第 50 卷 第 11 期 2001 年 11 月
1000-3290/2001/50(11)/2062-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50, No.11, November, 2001

非线性耦合微分方程组的精确解析解*

李志斌[1)†] 姚若侠[1)2)]

[1)] (华东师范大学计算机科学技术系, 上海 200062)

[2)] (渭南师范学院计算机科学系, 渭南 714000)

(2001 年 4 月 20 日收到; 2001 年 6 月 2 日收到修改稿)

提出了利用耦合的 Riccati 方程组的某些特解构造非线性微分方程组精确解析解的一种方法. 应用这种方法研究了两个耦合的常微分方程组, 系统地获得了它们的一些精确解. 给出了非线性浅水波近似方程组和非线性 Schrödinger-KdV 方程组若干新的孤波解.

关键词: 非线性耦合方程组, Riccati 方程组, 符号计算, 孤波

PACC: 0340K, 0220

1 引 言

在非线性物理学的不同分支学科中经常会遇到含有多个参数的非线性耦合微分方程组. 一个重要的数学问题是, 对于参数的不同取值如何构造这些方程组的精确解析解. 文献[1]提出了一种混合指数方法, 其基本思想是将非线性方程的解表示为相应线性方程指数解的无穷级数, 通过求解复杂的递推关系而获得非线性微分方程的闭合形式解. 文献[2]提出了一种齐次平衡方法, 通过计算非线性方程的拟解来获得未知函数变换, 进而将非线性微分方程化作齐次超定方程组, 求解齐次方程组而得到原方程的精确解. 这两种方法已广泛地应用到各种非线性常微分方程、非线性偏微分方程或方程组的求解之中[3—6].

本文分析耦合的 Riccati 方程组, 提出构造非线性微分方程(组)闭合形式解的另外一种代数方法. 在这种方法中, 非线性微分方程(组)的解被表示成为 Riccati 方程组某些特解的多项式. 用此方法, 只需求解两组超定的非线性代数方程组便可获得非线性微分方程(组)此种形式的精确解. 这些精确解都有着明确的物理意义. 尽管手工求解超定的非线性代数方程组并不容易, 然而由于计算机代数的发展, 人们可以借助像 Maple 或 Mathematica 这样的计算机代数系统有效地处理复杂而繁琐的代数计算, 从而获得非线性代数方程组的解. 实践证明这种方法简便实用, 同混合指数方法、齐次平衡方法或其他方法相比可获得非线性常微分方程(组)更多和更一般的精确解.

考虑耦合的 Riccati 方程组

$$u' = -kuv, \quad v' = k(1-v^2), \tag{1}$$

其中 k 为非零常数. 容易核验方程组(1)有如下两组特殊解:

$$u = \pm\,\mathrm{sech}(kz), \quad v = \tanh(kz), \tag{2}$$

$$u = \pm\,\mathrm{csch}(kz), \quad v = \coth(kz). \tag{3}$$

这两组解分别满足关系 $v^2 = 1-u^2$ 和 $v^2 = 1+u^2$.

对给定的非线性耦合常微分方程组

$$F(\phi,\psi,\phi',\psi',\phi'',\psi'',\cdots) = 0,$$

$$G(\phi,\psi,\phi',\psi',\phi'',\psi'',\cdots) = 0, \tag{4}$$

尝试寻求如下形式的精确解:

$$\psi = \sum_{i=0}^{m} a_i u^i + \sum_{i=1}^{m} b_i v u^{i-1},$$

$$\phi = \sum_{i=0}^{n} c_i u^i + \sum_{i=1}^{n} d_i v u^{i-1}, \tag{5}$$

其中 a_i, b_i, c_i, d_i 为待定的实常数, $c_n^2 + d_n^2 \neq 0$. 如果方程组(4)有形如(5)式的解, 则可通过平衡出现在方程组(4)中的线性最高阶导数项和非线性项来确定参数 m 和 n. 一旦 m 和 n 求得, 将(5)式代入方程组(4), 反复利用(1)式, 可将方程组(4)中出现的 ϕ,ψ 的各阶导数用 ϕ,ψ 的多项式替代; 同时, 利用关系 $v^2 = 1-u^2$ 或 $v^2 = 1+u^2$ 可以消去 v 的所

* 国家重点基础研究发展规划项目(批准号: G1998030600)及上海市自然科学基金(批准号: ZD14012)资助的课题.

