第 50 卷 第 11 期 2001 年 11 月
1000-3290/2001/50(11)/2053-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50, No.11, November, 2001

转动相对论系统动力学的积分理论*

罗绍凯[1)2)] 郭永新[3)] 陈向炜[1)]

[1)](商丘师范学院数学力学与数学物理研究所,商丘 476000)

[2)](长沙大学数学力学与数学物理研究所,长沙 410003)

[3)](辽宁大学物理系,沈阳 110036)

(2001 年 5 月 5 日收到;2001 年 5 月 26 日收到修改稿)

建立转动相对论系统动力学方程的积分理论.给出系统运动的第一积分,分别利用系统的循环积分和能量积分降阶运动方程,得到推广的 Routh 方程和推广的 Whittaker 方程,建立系统运动的正则方程和变分方程,并由第一积分构造系统的积分不变量.给出系统的 Poincaré-Cartan 型积分变量关系和积分不变量.

关键词:转动相对论,运动方程,积分方法

PACC:0316,0412

1 引 言

为了解决高速转动的动力学问题,Carmeli 于 1985 年建立了转动相对论力学理论[1,2].1996 年以来,文献[3,4]建立了转动相对论系统的分析力学理论.近年来,关于转动相对论系统动力学的研究,在以下三个方面得以发展:一是转动相对论系统分析力学基本理论的进一步发展[5,6],二是考虑具有质量分离或并入的转动相对论系统分析动力学的研究[7—12],三是转动相对论 Birkhoff 系统动力学理论的建立[13,14].但是,以往的工作多限于变分原理、运动方程以及对称性与守恒量的研究,而对于转动相对论系统动力学方程基本积分方法的研究甚少.

复杂系统动力学方程的积分求解是现代数学力学和数学物理学科发展的重要方面之一.本文较全面地建立转动相对论系统动力学方程的积分理论,包括第一积分、Routh 降阶法、Whittaker 降阶法、积分不变量的构造、Poincaré-Cartan 型和 Poincaré 型积分变量关系与积分不变量等.最后给出一些推论.

本文与文献[3—6]构成了转动相对论系统分析力学的较为完整的基本理论框架.

2 转动相对论系统的第一积分

研究 N 个粒子构成的力学系统绕定轴的转动,在 t 时刻第 i 个粒子绕定轴的角速度为 $\dot{\theta}_i$,i 粒子的极限角速度为 Γ_i,经典转动惯量为 I_{oi},其相对论性转动惯量为[2,3]

$$I_i = \frac{I_{oi}}{\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}} \qquad (i=1,\cdots,N). \tag{1}$$

该转动相对论系统的位形由广义坐标 q_s ($s=1,\cdots,n$)确定,其运动受有 g 个理想 Четаев 型约束

$$f_\rho(q_s,\dot{q}_s,t)=0,\ \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0 \qquad (\rho=1,\cdots,g). \tag{2}$$

构造转动相对论系统的广义动能函数

$$T_r^* = \sum_{i=1}^{N} I_{oi}\Gamma_i^2\left(1-\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}\right), \tag{3}$$

则系统的运动满足转动相对论系统的 Routh 方程[4]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r^*}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T_r^*}{\partial q_s}=Q_s+\Lambda_s,$$

$$\Lambda_s=\sum_{\rho=1}^{g}\lambda_\rho\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,\cdots,n), \tag{4}$$

其中 Q_s 为广义力,Λ_s 为广义约束反力,λ_ρ 为待定乘子.

把作用于系统的主动力分为有势力和非有势力两部分

$$Q_s=-\frac{\partial V}{\partial q_s}+Q_s'(q_k,\dot{q}_k,t),\ V=V(q_k) \qquad (s,k=1,\cdots,n). \tag{5}$$

构造转动相对论系统的广义 Lagrange 函数

$$L_r^* = T_r^* - V, \tag{6}$$

* 河南省自然科学基金(批准号:934060800 和 984053100)、辽宁省自然科学基金(批准号:20021004)及辽宁省教育厅科研基金(批准号:99011104)资助的课题.

