第 50 卷 第 11 期 2001 年 11 月
1000-3290/2001/50(11)/2049-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50,No.11,November,2001

转动相对论 Birkhoff 系统动力学的场方法*

罗绍凯[1)2)]　郭永新[3)]　陈向炜[1)]　傅景礼[1)]

[1)](商丘师范学院数学力学与数学物理研究所,商丘 476000)

[2)](长沙大学数学力学与数学物理研究所,长沙 410003)

[3)](辽宁大学物理系,沈阳 110036)

(2001 年 4 月 10 日收到;2001 年 5 月 11 日收到修改稿)

给出转动相对论 Birkhoff 系统动力学方程的一种积分方法,并举例说明方法的应用.

关键词:转动相对论, Birkhoff 动力学, 积分方法

PACC:0316, 0320, 0412

1 引　　言

为了解决高速转动的动力学问题,Carmeli 于 1985 年建立了转动相对论力学理论[1,2].1996 年以来,文献[3—6]建立了转动相对论系统的分析力学理论,文献[7—9]进一步研究了变转动惯量系统的转动相对论理论.Birkhoff 动力学比 Hamilton 动力学更为一般[10—17],Hamilton 动力学在近代物理学领域已得到广泛应用,Birkhoff 动力学在近代物理学领域也理应扮演重要角色.最近,文献[18,19]给出了转动相对论 Birkhoff 系统动力学的基本理论及其几何理论.此前,关于转动相对论系统的研究,多限于方程的建立,而对于方程的积分方法的研究较为薄弱.

复杂动力学系统的积分理论是现代分析力学的重要发展方向之一,受到数学、力学、物理学界的重视.Vujanović 于 1984 年提出积分完整非保守系统的场方法,这种新的积分方法解决了不能应用传统 Hamilton-Jacobi 方法的动力学系统的求解问题[20].1989 年以来,在梅凤翔的带动下,我国学者在场方法的研究方面取得一系列新的进展,开辟了具有通用性的积分复杂系统动力学方程的新途径[21—27].然而,以往关于场方法的研究均限于经典力学系统.

本文给出积分转动相对论 Birkhoff 系统动力学方程的场方法,并举例说明方法的应用,分别讨论转动相对论 Hamilton 系统、相对论 Birkhoff 系统、经典转动 Birkhoff 系统的场方法.

2 转动相对论 Birkhoff 系统动力学方程的积分方法

研究 N 个粒子构成的力学系统绕定轴的转动,在 t 时刻第 i 个粒子绕定轴的角速度为 $\dot{\theta}_i$,i 粒子的极限角速度为 Γ_i,经典转动惯量为 I_{oi},其相对论性转动惯量为[2,3]

$$I_i = \frac{I_{oi}}{\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}} \qquad (i=1,\cdots,N). \tag{1}$$

构造转动相对论系统的 Birkhoff 函数 B^* 和 Birkhoff 函数组 R_ν^* $(\nu=1,\cdots,2n)$,即

$$\begin{aligned} &B^* = B^*(I_i(t,a^\mu),t,a^\mu),\\ &R_\nu^* = R_\nu^*(I_i(t,a^\mu),t,a^\mu)\\ &\qquad (\mu,\nu=1,\cdots,2n;i=1,\cdots,N). \end{aligned} \tag{2}$$

令

$$\begin{aligned} &\tilde{B}^* = \tilde{B}^*(t,a^\mu) = B^*(I_i(t,a^\mu),t,a^\mu),\\ &\tilde{R}_\nu^* = \tilde{R}_\nu^*(t,a^\mu) = R_\nu^*(I_i(t,a^\mu),t,a^\mu)\\ &\qquad (\mu,\nu=1,\cdots,2n;i=1,\cdots,N), \end{aligned} \tag{3}$$

对于只受理想完整约束或自由的转动相对论系统,其 Birkhoff 方程为[18]

$$\tilde{\Omega}^*_{\mu\nu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \tilde{R}^*_\mu}{\partial t} = 0 \qquad (\mu,\nu=1,\cdots,2n) \tag{4}$$

或

$$\dot{a}^\mu - \tilde{\Omega}^{*\mu\nu}\left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\nu} + \frac{\partial \tilde{R}^*_\nu}{\partial t}\right) = 0$$

* 国家自然科学基金(批准号:19972010)、河南省自然科学基金(批准号:998040080,984053100 和 934060800)及辽宁省自然科学基金(批准号:99011104 和 20021004)资助的课题.