† E-mail: lizb@cs.ecnu.edu.cn

有高于 1 次的幂次. 合并同类项后，令 u 和 vu 的各次幂系数为零，便得到关于 a_i，b_i，c_i，d_i 及 k 的两组超定的代数方程组. 在计算机代数系统上设法求解代数方程组，即可得到非线性耦合微分方程组(4)形如(sech，tanh)和(csch，coth)的多项式形式的精确解. 在原始的物理问题中前者往往表示稳定的孤波解，而后者表示具有激波结构的发散解.

下面用这种方法研究两个耦合的非线性微分方程组，并给出具体的应用.

2　耦合的一阶微分方程组

考虑含有 6 个自由参数的耦合非线性微分方程组

$$\psi' = d\psi + h\psi\phi + s,\quad \phi' = p\phi + q\phi^2 + r\psi, \tag{6}$$

其中 $' := \mathrm{d}/\mathrm{d}z$，$z$ 为自变量，d，h，s，p，q，r 为参数.

为求方程组(6)形如(5)式的解，将 ψ' 与 $\psi\phi$ 平衡，ϕ' 与 ϕ^2，ψ 平衡，可得 $n=1$，$m=0,1,2$. 这样

$$\psi = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + b_1 v + b_2 vu,$$
$$\phi = c_0 + c_1 u + d_1 v, \tag{7}$$

其中 $c_1 \neq 0$ 或 $d_1 \neq 0$.

将(7)式代入方程组(6)，利用 Riccati 方程组及其特殊解(2)和(3)式所满足的不同关系，容易推导出两组决定未知常数 $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_0, c_1, d_1$ 及 k 的代数方程组

$$\begin{aligned}
&-ra_1 - pc_1 - 2qc_0c_1 = 0, \quad -db_1 - hb_1c_0 - ha_0d_1 = 0,\\
&-ka_1 - db_2 - hb_2c_0 - hb_1c_1 - ha_1d_1 = 0, \quad -2ka_2 - hb_2c_1 - ha_2d_1 = 0,\\
&-s - da_0 - ha_0c_0 - hb_1d_1 = 0, \quad -da_2 + kb_1 - ha_2c_0 - ha_1c_1 + hb_1d_1 = 0,\\
&-da_1 - kb_2 - ha_1c_0 - ha_0c_1 - hb_2d_1 = 0, \quad 2kb_2 - ha_2c_1 + hb_2d_1 = 0,\\
&-rb_1 - pd_1 - 2qc_0d_1 = 0, \quad -rb_2 - kc_1 - 2qc_1d_1 = 0,\\
&-ra_0 - pc_0 - qc_0^2 - qd_1^2 = 0, \quad -ra_2 - qc_1^2 + kd_1 + qd_1^2 = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

和

$$\begin{aligned}
&-ra_1 - pc_1 - 2qc_0c_1 = 0, \quad -db_1 - hb_1c_0 - ha_0d_1 = 0,\\
&-ka - 1 - db_2 - hb_2c_0 - hb_1c_1 - ha_1d_1 = 0, \quad -2ka_2 - hb_2c_1 - ha_2d_1 = 0,\\
&-s - da_0 - ha_0c_0 - hb_1d_1 = 0, \quad -da_2 - kb_1 - ha_2c_0 - ha_1c_1 - hb_1d_1 = 0,\\
&-da_1 - kb_2 - ha_1c_0 - ha_0c_1 - hb_2d_1 = 0, \quad -2kb_2 - ha_2c_1 - hb_2d_1 = 0,\\
&-rb_1 - pd_1 - 2qc_0d_1 = 0, \quad -rb_2 - kc_1 - 2qc_1d_1 = 0,\\
&-ra_0 - pc_0 - qc_0^2 - qd_1^2 = 0, \quad -ra_2 - qc_1^2 - kd_1 - qd_1^2 = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

利用符号计算系统 Maple，直接求解方程组(8)，可得 4 组非平凡解，由此得知方程组(6)拥有如下的精确解.