则方程(4)可以写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_r^*}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L_r^*}{\partial q_s}=Q_s'+\Lambda_s \qquad (s=1,\cdots,n). \tag{7}$$

对于方程组(2)和(7),如果满足如下条件:

1) Lagrange 函数 L_r^* 不显含某些广义坐标 q_a

$$\frac{\partial L_r^*}{\partial q_a}=0 \qquad (a=1,\cdots,\alpha\leqslant n). \tag{8}$$

2) 约束方程 f_ρ 不显含 $\dot{q}_a$

$$\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_a}=0 \qquad (\rho=1,\cdots,g;a=1,\cdots,\alpha\leqslant n). \tag{9}$$

3) q_a 对应的各广义力为零

$$Q_a'=0 \qquad (a=1,\cdots,\alpha\leqslant n), \tag{10}$$

则转动相对论系统的运动存在 α 个循环积分

$$\frac{\partial L_r^*}{\partial \dot{q}_a}=\beta_a=\mathrm{const} \qquad (a=1,\cdots,\alpha\leqslant n). \tag{11}$$

这就是转动相对论系统的广义动量守恒量.

为了求得能量积分,对于方程(7),得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r^*}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L_r^*\right)=\sum_{s=1}^{n}Q_s'\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{g}\lambda_\rho\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-\frac{\partial L_r^*}{\partial t}. \tag{12}$$

(12)式称为转动相对论系统运动的能量方程.因此,如果满足如下条件:

1) 约束方程(2)对 $\dot{q}_s$ 是齐次函数

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=kf_\rho \qquad (k=1,2,\cdots,n). \tag{13}$$

2) 非势广义力的功率之和等于零

$$\sum_{s=1}^{n}Q_s'\dot{q}_s=0. \tag{14}$$

3) Lagrange 函数 L_r^* 不显含时间 t

$$\frac{\partial L_r^*}{\partial t}=0, \tag{15}$$

则转动相对论系统的运动存在能量积分

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r^*}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L_r^*=h=\mathrm{const}. \tag{16}$$

比(13)—(15)式更为一般的条件为

$$\sum_{s=1}^{n}Q_s'\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{g}\lambda_\rho\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-\frac{\partial L_r^*}{\partial t}=0. \tag{17}$$

如果满足条件(17)式,则有能量积分(16)式.

3 转动相对论系统动力学方程的 Routh 降阶法

1877 年,Routh 首创利用循环积分降阶完整保守系统运动方程的方法[15],100 多年来,深受数学、力学、物理学界的重视.刘端等人成功地把这种方法发展用于非完整系统[16]、Vacco 动力学系统[17]、变质量系统[18]和非惯性系统[19].下面把 Routh 方法推广应用于转动相对论系统动力学方程的降阶.

假如由(11)式可解出 α 个 $\dot{q}$,记作

$$\dot{q}_a=h_a(q_{\alpha+1},\cdots,q_n;\beta_1,\cdots,\beta_\alpha;\dot{q}_{\alpha+1},\cdots,\dot{q}_n;t) \qquad (a=1,\cdots,\alpha), \tag{18}$$

构造转动相对论系统的 Routh 函数

$$R_r=\tilde{L}_r^*-\sum_{a=1}^{\alpha}\beta_a h_a, \tag{19}$$

其中

$$\tilde{L}_r^*(q_{\alpha+1},\cdots,q_n;\beta_1,\cdots,\beta_\alpha;\dot{q}_{\alpha+1},\cdots,\dot{q}_n;t)=L_r^*(q_{\alpha+1},\cdots,q_n;h_1,\cdots,h_\alpha;\dot{q}_{\alpha+1},\cdots,\dot{q}_n;t). \tag{20}$$