$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n). \tag{5}$$

方程(5)为方程(4)的逆变代数形式.$\tilde{\Omega}^*_{\mu\nu}$为转动相对论系统的 Birkhoff 张量,$\tilde{\Omega}^{*\mu\nu}$为$\tilde{\Omega}^*_{\mu\nu}$的逆变张量

$$\tilde{\Omega}^*_{\mu\nu}=\frac{\partial\tilde{R}^*_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial\tilde{R}^*_\mu}{\partial a^\nu},$$

$$\tilde{\Omega}^{*\mu\nu}=\left(\left\|\frac{\partial\tilde{R}^*_\beta}{\partial a^\gamma}-\frac{\partial\tilde{R}^*_\gamma}{\partial a^\beta}\right\|^{-1}\right)^{\mu\nu}$$

$$(\mu,\nu,\beta,\gamma=1,\cdots,2n). \tag{6}$$

一般假设系统(4)非奇异

$$\det(\tilde{\Omega}^*_{\mu\nu})\neq 0. \tag{7}$$

如果 $\tilde{R}^*_\mu$ 和 $\tilde{B}^*$ 都不显含时间 t,则系统(4)是自治的 如果 $\tilde{R}^*_\mu$ 不显含时间 t,则系统(4)是半自治的.

对于转动相对论 Birkhoff 系统(5),令某一个场变量,例如 a^1 作为时间 t 以及其余变量 a^α($\alpha=2,\cdots,2n$)的函数,即

$$a^1=u(t,a^\alpha)\qquad(\alpha=2,\cdots,2n). \tag{8}$$

将(8)式对时间 t 求导数,并利用方程(5),得

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{\alpha=2}^{2n}\frac{\partial u}{\partial a^\alpha}\sum_{\mu=1}^{2n}\tilde{\Omega}^{*\alpha\mu}\left(\frac{\partial\tilde{B}^*}{\partial a^\mu}+\frac{\partial\tilde{R}^*_\mu}{\partial t}\right)$$

$$-\sum_{\mu=1}^{2n}\tilde{\Omega}^{*1\mu}\left(\frac{\partial\tilde{B}^*}{\partial a^\mu}+\frac{\partial\tilde{R}^*_\mu}{\partial t}\right)=0. \tag{9}$$

我们称拟线性偏微分方程(9)为转动相对论 Birkhoff 系统的基本偏微分方程.

若方程(9)的完全解表为形式

$$a^1=u(t,a^\alpha,C^\tau)\quad(\alpha=2,\cdots,2n;\tau=1,\cdots,2n), \tag{10}$$

则将(10)式代入(9)式,使方程成为恒等式.令运动的初始条件为

$$t=0,\ a^\nu=a^\nu_0, \tag{11}$$

将(11)式代入(10)式,可得一个常数,例如 C^1,用 a^ν_0 和其余常数 C^α 表出,那么(10)式可写成

$$a^1=u(t,a^\alpha,C^\rho)\quad(\alpha,\rho=2,\cdots,2n). \tag{12}$$

容易证明,初值问题(5)和(11)式的解可由(12)式及下述$(2n-1)$个代数方程

$$\frac{\partial u}{\partial C^\rho}=0\qquad(\rho=2,\cdots,2n) \tag{13}$$

来确定.

证明 假设函数行列式

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial C^\rho\partial a^\alpha}\right)$$

在 C^ρ,a^α 的相关域上处处不为零,将(13)式对 t 求导数,有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial C^\rho\partial t}+\sum_{\alpha=2}^{2n}\frac{\partial^2 u}{\partial C^\rho\partial a^\alpha}\dot{a}^\alpha=0. \tag{14}$$

再将方程(9)对 C^ρ 求导数,得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial C^\rho}+\sum_{\alpha=2}^{2n}\frac{\partial^2 u}{\partial a^\alpha\partial C^\rho}\sum_{\mu=1}^{2n}\tilde{\Omega}^{*\alpha\mu}\left(\frac{\partial\tilde{B}^*}{\partial a^\mu}+\frac{\partial\tilde{R}^*_\mu}{\partial t}\right)$$

$$+\sum_{\alpha=2}^{2n}\frac{\partial u}{\alpha a^\alpha}\left[\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial u}\left(\tilde{\Omega}^{*\alpha\mu}\left(\frac{\partial\tilde{B}^*}{\partial a^\mu}+\frac{\partial\tilde{R}^*_\mu}{\partial t}\right)\right)\right]\frac{\partial u}{\partial C^\rho}$$

$$-\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial u}\left[\tilde{\Omega}^{*1\mu}\left(\frac{\partial\tilde{B}^*}{\partial a^\mu}+\frac{\partial\tilde{R}^*}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial u}{\partial C^\rho}=0. \tag{15}$$

