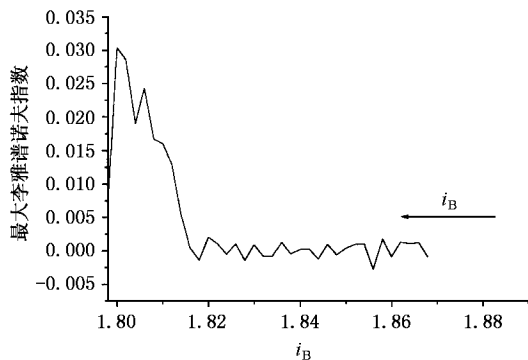


图 3 i_B 逐渐减小对应的最大 Lyapunov 指数

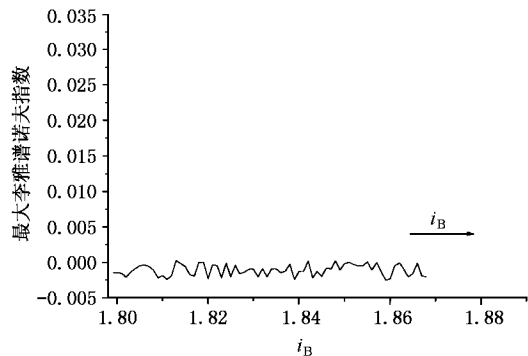


图 4 i_B 逐渐增加对应的最大 Lyapunov 指数

由图 2,图 3 和图 4 可知,当直流偏置电流 $i_B = 1.802$ 附近时,系统既可以处于周期三的态,也可以处于混沌态,这就是我们所谓的周期三与混沌共存的现象.这是本文研究的重点,因此在以后的数值模拟中我们将 $i_B = 1.802$ 固定.我们知道偏置电流 $i_B = 1.802$ 时,系统不同的初始态 (ϕ, i_L, v_T) 可以使得系统最终的状态或是处于周期三吸引子上,或是处于混沌吸引子上.

为了识别解的特性,首先我们给出 Poincaré(庞加莱)截面图 $(\phi = \pi)$.图 5 中三个独立的黑点表示了周期三的吸引子,混沌吸引子则对应于类似鱼叉状的黑线.图中阴影部分表示的是周期三吸引子的吸引域,即当初始态位于阴影部分内时,随着时间的推移系统将最终进入周期三的态.白色区域对应的则是混沌吸引子的吸引域.同样,当系统初始态位于白色区域内时其将进入混沌态.我们还给出了 $\phi = 0, 1.5\pi$ 时的 Poincaré 截面(图 6、图 7).

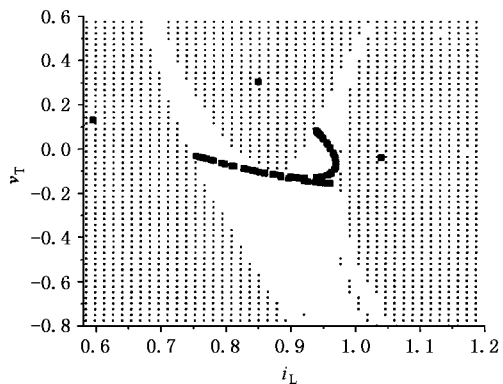


图 5 $\phi = \pi$ 的 Poincaré 截面($i_B = 1.802$)

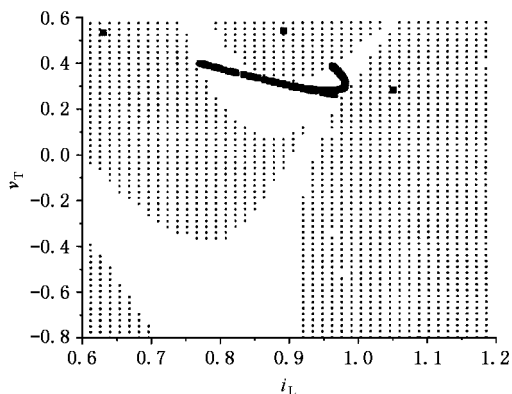


图 6 $\phi = 1.5\pi$ 的 Poincaré 截面($i_B = 1.802$)

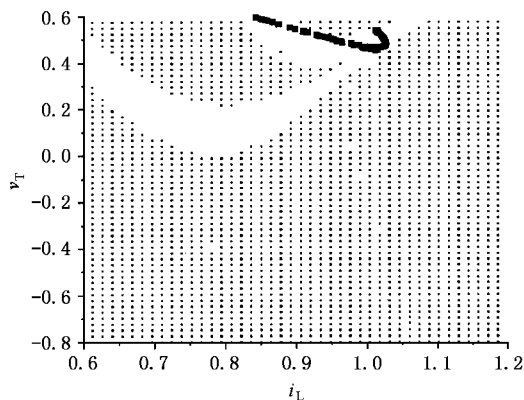


图 7 $\phi = 0$ 的 Poincaré 截面($i_B = 1.802$)

由以上的 Poincaré 截面图,我们所看到的吸引子其实是相空间中完整吸引子的几个截面.三维相空间 (ϕ, i_L, v_T) 中两种吸引子位置关系如图 8 所示.其中具有一定宽度的“黑带”就是混沌吸引子,其与 $\phi = 0$ 面相交形成的鱼叉线由图 7 表示.粗黑线表示的则是周期三的吸引子,其每过 $3 \times 2\pi$ 完成一次循

环. 这一点我们从其与平面 $[0, i_L, v_T]$ 平面 $[6\pi, i_L, v_T]$ 交点有相同的坐标可以看出. 这里我们还可以注意到在相空间中周期三吸引子一方面沿着 φ 方向延伸, 另一方面则绕于混沌吸引子之外. 为了进一步看清两种吸引子在相空间中的关系, 我们还给出了它们在 i_L-v_T 平面上的投影图(图 9), 其中杏仁状的中心部分就是混沌吸引子的投影.