由(19)和(20)式得

$$\frac{\partial R_r}{\partial q_{\alpha+d}}=\frac{\partial L_r^*}{\partial q_{\alpha+d}}+\sum_{a=1}^{\alpha}\frac{\partial L_r^*}{\partial \dot{q}_a}\frac{\partial h_a}{\partial q_{\alpha+d}}-\sum_{a=1}^{\alpha}\beta_a\frac{\partial h_a}{\partial q_{\alpha+d}} \qquad (d=1,\cdots,n-\alpha), \tag{21}$$

$$\frac{\partial R_r}{\partial \dot{q}_{\alpha+d}}=\frac{\partial L_r^*}{\partial \dot{q}_{\alpha+d}}+\sum_{a=1}^{\alpha}\frac{\partial L_r^*}{\partial \dot{q}_a}\frac{\partial h_a}{\partial \dot{q}_{\alpha+d}}-\sum_{a=1}^{\alpha}\beta_a\frac{\partial h_a}{\partial \dot{q}_{\alpha+d}} \qquad (d=1,\cdots,n-\alpha), \tag{22}$$

$$\frac{\partial R_r}{\partial \beta_a}=\sum_{j=1}^{\alpha}\frac{\partial L_r^*}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial h_j}{\partial \beta_a}-\sum_{j=1}^{\alpha}\beta_j\frac{\partial h_j}{\partial \beta_a}-h_a \qquad (a=1,\cdots,\alpha). \tag{23}$$

注意到(11)和(18)式,则有

$$\frac{\partial R_r}{\partial q_{\alpha+d}}=\frac{\partial L_r^*}{\partial q_{\alpha+d}}, \qquad \frac{\partial R_r}{\partial \dot{q}_{\alpha+d}}=\frac{\partial L_r^*}{\partial \dot{q}_{\alpha+d}} \qquad (d=1,\cdots,n-\alpha), \tag{24}$$

$$\frac{\partial R_r}{\partial \beta_a}=-\dot{q}_a \qquad (a=1,\cdots,\alpha). \tag{25}$$

将(24)式代入(7)式后面$(n-\alpha)$个方程,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R_r}{\partial \dot{q}_{\alpha+d}}-\frac{\partial R_r}{\partial q_{\alpha+d}}=Q_{\alpha+d}'+\sum_{\rho=1}^{g}\lambda_\rho\left(\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_{\alpha+d}}\right) \qquad (d=1,\cdots,n-\alpha), \tag{26}$$

()表示其中 $\dot{q}_a$ 用(18)式替代.方程(26)称为转动相对论系统的广义 Routh 方程,它与方程(25)及约束方程(2)构成封闭的方程组.方程(26)与方程(7)保持有相同形式,但方程的个数已减少到$(n-\alpha)$个,实现了方程(7)的降阶,其余 α 个方程可由循环积分(11)或(25)式独立给出.

4 转动相对论系统动力学方程的 Whittaker 降阶法

1904 年,Whittaker 利用能量积分降阶完整保守

系统的运动方程,得到著名的 Whittaker 方程[20].梅凤翔等人把 Whittaker 方法用于非完整系统[21]、广义力学系统[22]、Vacco 动力学系统[17]和变质量系统[23].下面把 Whittaker 方法推广用于降阶转动相对论系统的动力学方程.

令

$$\dot{q}_\nu = \dot{q}_1 q'_\nu, q'_\nu = \frac{\mathrm{d}q_\nu}{\mathrm{d}q_1} \qquad (\nu = 2, \cdots, n), \tag{27}$$

用(27)式替换 L_r^* 中的 $\dot{q}_\nu$,得到 $\Omega(q'_\nu, \dot{q}_1, q_s) = L_r^*(\dot{q}_s, q_s)$,则有

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L_r^*}{\partial \dot{q}_1} + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{\partial L_r^*}{\partial q'_\nu}\frac{q'_\nu}{\dot{q}_1}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q'_\nu} = \dot{q}_1 \frac{\partial L_r^*}{\partial \dot{q}_\nu}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial q_s} = \frac{\partial L_r^*}{\partial q_s}$$
$$(\nu = 2, \cdots, n; s = 1, \cdots, n). \tag{29}$$

将(27)式代入能量积分(16)式,解出 $\dot{q}_1 = \dot{q}_1(q'_\nu, q_s)$,并代入(28)式,定义转动相对论系统的 Whittaker 函数

$$W_r(q'_\nu, q_s) \equiv \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} \qquad (\nu = 2, \cdots, n; s = 1, \cdots, n), \tag{30}$$