当 $s=0, h=2q$ 时

$$\psi = 0,\quad \phi = \frac{-p}{2q}\left[1 + \tanh\left(\frac{p}{2}z\right)\right], \tag{10}$$

当 $0<d<p$ 或 $p<d<0$，且 $h=q$，$s=d(d-p)\cdot(2d-p)/(qr)$ 时

$$\psi = \frac{p-2d}{qr}\sqrt{d(p-d)}\tanh(kz),$$
$$\phi = \frac{-d}{q} - \frac{\sqrt{d(p-d)}}{q}\tanh(kz), \tag{11}$$

其中 $k^2 = d(p-d)$.

当 $dp<0$，$h=q$，$s=-dp(d+p)/(qr)$时

$$\psi = \frac{dp}{qr} + \sqrt{-dp}\,\frac{p}{qr}\tanh(kz),$$
$$\phi = -\frac{\sqrt{-dp}}{q}\tanh(kz), \tag{12}$$

其中 $k^2 = -dp$.

当 $s=0$，$h=2dq/p$ 时

$$\psi = \frac{p(p-d)}{4qr}\mathrm{sech}^2\left(\frac{d}{2}z\right),$$
$$\phi = \frac{-p}{2q}\left[1 + \tanh\left(\frac{d}{2}z\right)\right]. \tag{13}$$

容易看出，非耦合解(10)式是耦合解(13)式当 $d=p$ 时的特殊情形. 求解代数方程组(9)，可以得到与上面 4 组解相伴的发散形式的解，这只需将(10)—(13)式中的 sech，tanh 换作 csch，coth 即可，但 csch^2 系数与 sech^2 的系数相差一个负号.

作为应用，考虑非线性浅水波近似方程组[7]

$$u_t - \alpha u u_x - H_x + \frac{1}{2}u_{xx} = 0,$$

$$H_t - (uH)_x - \frac{1}{2}\beta H_{xx} = 0. \tag{14}$$

文献[2]利用齐次平衡方法，文献[8]利用非线性变换方法分别获得了方程组(14)当 $\alpha=\beta=1$ 时的一组孤波解

$$u(x,t) = \frac{a}{2}\left[1+\tanh\frac{a}{2}\left(x+\frac{a}{2}t\right)\right],$$

$$H(x,t) = \frac{a^2}{4}\mathrm{sech}^2\frac{a}{2}\left(x+\frac{a}{2}t\right), \tag{15}$$

其中 a 为任意常数.

事实上，引入行波变换 $z=x-ct$，方程组(14)可化作常微分方程组(6)，其中 $d=-2c/\beta$，$h=-2/\beta$，$p=2c$，$q=\alpha$，$r=2$，s 为任意常数. 条件 $h=2dq/p$ 等价于 $\alpha=1$，故解(13)式表明对任意参数 $\beta(\beta\neq0)$方程组(14)拥有孤波解. 特别取 $\beta=1$，解(13)式即为(15)式. 不仅如此，由解(11)和(12)式知，当 $\alpha\beta=-2$ 时，方程组(14)还有如下两组新的纽状孤波解：

$$u_1(x,t) = -c-|c|\sqrt{-(\beta+1)}\tanh k(x-ct),$$

$$H_1(x,t) = c|c|\frac{\beta+2}{\beta}\sqrt{-(\beta+1)}\tanh k(x-ct), \tag{16}$$

其中 $k^2=-4c^2(\beta+1)/\beta^2$，$\beta<-1$，$c$ 为任意常数.

$$u_2(x,t) = |c|\sqrt{\beta}\tanh k(x-ct),$$

$$H_2(x,t) = c^2-c|c|\sqrt{\beta}\tanh k(x-ct), \tag{17}$$

其中 $k^2=4c^2\beta$，$\beta>0$，c 为任意常数.