比较(14)与(15)式,并利用(13)式,便得

$$\dot{a}^\alpha-\sum_{\mu=1}^{2n}\tilde{\Omega}^{*\alpha\mu}\left(\frac{\partial\tilde{B}^*}{\partial a^\mu}+\frac{\partial\tilde{R}^*_\mu}{\partial t}\right)=0$$

$$(\alpha=2,\cdots,2n). \tag{16}$$

这就是转动相对论 Birkhoff 系统(5)的后面$(2n-1)$个方程.将(12)式对 t 求导数,并利用方程(9),便证明了转动相对论 Birkhoff 系统(5)的第一个方程亦满足.

这种方法积分运动方程具有通用性,它没有 Hamilton-Jacobi 方法那么苛刻的限制 这种方法具有灵活性,可选用任何一个场变量代替 a^1,只要能够求出方程(9)的完全解,不用任何进一步的积分,便可由(12)和(13)式求得转动相对论 Birkhoff 系统的解.

3 算　例

某二阶转动相对论 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组为

$$\tilde{B}^*=\frac{I}{M_0}\Gamma^2-a^1,\quad \tilde{R}^*_1=0,$$

$$\tilde{R}^*_2=\left(\frac{I}{M_0}\Gamma^2-a^1\right)\frac{I}{M_0}\left(1-\frac{(a^2)^2}{\Gamma^2}\right)^{-1}, \tag{17}$$

其中 $I=I_0/\sqrt{1-(a^2)^2/\Gamma^2}$,$\Gamma$ 为极限角速度,M_0 为常力矩,a^1,a^2 为广义坐标.试用场方法求系统的运动.

转动相对论 Birkhoff 系统的动力学方程(5)为

$$\dot{a}^1=a^2,\ \dot{a}^2=\frac{M_0}{I}\left(1-\frac{(a^2)^2}{\Gamma^2}\right). \tag{18}$$

令 $a^1=u(t,a^2)$,则基本偏微分方程(9)为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial a^2}\frac{M_0}{I}\left(1-\frac{(a^2)^2}{\Gamma^2}\right)-a^2=0. \tag{19}$$

设方程(19)的完全解有形式

$$u=f_1(t)+f_2(t)a^2, \tag{20}$$

将(20)式代入方程(19),得

$$\dot{f}_1(t)+\dot{f}_2(t)a^2+f_2(t)$$

$$\cdot\frac{M_0}{I_0}\left(1-\frac{(a^2)^2}{\Gamma^2}\right)^{3/2}-a^2=0. \tag{21}$$

取 $\left(1-\frac{(a^2)^2}{\Gamma^2}\right)^{3/2}$ 的泰勒级数的一级近似,得

$$\left(1-\frac{(a^2)^2}{\Gamma^2}\right)^{3/2}\approx 1. \tag{22}$$

将(22)式代入(21)式,并令自由项以及含 a^2 项分别为零,得到为确定 f_1,f_2 的微分方程

$$\dot f_1+\frac{M_0}{I_0}f_2=0,\ \dot f_2-1=0. \tag{23}$$

积分之,得

$$f_1=-\frac{M_0}{2I_0}t^2-\frac{M_0}{I_0}C^2t+C^1,\ f_2=t+C^2, \tag{24}$$

其中 C^1,C^2 为常数.将(24)式代入(20)式,得

$$u=C^1-\frac{M_0}{2I_0}t^2-\frac{M_0}{I_0}C^2t+ta^2+C^2a^2. \tag{25}$$

令初始条件为

$$t=0,\ a^\nu=a_0^\nu \qquad (\nu=1,2), \tag{26}$$

将(26)式代入(25)式,解得

$$C^1=a_0^1-C^2a_0^2, \tag{27}$$

则(25)式为

$$u=a_0^1-C^2a_0^2-\frac{M_0}{2I_0}t^2-\frac{M_0}{I_0}C^2t+ta^2+C^2a^2. \tag{28}$$

方程(13)给出

$$\frac{\partial u}{\partial C^2}=0,\ 即\ -a_0^2-\frac{M_0}{I_0}t+a^2=0, \tag{29}$$

那么

$$a^2=a_0^2+\frac{M_0}{I_0}t. \tag{30}$$

将(30)式代入(28)式,得

$$u=a^1=a_0^1-\frac{M_0}{2I_0}t^2+ta^2. \tag{31}$$

(30)和(31)式即为所求的运动.