则有

$$\frac{\partial W_r}{\partial q'_\nu} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q'_\nu \partial \dot{q}_1} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_\nu}, \tag{31}$$

$$\frac{\partial W_r}{\partial q_s} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_s \partial \dot{q}_1} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_s}. \tag{32}$$

利用(28)式及 $L_r^* \equiv \Omega$,能量积分(16)式改写为

$$\dot{q}_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} = h + \Omega. \tag{33}$$

对上式微分,得

$$\dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_\nu} + \dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \partial q'_\nu} - \frac{\partial \Omega}{\partial q'_\nu} = 0, \tag{34}$$

$$\dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_s} + \dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \partial q_s} - \frac{\partial \Omega}{\partial q_s} = 0. \tag{35}$$

分别比较(31)与(34)式、(32)与(35)式,并利用(29)式,得

$$\frac{\partial W_r}{\partial q'_\nu} = \frac{\partial L_r^*}{\partial \dot{q}_\nu}, \quad \frac{\partial W_r}{\partial q_s} = \frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial L_r^*}{\partial q_s}$$
$$(\nu = 2, \cdots, n; s = 1, \cdots, n). \tag{36}$$

令 $\varphi_\rho(\dot{q}_1, q'_\nu, q_s) = f_\rho(\dot{q}_1 \dot{q}_\nu, q_s)$, $f_\rho^*(q'_\nu, q_s) \equiv \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \dot{q}_1}$,同理可得

$$\frac{\partial f_\rho^*}{\partial q'_\nu} = \frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_\nu}, \quad \frac{\partial f_\rho^*}{\partial q_s} = \frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial f_\rho}{\partial q_s}$$
$$(\nu = 2, \cdots, n; s = 1, \cdots, n). \tag{37}$$

将(36)和(37)式代入(7)式后面($n-1$)个方程,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_1}\frac{\partial W_r}{\partial q'_\nu} - \frac{\partial W_r}{\partial q_\nu} = \frac{1}{\dot{q}_1}\left(Q'_\nu + \sum_{\rho=1}^{g} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial q'_\nu}\right)$$
$$(\nu = 2, \cdots, n). \tag{38}$$

称(38)式为转动相对论系统的广义 Whittaker 方程.至此,已将方程(7)的 n 个自由度问题降阶为($n-1$)个自由度问题.

在方程(7)中 q_1 是循环坐标的特殊情况下,方程(38)也不含 q_1,那么可得新的能量积分

$$\sum_{\nu=2}^{n} \frac{\partial W_r}{\partial q'_\nu} q'_\nu - W_r = \mathrm{const}. \tag{39}$$

应用(39)式,又可用上述方法将方程(38)降阶为($n-2$)个自由度问题.如此在同样条件下,此降阶方法可继续使用.

5 转动相对论系统积分不变量的构造

Whittaker[24]曾指出 对于完整保守系统,已知一个第一积分可以确定一个积分不变量.梅凤翔证明这一结论对非完整系统也适用[25].文献[26,27]把该结论推广到非等时变分和变质量系统相对运动情形.下面利用转动相对论系统的第一积分构造其积分不变量.

沿用文献[25]的思想,把方程(7)作为一个有条件的完整系统问题来研究,其中方程(2)看作方程(7)的特殊的第一积分.对于方程(2)和(7),可在积分之前求出 λ_ρ 作为 $\dot{q}_s, q_s, t$ 的函数,引入转动相对论系统的广义动量和哈密顿函数[4]

$$p_s = \frac{\partial L_r^*}{\partial \dot{q}_s}, \quad H_r(q_s, p_s, t) = \sum_{s=1}^{n} p_s \dot{q}_s - L_r^*$$
$$(s = 1, \cdots, n), \tag{40}$$

则方程(7)可写为正则形式

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H_r}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H_r}{\partial q_s} + \widetilde{Q}'_s + \widetilde{\Lambda}_s$$
$$(s = 1, \cdots, n), \tag{41}$$

其中记号 ~ 表示 $\dot{q}$ 用 q, p, t 代换所得表达式.在求解方程(2)和(7)的运动时,可先积分方程(41),然后再施加约束方程(2)对初始条件的限制.

