第 50 卷 第 11 期 2001 年 11 月
1000-3290/2001/50(11)/2074-03
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.50, No.11, November, 2001

KdV-Burgers 方程的孤波解

吕克璞　石玉仁　段文山　赵金保
(西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州　730070)
(2001 年 5 月 13 日收到; 2001 年 6 月 16 日收到修改稿)

对双曲函数法进行了深入探讨, 推广了该方法的某些使用条件, 借助计算机代数系统 Mathematica, 进一步获得了 KdV-Burgers 方程的两组扭状孤波解.

关键词: 双曲函数法, KdV-Burgers 方程, 行波解, 计算机代数系统 Mathematica
PACC: 0340K, 0290

1　引　言

在研究液体内含有气泡流动以及弹性管内液体流动等问题时, 人们把控制方程归结为如下的 KdV-Burgers 方程[1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\delta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0, \tag{1}$$

其中 $\theta, \delta \neq 0$, 分别为耗散项和色散项系数. 文献[2]对方程(1)的解进行了定性分析, 文献[3]在一定条件下找到了它的一类行波解, 但要给出方程(1)在一般情况下的解析解, 仍然是个非常难的问题.

近年来, 文献[4—7]提出和发展了求解非线性发展方程的齐次平衡法. 在求解非线性方程的过程中, 该法得到了广泛的应用[8—14]. 文献[15]在此思想的基础上, 提出了双曲函数法, 并且用这种方法成功地找到了若干非线性方程的精确孤波解.

本文采用双曲函数法, 借助计算机代数系统 Mathematica, 获得了方程(1)的一类行波解. 这种方法也适用于求解其他非线性方程.

2　关于文献[15]中方法的分析

文献[15]中双曲函数法简述如下: 对于方程, 比如两个独立变量 x, t,

$$K(u, u_t, u_x, u_{xx}, \cdots)=0, \tag{2}$$

考虑其行波解

$$u(x,t)=\phi(\xi),\ \xi=kx-ct+l, \tag{3}$$

可将方程(2)化为关于 ϕ 的常微分方程 ODE. 假设其解为

$$\phi=\sum_{i=0}^{m}a_i f^i+\sum_{j=1}^{m}b_j f^{j-1}g, \tag{4}$$

其中

$$f=\frac{1}{\cosh\xi+r},\ g=\frac{\sinh\xi}{\cosh\xi+r}, \tag{5}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}=-fg,\ \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\xi}=1-g^2-rf,$$
$$g^2=1-2rf+(r^2-1)f^2. \tag{6}$$

分析此方法的使用, 文献[15]指出: 在确定孤波解 ϕ 的阶数 m 时, 是"通过平衡微分方程 ODE 的最高阶微分项和非线性项的阶数, 确定孤波解 ϕ 的阶数 m". 实际上, 这样确定出来的 m 是双曲函数法中孤波解 ϕ 的最高阶数, 而实际计算中, 可以取 m 比它小, 同样也有希望得到非线性方程的孤波解.

以文献[15]中 KdV 方程

$$u_t+uu_x+pu_{xxx}=0 \tag{7}$$

为例, 其对应常微分方程 ODE 为

$$-c\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}+k\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}+pk^3\frac{\mathrm{d}^3\phi}{\mathrm{d}\xi^3}=0. \tag{8}$$

文献[15]按其原则, 确定此时 $m=2$. 显然应该 $m>0$, 现取 $m=1$, 即取

$$\phi=a_0+a_1 f+b_1 g, \tag{9}$$

将(9)式代入(8)式并利用(6)式, 使得所得方程的各项中只含有 f 和 g 的幂次项, 且 g 的幂次项不大于 1. 合并 f 和 g 的同次幂项并取其系数为零, 就得到方程(7)相应的非线性代数方程组 AES 为

$$6k^3pa_1-6k^3pr^2a_1=0,$$
$$-6k^3p(r^2-1)^2b_1=0,$$
$$2k(r^2-1)(6k^2pr-a_1)b_1=0,$$

$$(-c+4k^3p+cr^2-7k^3pr^2+ka_0 -kr^2a_0+3kra_1)b_1=0,$$
$$-crb_1+k^3prb_1+kra_0b_1-ka_1b_1=0,$$
$$ca_1-k^3pa_1-ka_0a_1+krb_1^2=0,$$
$$6k^3pra_1-ka_1^2+kb_1^2-kr^2b_1^2=0. \tag{10}$$

用计算机代数系统 Mathematica 对此超定方程组求解，得到方程(7)的一组精确孤波解

$$u(x,t)=\frac{c-k^3p}{k}+6k^2p\frac{1}{\cosh(kx-ct+l)+1},$$

其中 k,c,l 为任意常数.