4　讨　　论

4.1　转动相对论 Hamilton 系统的场方法

文献[18]证明,转动相对论 Hamilton 系统是转动相对论 Birkhoff 系统的特例.如果 R_μ^* 不显含时间 t,令

$$a^\mu=\begin{cases}q^\mu & (\mu=1,\cdots,n),\\ p_{\mu-n} & (\mu=n+1,\cdots,2n),\end{cases}$$
$$R_\mu^*=\begin{cases}p_\mu & (\mu=1,\cdots,n),\\ 0 & (\mu=n+1,\cdots,2n),\end{cases}$$
$$B^*=H_r, \tag{32}$$

则转动相对论系统的 Birkhoff 张量为

$$(\widetilde\Omega_{\mu\nu}^*)=\begin{bmatrix}0_{n\times n} & +1_{n\times n}\\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n}\end{bmatrix}, \tag{33}$$

那么由方程(4)得到转动相对论 Hamilton 系统的正则方程[3,4]为

$$\dot q^s=\frac{\partial H_r}{\partial p_s},\ \dot p_s=-\frac{\partial H_r}{\partial q^s}\qquad (s=1,\cdots,n), \tag{34}$$

其中

$$H_r(t,q^s,p_s)=p_s\dot q^s-L_r,\ p_s=\frac{\partial L_r}{\partial \dot q_s},$$
$$L_r=T_r^*(t,q^s,\dot q^s)-V(q^s),$$
$$T_r^*=I_{oi}\Gamma_i^2(1-\sqrt{1-\dot\theta_i^2/\Gamma_i^2}). \tag{35}$$

本文给出了转动相对论 Hamilton 系统的场方法.

4.2　相对论 Birkhoff 系统的场方法

文献[28]研究了相对论 Birkhoff 系统动力学理论.在本文中,用

$$m_i=\frac{m_{oi}}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol r}_i^2/c^2}}\qquad (i=1,\cdots,N), \tag{36}$$
$$B^*=B^*(m_i(t,a^\mu),t,a^\mu),$$
$$R_\nu^*=R_\nu^*(m_i(t,a^\mu),t,a^\mu)$$
$$(\nu,\mu=1,\cdots,2n;i=1,\cdots,N) \tag{37}$$

分别替代(1)和(2)式,则本文转化给出相对论 Birkhoff 系统动力学的场方法.

4.3　经典转动 Birkhoff 系统的场方法

在 $\dot\theta_i\ll\Gamma_i$ 的经典近似下

$$I_i=\frac{I_{oi}}{\sqrt{1-\dot\theta_i^2/\Gamma_i^2}}\approx I_{oi}\qquad (i=1,\cdots,N), \tag{38}$$
$$B^*=B^*(I_i(t,a^\mu),t,a^\mu)\approx B(t,a^\mu),$$
$$R_\nu^*=R_\nu^*(I_i(t,a^\mu),t,a^\mu)\approx R_\nu(t,a^\mu)$$
$$(\nu,\mu=1,\cdots,2n;i=1,\cdots,N). \tag{39}$$

本文蜕化给出了经典转动 Birkhoff 系统动力学的场方法.

[1]　M. Carmeli, *Found. Phys.*, **15**(1985), 175, 889, 1019.

[2]　M. Carmeli, *Inter. J. Theor. Phys.*, **25**(1986), 89.

[3] S.K.Luo, *J. Beijing Institute of Technology*, **16**(S1)(1996), 154(in Chinese)[罗绍凯,北京理工大学学报,**16**(S1)(1996),154].

[4] S.K.Luo, *Appl. Math. Mech.*, **19**(1998), 45.

[5] J.L.Fu, X.W.Chen, S.K.Luo, *Appl. Math. Mech.*, **20**(1999), 1266.

[6] J.L.Fu, X.W.Chen, S.K.Luo, *Appl. Math. Mech.*, **21**(2000), 549.