对于方程(41),在非等时变分条件下,用 $q_s + \Delta q_s, p_s + \Delta p_s, t + \Delta t$ 分别替代 q_s, p_s, t,展开后并忽略 $\Delta q_s, \Delta p_s, \Delta t$ 的二阶以上小量,得转动相对论系统的非等时变分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta q_s = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H_r}{\partial p_s \partial q_k}\Delta q_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H_r}{\partial p_s \partial p_k}\Delta p_k + \frac{\partial H_r}{\partial p_s \partial t}\Delta t + \frac{\partial H_r}{\partial p_s}(\Delta t)^{\cdot} \quad (s = 1,\cdots,n),\tag{42}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta p_s = -\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H_r}{\partial q_s \partial q_k}\Delta q_k - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H_r}{\partial q_s \partial p_k}\Delta p_k - \frac{\partial H_r}{\partial q_s \partial t}\Delta t + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_k}(\widetilde{Q}'_s + \widetilde{\Lambda}_s)\Delta q_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_k}(\widetilde{Q}'_s + \widetilde{\Lambda}_s)\Delta p_k + \frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{Q}'_s + \widetilde{\Lambda}_s)\Delta t - \frac{\partial H_r}{\partial q_s}(\Delta t)^{\cdot} + (\widetilde{Q}'_s + \widetilde{\Lambda}_s)(\Delta t)^{\cdot} \quad (s = 1,\cdots,n).\tag{43}$$

利用方程(42)和(43),可以证明:如果方程组(41)有形如

$$\Phi_r(q_s, p_s, t) = \mathrm{const}.\tag{44}$$

的一个第一积分,那么表达式

$$u = \int\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \Phi_r}{\partial q_s}\Delta q_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \Phi_r}{\partial p_s}\Delta p_s + \frac{\partial \Phi_r}{\partial t}\Delta t\right)\tag{45}$$

是转动相对论系统的一个积分不变量.

实际上,利用方程(41)—(43),得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \int\sum_{s=1}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial q_s}\left[(\Phi_r, H_r) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \Phi_r}{\partial p_k}(\widetilde{Q}'_k + \widetilde{\Lambda}_k) + \frac{\partial \Phi_r}{\partial t}\right]\Delta q_s + \frac{\partial}{\partial p_s}\left[(\Phi_r, H_r) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \Phi_r}{\partial p_k}(\widetilde{Q}'_k + \widetilde{\Lambda}_k) + \frac{\partial \Phi_r}{\partial t}\right]\Delta p_s\right\} + \frac{\partial}{\partial t}\left[(\Phi_r, H_r) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \Phi_r}{\partial p_k}(\widetilde{Q}'_k + \widetilde{\Lambda}_k) + \frac{\partial \Phi_r}{\partial t}\right]\Delta t + \left[(\Phi_r, H_r) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \Phi_r}{\partial p_k}(\widetilde{Q}'_k + \widetilde{\Lambda}_k) + \frac{\partial \Phi_r}{\partial t}\right](\Delta t)^{\cdot},\tag{46}$$

其中$(\Phi_r, H_r) = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial q_s}\frac{\partial H_r}{\partial p_s} - \frac{\partial \Phi_r}{\partial p_s}\frac{\partial H_r}{\partial q_s}\right)$为 Poisson 括号. 因(44)式是方程(41)的一个第一积分,因此有

$$(\Phi_r, H_r) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \Phi_r}{\partial p_k}(\widetilde{Q}'_k + \widetilde{\Lambda}_k) + \frac{\partial \Phi_r}{\partial t} = 0.\tag{47}$$

将(47)式代入(46)式,便可证得(45)式为转动相对论系统的积分不变量.

反之,如果转动相对论系统有形如(45)式的一个积分不变量,那么该系统一定有一个第一积分(44)式.

6 转动相对论系统的 Poincaré-Cartan 积分变量关系和积分不变量

Poincaré-Cartan 积分不变量和 Poincaré 通用积分不变量在现代数学、力学和物理学中具有重要作用. 刘端于 1991 年建立了完整非保守系统的积分变量关系,给出系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量和 Poincaré 通用积分不变量[28]. 文献[29]把这一工作拓展到非 Четаев 型非完整约束系统. 下面建立转动相对论系统的 Poincaré-Cartan 型、Poincaré 型积分变量关系和积分不变量.