3 耦合的二阶微分方程组

考虑耦合的非线性微分方程组

$$\psi'' = d\psi + h\psi\phi,\quad \phi'' = p\phi + q\phi^2 + r\psi^2, \tag{18}$$

其中 d,h,p,q,r 为 5 个自由参数.

方程组(18)出现于 Langmuir 电磁离子声波和地表混合磁层波等领域，文献[9]应用幂级数展开方法获得了方程组(18)若干形如 sech × tanh 和 sech^2 的精确解，最近文献[4]应用混合指数方法，详细分析了方程组(18)，较为系统地获得了一批精确解，其中包含了文献[9]的结果. 利用本文的方法发现文献[4]的结果不具有一般性，没有穷尽所有的可能.

为求方程组(18)形如(5)式的解，将(5)式代入方程组(18)，平衡 ψ'' 与 $\psi\phi$ 的阶数，同时平衡 ϕ'' 与 ϕ^2 和 ψ^2 的阶数，得 $n=2$，$m=0,1,2$. 因此

$$\psi = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + b_1 v + b_2 vu,$$

$$\phi = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + d_1 v + d_2 vu, \tag{19}$$

其中 $c_2\neq0$ 或 $d_2\neq0$.

与方程组(6)不同，这次我们得到了两个关于 11 个未知量 a_i，c_i，b_j，d_j($i=0,1,2$，$j=1,2$)及 k 的超定代数方程组，每个方程组都由 18 个方程所组成. 为求解这两个超定的代数方程组，我们或可应用 Ritt-吴消元法或可用 Gröbner 基方法. 不过本文使用一种更为有效的算法，其主要想法是利用这两个方程组自身的特点，就某个未知量是否为零，分两种不同情况，然后在每种情况下再考虑一些不同的子情况，如此等等. 应用这种算法在 Maple 上进行交互式计算，找到了这两个方程组许许多多的非平凡解. 由此发现了方程组(18)一些新的解和更一般的解，不仅如此，也得到了文献[9,4]用其他方法得到的所有精确解. 所获结果整理如下：

当 $p<0$ 时

$$\psi = 0,\ \phi = -\frac{p}{q}\left[1-\frac{3}{2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{-p}}{2}z\right)\right], \tag{20}$$

$$\psi = 0,\ \phi = -\frac{p}{q}\left[1+\frac{3}{2}\mathrm{csch}^2\left(\frac{\sqrt{-p}}{2}z\right)\right], \tag{21}$$

$$\psi = 0,\ \phi = -\frac{p}{q}[1+3\mathrm{csch}^2(\sqrt{-p}z) \mp 3\coth(\sqrt{-p}z)\mathrm{csch}(\sqrt{-p}z)]. \tag{22}$$

当 $p>0$ 时

$$\psi = 0,\ \phi = -\frac{3p}{2q}\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{p}}{2}z\right), \tag{23}$$

$$\psi = 0,\ \phi = +\frac{3p}{2q}\mathrm{csch}^2\left(\frac{\sqrt{p}}{2}z\right), \tag{24}$$

$$\psi = 0,\ \phi = \frac{3p}{q}[\mathrm{csch}^2(\sqrt{p}z) \pm \coth(\sqrt{p}z)\mathrm{csch}(\sqrt{p}z)]. \tag{25}$$

方程组(18)的非耦合形式解只有以上 6 组，其中(20)，(21)，(22)，(25)为新解. 耦合解有如下 18 组.

当 $p<3d$，$q=3h$ 时

$$\psi = \pm\sqrt{\frac{2}{3qr}(p-3d)(12d-p)}\,\mathrm{sech}(kz),$$

$$\phi = -\frac{p}{q}+\frac{2(p-3d)}{q}\mathrm{sech}^2(kz),\quad qr<0, \tag{26}$$

$$\psi = \pm\sqrt{\frac{2}{3qr}(p-3d)(p-12d)}\operatorname{csch}(kz),$$
$$\phi = -\frac{p}{q}+\frac{2(3d-p)}{q}\operatorname{csch}^2(kz),\quad qr>0, \tag{27}$$

其中 $k^2=(3d-p)/3$.