可见同样也得到了方程(7)的一组精确解，但文献[15]中并没有找到这组解.所以在确定 m 的时候，应该按文献[15]中的方法，先确定出 m 的最大值，再从 1 依次取起，这样可有希望找到非线性方程的更多的解.

3　KdV-Burgers 方程的行波解

按文献[15]中的方法，平衡方程(1)的最高阶导数项和非线性项的阶数，得到 $m=2$,故可取 $m=1$ 或 $m=2$.

(I)取 $m=1$，用和前面同样的方法确定相应的非线性代数方程组 AES，得

$$-6k^3(r^2-1)\delta a_1=0,$$
$$-6k^3(r^2-1)^2\delta b_1=0,$$
$$-k^2\theta a_1-crb_1+k^3r\delta b_1+kra_0b_1-ka_1b_1=0,$$
$$3k^2r\theta a_1-cb_1+cr^2b_1+4k^3\delta b_1-7k^3r^2\delta b_1 +ka_0b_1-kr^2a_0b_1+3kra_1b_1=0,$$
$$-2k^2(r^2-1)\theta a_1+12k^3r(r^2-1)\delta b_1 -2k(r^2-1)a_1b_1=0,$$
$$ca_1-k^3\delta a_1-ka_0a_1+k^2r\theta b_1+krb_1^2=0,$$
$$6k^3r\delta a_1-ka_1^2+2k^2\theta b_1-2k^2r^2\theta b_1+kb_1^2 -kr^2b_1^2=0. \tag{11}$$

用 Mathematica 求解上述关于 a_0,a_1,b_1,k,c 的超定代数方程组，得到方程(1)的一组孤波解

$$u(x,t)=\frac{c}{k}+6k^2\delta\frac{1}{\cosh(kx-ct+l)+1} -\frac{6}{5}k\theta\frac{\sinh(kx-ct+l)}{\cosh(kx-ct+l)+1},$$

其中 $k=\pm\frac{\theta}{5\delta}$,$c,l$ 为任意常数.

(II)取 $m=2$,用和前面同样的方法确定相应的非线性代数方程组 AES,得

$$-k^2a_1\theta-ka_1b_1-c(rb_1-b_2)+k^3(rb_1-b_2)\delta+ka_0(rb_1-b_2)=0,$$
$$ca_1-k^3a_1\delta-ka_0a_1+k^2(rb_1-b_2)\theta+kb_1(rb_1-b_2)=0,$$
$$-4k(r^2-1)(-6k^2\delta+6k^2r^2\delta+a_2)b_2=0,$$
$$3k^2ra_1\theta-4k^2a_2\theta-cb_1+cr^2b_1+4k^3b_1\delta-7k^3r^2b_1\delta+ka_0b_1-kr^2a_0b_1+3kra_1b_1 -2ka_2b_1-3crb_2+15k^3rb_2\delta+3kra_0b_2-2ka_1b_2=0,$$
$$2k^2a_1\theta-2k^2r^2a_1\theta+10k^2ra_2\theta-12k^3rb_1\delta+12k^3r^3b_1\delta+2ka_1b_1-2kr^2a_1b_1+5kra_2b_1-2cb_2 +2cr^2b_2+20k^3b_2\delta-50k^3r^2b_2\delta+2ka_0b_2-2kr^2a_0b_2+5kra_1b_2-3ka_2b_2=0,$$
$$6k^2a_2\theta-6k^2r^2a_2\theta-6k^3b_1\delta+12k^3r^2b_1\delta-6k^3r^4b_1\delta+3ka_2b_1-3kr^2a_2b_1-60k^3rb_2\delta +60k^3r^3b_2\delta-3k(r^2-1)a_1b_2+7kra_2b_2=0,$$
$$6k^3ra_1\delta-ka_1^2+2ca_2-8k^3a_2\delta-2ka_0a_2+2k^2b_1\theta-2k^2r^2b_1\theta+kb_1^2-kr^2b_1^2 +6k^2rb_2\theta+4krb_1b_2-kb_2^2=0,$$
$$6k^3a_1\delta-6k^3r^2a_1\delta+30k^3ra_2\delta-3ka_1a_2+6k^2b_2\theta-6k^2r^2b_2\theta+3kb_1b_2-3kr^2b_1b_2+3krb_2^2=0,$$
$$24k^3a_2\delta-24k^3r^2a_2\delta-2ka_2^2+2kb_2^2-2kr^2b_2^2=0. \tag{12}$$