设系统运动的初末时刻、初末坐标都不是固定的,而是参数 γ 的函数

$$t_0 = t_0(\gamma),\quad q_s^0 = q_s^0(\gamma);\qquad t_1 = t_1(\gamma),\quad q_s^1 = q_s^1(\gamma),\tag{48}$$

且 $q_s, \dot{q}_s$ 的初始和终了值满足约束方程(2).

$$f_\rho(q_s^0, \dot{q}_s^0, t_0) = 0,\ f_\rho(q_s^1, \dot{q}_s^1, t_1) = 0.\tag{49}$$

利用非等时变分与等时变分之间的关系 $\Delta q_s = \delta q_s + \dot{q}_s\Delta t$,并注意到方程(7),计算转动相对论系统的哈密顿作用量 $S_r = \int_{t_0}^{t_1} L_r^* \mathrm{d}t$ 的非等时变分,得

$$\Delta S_r = \left(\sum_{s=1}^{n} p_s\Delta q_s - H_r\Delta t\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L_r^*}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_r^*}{\partial \dot{q}_s} + Q'_s + \Lambda_s\right)\delta q_s\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}(Q'_s + \Lambda_s)\delta q_s\mathrm{d}t\tag{50}$$

在 γ 值对应的路径均为真实路径的情况下,有

$$\Delta S_r = \sum_{s=1}^{n}(p_s\Delta q_s - H_r\Delta t)\Bigg|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}(Q'_s + \Lambda_s)\delta q_s\mathrm{d}t.\tag{51}$$

在$(2n+1)$维增广相空间中任取一条闭曲线 C_0

$$q_s = q_s^0(\gamma),\ p_s = p_s^0(\gamma),\ t = t_0(\gamma)\quad (0\leqslant\gamma\leqslant l;\ s = 1,\cdots,n),\tag{52}$$

其中 $\gamma = 0, \gamma = l$ 为 C_0 上同一点. 从 C_0 上各点各引一条直实路径,得正路管

$$q_s = q_s(t,\gamma),\ p_s = p_s(t,\gamma)\quad (0\leqslant\gamma\leqslant l;\ s = 1,\cdots,n),\tag{53}$$

其中 $q_s(t,0) = q_s(t,l), p_s(t,0) = p_s(t,l)$. 在此正路管上再任取一条包围正路管,且和正路管上每根曲线仅有一个交点的闭曲线 C_1

$$q_s=q_s^1(\gamma),\ p_s=p_s^1(\gamma),\ t=t_1(\gamma)$$
$$(0\leqslant\gamma\leqslant l\ ;s=1,\cdots,n). \tag{54}$$

将(51)式在$[0,l]$上积分,得

$$\begin{aligned}S_r(l)-S_r(0)&=\oint_{C_1}\Big[\sum_{s=1}^{n}p_s\Delta q_s-H_r\Delta t\Big]\\&-\oint_{C_0}\Big[\sum_{s=1}^{n}p_s\Delta q_s-H_r\Delta t\Big]\\&-\int_{t_0}^{t_1}\oint_C\sum_{s=1}^{n}(Q_s'+\Lambda_s)\delta q_s\mathrm{d}t=0,\end{aligned} \tag{55}$$

其中 t_0,t_1 具有任意性,C 为包围正路管且与每根轨线仅有一个交点的闭曲线

$$q_s=q_s(\gamma),\ p=p_s(\gamma),\ t=t(\gamma)$$
$$(0\leqslant\gamma\leqslant l\ ;s=1,\cdots,n). \tag{56}$$

将(55)式等号两端同除以(t_1-t_0),并取极限,利用中值定理,得到如下结论:

如果曲线 C 是围绕转动相对论系统正路管的任意闭曲线,则沿此曲线存在 Poincaré-Cartan 积分变量关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_r=\oint_C\sum_{s=1}^{n}(Q_s'+\Lambda_s)\delta q_s, \tag{57}$$