当 $d>0$，$q=3h$ 时

$$\psi = \pm\sqrt{\frac{6d}{qr}(p-4d)}\operatorname{sech}(kz),$$
$$\phi = -\frac{2d}{h}\operatorname{sech}^2(kz),\quad (p-4d)/qr>0, \tag{28}$$
$$\psi = \pm\sqrt{\frac{6d}{qr}(4d-p)}\operatorname{csch}(kz),$$
$$\phi = +\frac{2d}{h}\operatorname{csch}^2(kz),\quad (p-4d)/qr<0, \tag{29}$$

其中 $k^2=d$.

当 $p<6d$，$hr>0$ 或 $p>3d$，$hr<0$,但 $d<0$，$q=3h$ 时

$$\psi = \pm\sqrt{\frac{d(p-3d)}{hr}}\tanh(kz),$$
$$\phi = -\frac{1}{h}[d+2k^2\operatorname{sech}^2(kz)], \tag{30}$$
$$\psi = \pm\sqrt{\frac{d(p-3d)}{hr}}\coth(kz),$$
$$\phi = -\frac{1}{h}[d-2k^2\operatorname{csch}^2(kz)], \tag{31}$$

其中 $k^2=(p-6d\pm\sqrt{12d^2-4dp+p^2})/8$.

当 $d=p<0$，$(h-q)r>0$ 时

$$\psi = \pm\frac{d}{h}\sqrt{\frac{h-q}{r}}\left[1-\frac{3}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{-p}}{2}z\right)\right],$$
$$\phi = -\frac{d}{h}\left[1-\frac{3}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{-p}}{2}z\right)\right], \tag{32}$$
$$\psi = \pm\frac{d}{h}\sqrt{\frac{h-q}{r}}\left[1+\frac{3}{2}\operatorname{csch}^2\left(\frac{\sqrt{-p}}{2}z\right)\right],$$
$$\phi = -\frac{d}{h}\left[1+\frac{3}{2}\operatorname{csch}^2\left(\frac{\sqrt{-p}}{2}z\right)\right]. \tag{33}$$

当 $d=p>0$，$(h-q)r>0$ 时

$$\psi = \pm\frac{3d}{2h}\sqrt{\frac{h-q}{r}}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{p}}{2}z\right),$$
$$\phi = -\frac{3d}{2h}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{p}}{2}z\right), \tag{34}$$
$$\psi = \pm\frac{3d}{2h}\sqrt{\frac{h-q}{r}}\operatorname{csch}^2\left(\frac{\sqrt{p}}{2}z\right),$$
$$\phi = +\frac{3d}{2h}\operatorname{csch}^2\left(\frac{\sqrt{p}}{2}z\right). \tag{35}$$

当 $p<0$，$(h-q)r>0$，$h=q(d+p)/p$ 时

$$\psi = \pm\frac{3dq}{2h\sqrt{(h-q)r}}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{-p}}{2}z\right),$$
$$\phi = -\frac{d}{h-q}\left[1-\frac{3q}{2h}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{-p}}{2}z\right)\right], \tag{36}$$
$$\psi = \pm\frac{3dq}{2h\sqrt{(h-q)r}}\operatorname{csch}^2\left(\frac{\sqrt{-p}}{2}z\right),$$
$$\phi = -\frac{d}{h-q}\left[1+\frac{3q}{2h}\operatorname{csch}^2\left(\frac{\sqrt{-p}}{2}z\right)\right]. \tag{37}$$