Mathematica 解此超定非线性代数方程组有一定的困难,若令 $b_2=0$,可得到方程(1)的一组孤波解

$$u(x,t)=\frac{1}{25}\left(\frac{25c}{k}-100k^2\delta+\frac{\theta^2}{\delta}\right)+12k^2\delta \cdot\operatorname{sech}^2(kx-ct+l)-\frac{12}{5}k\theta\tanh(kx-ct+l),$$

其中 $k=\pm\frac{\theta}{10\delta}$,$c,l$ 为任意常数.

4 结 束 语

在对文献[15]中的双曲函数法作了进一步的探讨后，成功得到了 KdV-Burgers 方程的孤波解. 在运用该法的过程中，同时也得到了 Burgers 方程和 KdV 方程的若干孤波解. 实践证明这种方法可以用来求解一大类非线性方程，相信它在非线性方程的求解中将会发挥其重要作用.

[1] R. S. Johnson, Ph. D. Thesis, University of London (London, 1969).

[2] K. Y. Guan *et al.*, *Sci. China*, **A1**(1987), 64[管克英等，中国科学，**A1**(1987), 64].

[3] X. K. Xin *et al.*, *Acta Mech. Sin.*, **18**(1986), 193[忻孝康等，力学学报，**18**(1986), 193].

[4] M. L. Wang *et al.*, *Phys. Lett.*, **A213**(1996), 279.

[5] M. L. Wang, *Phys. Lett.*, **A216**(1996), 67.

[6] E. G. Fan *et al.*, *Acta Phys. Sin.*, **46**(1997), 1254(in Chinese)[范恩贵等，物理学报，**46**(1997), 1254].

[7] E. G. Fan *et al.*, *Acta Phys. Sin.*, **47**(1998), 353(in Chinese)[范恩贵等，物理学报，**47**(1998), 353].

[8] J. F. Zhang, *Chin. Phys.*, **9**(2000), 1.

[9] Z. Y. Yan *et al.*, *Acta Phys. Sin.*, **48**(1999), 1962(in Chinese)[闫振亚等，物理学报，**48**(1999), 1962].

[10] J. F. Zhang, *Acta Phys. Sin.*, **47**(1998), 1416(in Chinese)[张解放，物理学报，**47**(1998), 1416].

[11] E. G. Fan, *Acta Phys. Sin.*, **49**(2000), 1409(in Chinese)[范恩贵，物理学报，**49**(2000), 1409].

[12] Z. B. Li *et al.*, *Acta Phys. Sin.*, **50**(2001), 402(in Chinese)[李志斌等，物理学报，**50**(2001), 402].

[13] Z. Y. Yan *et al.*, *Acta Phys. Sin.*, **48**(1999), 1(in Chinese)[闫振亚等，物理学报，**48**(1999), 1].

[14] B. Naranmandula *et al.*, *Mechanics in Engineering*, **23**(2001), 33[那仁满都拉等，力学与实践，**23**(2001), 33].

[15] G. X. Zhang *et al.*, *Sci. China*, **A30**(2000), 1103(in Chinese)[张桂戌等，中国科学，**A30**(2000), 1103].

THE SOLITARY WAVE SOLUTIONS TO KdV-BURGERS EQUATION

LÜ KE-PU SHI YU-REN DUAN WEN-SHAN ZHAO JIN-BAO

(*College of Physics and Electronic Engineering*, *Northwest Normal University*, *Lanzhou* 730070, *China*)

(Received 13 May 2001; revised manuscript received 16 June 2001)

ABSTRACT

The study on the hyperbola function method has been done and the application of the method was extended. Furthermore, with the aid of computer algebraic system Mathematica, two kink solitary wave solutions to KdV-Burgers equation were successfully derived.

Keywords: hyperbola function method, KdV-Burgers equation, travelling wave solution, computer algebraic system Mathematica

PACC: 0340K, 0290