其中 $J_r=\oint_C\Big[\sum_{s=1}^{n}p_s\Delta q_s-H_r\Delta t\Big]$ 表示转动相对论系统的 Poincaré-Cartan 积分. 如果系统所受的主动力均为保守力 $Q_s'=0$,且存在势函数 $U(q_s)$ 使得广义约束反力 $\Lambda_s=\partial U/\partial q_s$,那么转动相对论系统存在 Poincaré-Catan 积分不变量

$$J_r=\oint_C\Big[\sum_{s=1}^{n}p_s\Delta q_s-H_r\Delta t\Big]=\mathrm{const}. \tag{58}$$

如果曲线 C 是由系统的同时状态组成,则 $\Delta t=0$,(57) 式成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_{r1}=\oint_C\sum_{s=1}^{n}(Q_s'+\Lambda_s)\delta q_s. \tag{59}$$

若(59) 式满足条件 $Q_s'=0$,$\Lambda_s=\partial U/\partial q_s$,则转动相对论系统存在 Poincaré 通用积分不变量.

7 讨　论

本文较为全面地建立了转动相对论系统动力学的基本积分理论,具有一般意义. 对于保守系($Q_s'=0$)、非保守系、完整系($\Lambda_s=0$)和非完整系,本文给出的转动相对论系统动力学的积分方法均适用.

如果用[30]

$$m_i=\frac{m_{oi}}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2}}\qquad(i=1,\cdots,N), \tag{60}$$

$$T^*=\sum_{i=1}^{N}m_{oi}c^2\big(1-\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2}\big), \tag{61}$$

分别替代(1)和(3)式,则本文可以转化给出相对论系统动力学方程的基本积分理论.

如果考虑具有质量分离或并入的广义反推力对方程(4)或方程(7)的影响[9],则本文可推广给出变转动惯量情形下转动相对论系统动力学的基本积分理论.

在 $\dot{\theta}\ll\Gamma_i$ 的经典近似下

$$I_i=\frac{I_{oi}}{\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}}\approx I_{oi}\qquad(i=1,\cdots,N), \tag{62}$$

取$\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}$关于 $\dot{\theta}_i/\Gamma_i$ 幂级数展开式的前两项,则

$$\begin{aligned}T_r^*&\approx I_{oi}\Gamma_i^2-I_{oi}\Gamma_i^2\left(1-\frac{\dot{\theta}_i^2}{2\Gamma_i^2}\right)\\&=\frac{1}{2}I_{oi}\dot{\theta}_i^2=T_r\qquad(i=1,\cdots,N),\end{aligned} \tag{63}$$

那么,本文给出了经典转动系统动力学的积分理论.

[1] M. Carmeli, *Found. Phys.*, **15**(1985), 175, 889, 1019.

[2] M. Carmeli, *Inter. J. Theor. Phys.*, **25**(1986), 89.

[3] S. K. Luo, *J. Beijing Inst. Technol.*, **16**(S1)(1996), 154 (in Chinese) [罗绍凯,北京理工大学学报,**16**(S1)(1996),154].

[4] S. K. Luo, *Appl. Math. Mech.*, **19**(1998), 45.

[5] J. L. Fu, X. W. Chen, S. K. Luo, *Appl. Math. Mech.*, **20**(1999), 1266.

[6] J. L. Fu, X. W. Chen, S. K. Luo, *Appl. Math. Mech.*, **21**(2000), 549.

[7] Y. L. Zhang, Y. F. Qiao, Y. P. Ma, *Acta Mech. Sol. Sin.*, **20**(1999), 356 (in Chinese) [张耀良、乔永芬、马云鹏,固体力学学报,**20**(1999),356].

[8] Y. F. Qiao, S. H. Zhao, *J. Shangqiu Teachers College*, **17**(2001), 11 (in Chinese) [乔永芬、赵淑红,商丘师范学院学报,**17**(2001),11].

[9] J. H. Fang, *Acta Phys. Sin.*, **49**(2000), 1028 (in Chinese) [方建会,物理学报,**49**(2000),1028].