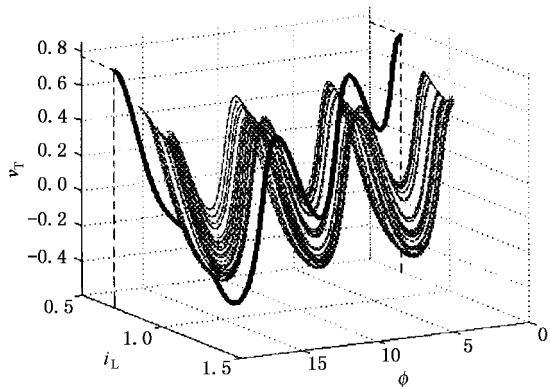


图 8 相空间中周期三吸引子与混沌吸引子

4 结 论

本文的研究对象是直流偏置下的由一个约瑟夫

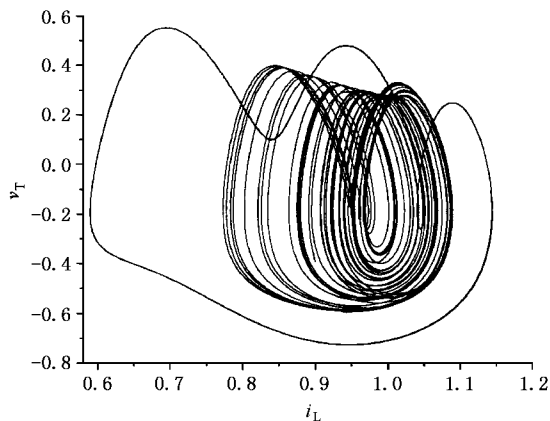


图 9 吸引子在 i_L-v_T 平面上的投影

森结与 RLC 谐振器耦合所组成的约瑟夫森电路. 通过数值模拟发现当偏置电流 $i_B = 1.802$ 时该系统出现了周期三与混沌共存的动力学现象. 同时, 这也为在此系统中避免混沌提供了直接的线索, 即选择直流偏置电流 i_B 时应远离 $i_B = 1.802$, 如选 $i_B = 1.9$. 在大多数约瑟夫森电路应用中, 人们希望避免混沌的出现, 以便系统更稳定的工作^[10], 因此我们开展此电路模型的混沌研究是有其实际意义的.

[1] B. A. Huberman, J. P. Crutchfield, N. H. Packard, *Appl. Phys. Lett.*, **37**(1980), 750.
 [2] E. Ben-Jacob, Y. Braiman, R. Shainsky, Y. Imry, *Appl. Phys. Lett.*, **38**(1981), 822.
 [3] R. L. Kautz, *J. Appl. Phys.*, **52**(1981), 6241.
 [4] A. H. MacDonald, M. Plischke, *Phys. Rev.*, **B27**(1983), 201.
 [5] Tsung-Hsun Yang, Shyh-Feng Chen, Yih-Shun Gou, *Phys. Rev.*, **E59**(1999), 5393.
 [6] I. L. Atkin, E. Abraham, *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, **7**(1997), 2894.

[7] N. F. Pedersen, A. Davidson, *Stimulated Effects in Josephson Devices*, edited by M. Russo and A. Costabile (World scientific, Singapore, 1988) p. 227.
 [8] H. D. Jensen, A. Larsen, J. Mygind, *Physica*, **B165/166**(1990), 1661.
 [9] M. A. H. Nerenberg, J. H. Baskey, J. A. Blackburn, *Phys. Rev.*, **B36**(1987), 8333.
 [10] E. Abraham, I. L. Atkin, A. Wilson, *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, **9**(1999), 4166.

STUDIES OF THE DC BIASED JOSEPHSON JUNCTION COUPLED TO A RESONANT TANK*

WANG ZHEN-YU LIAO HONG-YIN ZHOU SHI-PING

(*Department of Physics , Shanghai University , Shanghai 200436 , China*)

(Received 13 April 2001 ; revised manuscript received 13 May , 2001)

ABSTRACT

We have investigated the dynamics of a Josephson junction circuit , which consists of a dc biased Josephson junction coupled to a resonant tank . Numerical simulations indicate that period-3 and chaotic states coexist when this system is driven by a proper external dc current . The detailed structures of the attractors and the basins of attraction are given to specify the features of these states . This provides one with valuable information to avoid chaos in Josephson junction devices .

Keywords : Josephson junction , chaos , attractor , basin of attraction , Poincaré map , Lyapunov exponents

PACC : 7450 , 0545 , 0547

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.69871016) and by State Education committee of China for outstanding staff