[7] Y.L.Zhang, Y.F.Qiao, Y.P.Ma, *Acta Mech. Sol. Sin.*, **20**(1999), 356(in Chinese)[张耀良、乔永芬、马云鹏,固体力学学报,**20**(1999),356].

[8] J.H.Fang, *Acta Phys. Sin.*, **49**(2000), 1028(in Chinese)[方建会,物理学报,**49**(2000),1028].

[9] G.P.Guo, J.F.Zhang, *J. Shangqiu Teachers College*, **17**(2001), 17(in Chinese)[郭冠平、张解放,商丘师范学院学报,**17**(2001),17].

[10] G.D.Birkhoff, Dynamical System(AMS College Pub., New York, Providence, RI, 1927).

[11] R.M.Santilli, Foundations of Theoretical Mechanics Ⅱ(Springer-Verlag, New York, 1983).

[12] F.X.Mei, R.C.Shi, Y.F.Zhang, H.B.Wu, Dynamics of Birkhoff System(Beijing Institute of Technology Press, Beijing, 1996)(in Chinese)[梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬,Birkhoff 系统动力学(北京理工大学出版社,北京,1996)].

[13] F.X.Mei, Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Contrained Mechanical Systems (Science Press, Beijing, 1999)(in Chinese)[梅凤翔,李群和李代数对约束力学系统的应用(科学出版社,北京,1999)].

[14] F.X.Mei, *Sci. China*, **A36**(1993), 1456.

[15] F.X.Mei, *Chin. Sci. Bull.*, **40**(1995), 1947(in Chinese)[梅凤翔,科学通报,**40**(1995),1947].

[16] F.X.Mei, *Chin. Sci. Bull.*, **41**(1996), 641.

[17] F.X.Mei, *Chin. Sci. Bull.*, **44**(1999), 318.

[18] S.K.Luo, J.L.Fu, X.W.Chen, *Acta Phys. Sin.*, **50**(2001), 383(in Chinese)[罗绍凯、傅景礼、陈向炜,物理学报,**50**(2001),383].

[19] S.K.Luo, X.W.Chen, J.L.Fu, *Chin. Phys.*, **10**(2001), 271.

[20] B.Vujanović, *Inter. J. Non-Linear Mech.*, **19**(1984), 383.

[21] F.X.Mei, *Acta Mech. Sin.*, **5**(1989), 260.

[22] F.X.Mei, *Acta Mech. Sin.*, **6**(1990), 160.

[23] F.X.Mei, *Appl. Math. Mech.*, **11**(1990), 569.

[24] F.X.Mei, *Appl. Math. Mech.*, **13**(1992), 181.

[25] S.K.Luo, *Appl. Math. Mech.*, **15**(1994), 981.

[26] J.L.Fu, S.K.Luo, Modern Mathematics and Mechanics-Ⅶ(Shanghai University Press, Shanghai, 1997), p.597(in Chinese)[傅景礼、罗绍凯,现代数学和力学(上海大学出版社,上海,1997),第597页].

[27] X.W.Chen, S.K.Luo, *Appl. Math. Mech.*, **19**(1998), 479.

[28] J.L.Fu, X.M.Wang, *Acta Phys. Sin.*, **49**(2000), 1023(in Chinese)[傅景礼、王新民,物理学报,**49**(2000),1023].

A FIELD METHOD FOR SOLVING THE EQUATIONS OF MOTION OF A ROTATIONAL REALTIVISTIC BIRKHOFFIAN SYSTEM*

LUO SHAO-KAI[1)2)] GUO YONG-XIN[3)] CHEN XIANG-WEI[1)] FU JING-LI[1)]

[1)](*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics, Shangqiu Teachers College, Shangqiu* 476000, *China*)

[2)](*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics, Changsha University, Changsha* 410003, *China*)

[3)](*Department of Physics, Liaoning University, Shenyang* 110036, *China*)

(Received 10 April 2001; revised manuscript received 11 May 2001)

ABSTRACT

A field method for solving the equations of motion of a rotational relativistic Birkhoffian system is obtained. An example to illustrate the application of the method is given.

Keywords: rotational relativisty, Birkhoffian dynamics, integration method

PACC: 0316, 0320, 0412

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No.19972010), the Natural Science Foundation of Henan Province, China (Grant Nos.998040080, 984053100 and 934060800), and the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China(Grant Nos.99011104 and 20021004).