[10] J.H.Fang,S.Q.Zhao,*Acta Phys. Sin.*,**50**(2001),390(in Chinese)[方建会、赵嵩卿,物理学报,**50**(2001),390].
[11] G.P.Guo,*Jiangxi Science*,**18**(2000),187(in Chinese)[郭冠平,江西科学,**18**(2000),187].
[12] G.P.Guo,J.F.Zhang,*J. Shangqiu Teachers College*,**17**(2001),17(in Chinese)[郭冠平、张解放,商丘师范学院学报,**17**(2001),17].
[13] S.K.Luo,J.L.Fu,X.W.Chen,*Acta Phys. Sin.*,**50**(2001),383(in Chinese)[罗绍凯、傅景礼、陈向炜,物理学报,**50**(2001),383].
[14] S.K.Luo,X.W.Chen,J.L.Fu,*Chin. Phys.*,**10**(2001), 271.
[15] E.J.Routh,A Treatise on the Stability of Motion(Macmillima,London,1877).
[16] D.Liu,*Chin. Sci. Bull.*,**33**(1988),1698(in Chinese)[刘 端,科学通报,**33**(1988),1698].
[17] S.K.Luo,*J. Xinjiang University*,**10**(1993),54(in Chinese)[罗绍凯,新疆大学学报,**10**(1993),54].
[18] S.K.Luo,*Acta Armamentarii*,**17**(1996),159(in Chinese)[罗绍凯,兵工学报,**17**(1996),159].
[19] S.K.Luo,*Appl. Math. Mech.*,**14**(1993),907.
[20] E.T.Whittaker,A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies with an Introduction to the Problem of Three Bodies (Cambridge,1904).
[21] F.X.Mei,*Appl. Math. Mech.*,**5**(1984),1041.
[22] F.X.Mei,*Appl. Math. Mech.*,**11**(1990),569.
[23] S.K.Luo,*Acta Mech. Sol. Sin.*,**15**(1994),277(in Chinese)[罗绍凯,固体力学学报,**15**(1994),277].
[24] E.T.Whittaker,A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies,4th ed.(Cambridge,1952).
[25] F.X.Mei,*Chin. Sci. Bull.*,**36**(1991),377.
[26] J.F.Zhang,*Chin. Sci. Bull.*,**37**(1992),661(in Chinese)[张解放,科学通报,**37**(1992),661].
[27] S.K.Luo,*Appl. Math. Mech.*,**15**(1994),147.
[28] D.Liu *et al.*, *Acta Mech. Sin.*,**23**(1991),617(in Chinese)[刘端等,力学学报,**23**(1991),617].
[29] S.K.Luo,*Acta Mech. Sol. Sin.*,**6**(1993),48.
[30] S.K.Luo,Proc. ICDVC(Peking University Press,Beijing,1990),p. 645.

INTEGRATION THEORY OF THE DYNAMICS OF A ROTATIONAL RELATIVISTIC SYSTEM*

LUO SHAO-KAI[1)2)] GUO YONG-XIN[3)] CHEN XIANG-WEI[1)]

[1)] (*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics*,*Shangqiu Teachers College*,*Shangqiu* 476000,*China*)

[2)] (*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics*, *Changsha University*, *Changsha* 410003, *China*)

[3)] (*Department of Physics*,*Liaoning University*,*Shenyang* 110036,*China*)

(Received 5 May 2001;revised manuscript received 26 May 2001)

ABSTRACT

The basic integration theory of the dynamics of a rotational relativistic system is constructed. Firstly,the first integrals of the system are given. Secondly,the order of the equation of motion is reduced by using cyclic integrals and energy integrals,and thus the generalized Routh equation and generalized Whittaker equation are obtained. Thirdly,the canonical equation and variational equation of the system are established,and the integral invariant is constructed by using the first integrals. Fourthly,the integral variants and integral invariants of the Poincaré-Cartan type are given. Finally,some deductions are given.

Keywords:rotational relativity, equation of motion, integral method
PACC:0316, 0412

* Project supported by the Natural Science Foundation of Henan Province,China(Grant Nos. 934060800 and 984053100), the Natural Science Foundation of Liaoning Province,China(Grant No. 20021004), and the Scientific Research Foundation of the Education Bureau of Liaoning Province,China (Grant No. 99011104).