当 $p>0$，$(h-q)r>0$，$h=q(d+p)/p$ 时

$$\psi = \pm\frac{dq}{h\sqrt{(h-q)r}}\left[1-\frac{3}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{p}}{2}z\right)\right],$$
$$\phi = -\frac{d}{h}\left[1+\frac{3q}{2(h-q)}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{p}}{2}z\right)\right], \tag{38}$$
$$\psi = \pm\frac{dq}{h\sqrt{(h-q)r}}\left[1+\frac{3}{2}\operatorname{csch}^2\left(\frac{\sqrt{p}}{2}z\right)\right],$$
$$\phi = -\frac{d}{h}\left[1-\frac{3q}{2(h-q)}\operatorname{csch}^2\left(\frac{\sqrt{p}}{2}z\right)\right]. \tag{39}$$

当 $d>0$，$p=2d(3q-h)/h$ 时

$$\psi = \pm 6\frac{d}{h}\sqrt{\frac{q-h}{r}}\operatorname{sech}(\sqrt{d}z)\tanh(\sqrt{d}z),$$
$$\phi = -6\frac{d}{h}\operatorname{sech}^2(\sqrt{d}z),\quad (q-h)r>0, \tag{40}$$
$$\psi = \pm 6\frac{d}{h}\sqrt{\frac{h-q}{r}}\operatorname{csch}(\sqrt{d}z)\coth(\sqrt{d}z),$$
$$\phi = +6\frac{d}{h}\operatorname{csch}^2(\sqrt{d}z),\quad (q-h)r>0. \tag{41}$$

当 $(q-h)r>0$，$dq/(2h-5q)>0$，$p=2dq(h-3q)/h(2h-5q)$ 时

$$\psi = \pm 6\frac{k^2}{h}\sqrt{\frac{q-h}{r}}\operatorname{sech}(kz)\tanh(kz),$$
$$\phi = -\frac{6k^2}{h}[1-\operatorname{sech}^2(kz)], \tag{42}$$
$$\psi = \pm 6\frac{k^2}{h}\sqrt{\frac{q-h}{r}}\operatorname{csch}(kz)\coth(kz),$$
$$\phi = -\frac{d}{h}+\frac{k^2}{h}[1+6\operatorname{csch}^2(kz)], \tag{43}$$

其中 $k^2=dq/(2h-5q)$.

解(30)，(31)，(42)和(43)式是本文首次发现的，文献[4]只得到了 $p=d<0$ 特殊情形下的(30)和(31)式. 相比之下,本文的解(30)和(31)式要一般得多，至于解(42)和(43)式则是全新的. 另外文献[4]对一些解的系数表示得不很规范，对此本文做了更正.

作为应用，考虑非线性 Schrödinger-KdV 耦合方

程组[10]

$$iS_t + S_{xx} = SL,\ L_t + \alpha LL_x + \beta L_{xxx} = |S|_x^2, \tag{44}$$

其中 L 为非线性色散介质中的实长波振幅，S 为复短波振幅，α, β 为参数.

在变换

$$S = \psi(x-ct)\exp\left[i\frac{c}{2}\left(x-\frac{c}{2}t-vt\right)\right],$$
$$L = \phi(x-ct) \tag{45}$$

下，方程组(44)可化为单变元 $z = x - ct$ 的实函数 ϕ 和 ψ 的常微分方程组(18)，其中 $d = -cv/2$，$h = 1$，$p = c/\beta$，$q = -\alpha/(2\beta)$，$r = 1/\beta$，c，v 为待定常数.

文献[11]利用 Hirota 方法获得了方程组(44)的 5 组孤波解，这些解均已涵盖在本文的结果之中. 作为新解，解(30)式表明对 $\alpha + 6\beta = 0$，方程组(44)还拥有如下孤波解：

$$S = \pm\frac{c}{2}\sqrt{v(2+3\beta v)}\tanh[k(x-ct)]$$
$$\cdot \exp\left[i\frac{c}{2}\left(x-\frac{c}{2}t-vt\right)\right],$$
$$L = \frac{cv}{2} - 2k^2\operatorname{sech}^2[k(x-ct)], \tag{46}$$

其中当 $\beta > 0$ 时，选择 $c < 0$，$v < -1/(3\beta)$ 或 $c > 0$，$v > -1/(3\beta)$；而当 $\beta < 0$ 时，选择 $c > 0$，$v > -2/(3\beta)$ 或 $c < 0$，$v < -1/(3\beta)$，k 满足 $k^2 = \frac{3}{8}vc + \frac{c}{8\beta}\left(1 \pm \sqrt{1 + 2\beta v + 3\beta^2 v^2}\right)$.

解(42)式表明在参数区域 $\beta < -\alpha/2$，$\alpha < 0$ 和 $\beta < -5\alpha/4$，$\alpha > 0$ 以及 $-5\alpha/4 < \beta < -\alpha/2$，$\alpha > 0$ 中分别选取 $c > 0$，$c < 0$ 和 $c > 0$，则耦合的孤波

$$S = \pm 3k^2\sqrt{-2(\alpha+2\beta)}\operatorname{sech}[k(x-ct)]$$
$$\cdot \operatorname{tahn}[k(x-ct)]\exp\left[i\frac{c}{2}\left(x-\frac{c}{2}t-vt\right)\right],$$
$$L = -6k^2\tanh^2[k(x-ct)], \tag{47}$$

满足方程组(44)，其中 $v = 2(5\alpha + 4\beta)/(3\alpha + 2\beta)$，$k = \sqrt{\alpha c/(5\alpha + 4\beta)}$.

本文获得的方程组(6)和(18)的所有解均已利用符号计算系统 Maple 得以验证.

[1] W. Hereman, P. Banerjee, A. Korpel, *J. Phys.*, **A19** (1986), 19.

[2] M.L. Wang, Y. B. Zhou, Z. B. Li, *Phys. Lett.*, **A26** (1996), 6027.

[3] W. Hereman, M. Takaoka, *J. Phys.*, **A23** (1990), 4805.

[4] M. Panigrahi, P. C. Dash, *Phys. Lett.*, **A261** (1999), 284.

[5] E. G. Fan, H. Q. Zhang, *Acta Phys. Sin.*, **47** (1998), 353 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆，物理学报，**47**(1998),353].

[6] Z. B. Li *et al.*, *Acta Phys. Sin.*, **50** (2001), 402 (in Chinese) [李志斌等，物理学报，**50**(2001),402].

[7] G. B. Whitham, *Proc. Roy. Soc.*, **A299** (1967), 6.

[8] Z. Y. Yan, H. Q. Zhang, *Acta Phys. Sin.*, **48** (1999), 1962 (in Chinese) [阎振亚、张鸿庆，物理学报，**48**(1999),1962].

[9] N. N. Rao, *J. Phys.*, **A22** (1989), 4813.

[10] T. Yoshinaga, M. Wakamiya, T. Kakutani, *Phys. Fluids*, **A3** (1991), 83.

[11] T. Yoshinaga, T. Kakutani, *J. Phys. Soc. Jap.*, **64** (1994), 445.

EXPLICIT EXACT SOLUTIONS TO NONLINEAR COUPLED DIFFERENTIAL EQUATIONS*

LI ZHI-BIN[1)†] YAO RUO-XIA[1)2)]
[1)] (*Department of Computer Science*, *East China Normal University*, *Shanghai* 200062, *China*)
[2)] (*Department of Computer Science*, *Weinan Teachers College*, *Weinan* 714000, *China*)
(Received 20 April 2001; revised manuscript received 2 June 2001)

ABSTRACT

A method for constructing explicit exact solutions of coupled ordinary nonlinear differential equations by using the special solutions of Riccati equations is proposed. Two coupled nonlinear differentiall equations are studied using this method, and several new solutions (either functional or parametrical) are explicitly obtained, in addition to rederiving all known solutions in a systematic way.

Keywords: coupled nonlinear differential equations, Riccati equations, symbolic computation, solitary wave
PACC: 0340K, 0220

* Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. G1998030600), and the Natural Science Foundation of Shanghai, China (Grant No. ZD14012).