第 50 卷 第 11 期 2001 年 11 月
1000-3290/2001/50(11)/2077-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50, No.11, November, 2001


# 动边界量子含时谐振子系统的 Lewis-Riesenfeld 相位与 Berry 相位

李 玲[1)2)] 李伯臧[1)] 梁九卿[2)]

[1)](中国科学院物理研究所和凝聚态物理中心，北京 100080)

[2)](山西大学理论物理研究所，太原 030006)

(2000 年 12 月 18 日收到；2001 年 5 月 8 日收到修改稿)

根据 Lewis-Riesenfeld 的量子不变量理论，计算了一维动壁无限深势阱内频率随时间变化的谐振子的 Lewis-Riesenfeld 相位，发现刘登云文中'非绝热 Berry 相位'与 Lewis-Riesenfeld 相位中的几何部分完全一致. 也许更为重要的是，证明了至少对于做正弦振动的边界，在绝热近似下，该系统不存在非零的 Berry 相位.

**关键词**：Berry 相位，Lewis-Riesenfeld 相位，量子不变量，动边界

**PACC**：0365

## 1 引 言

自从 Doescher 和 Rice[1] 第一次提出量子动壁无限深势阱之后，这类动边界系统引起了人们极大的兴趣[2—20]. 正是由于边界的运动，才使问题变得复杂而有趣. 据我们所知，人们只找到了几类可精确求解的动边界系统[1,5,11,14,19]. 设一质量为 $M$ 且具有含时频率 $\Omega(t)$ 的谐振子，被局限在左壁固定，而右壁按 $L(t)$(大于零)运动的一维无限深势阱内. 此系统的哈密顿量为

$$\hat{H}(x,t)=\frac{\hat{p}_x^2}{2M}+\frac{1}{2}M\Omega^2(t)x^2+V(x,t), \quad (1)$$

$V(x,t)$ 为动壁无限深势阱的势能：

$$V(x,t)=\begin{cases}0 & x\in(0,L(t)),\\ \infty & x\notin(0,L(t)).\end{cases} \quad (2)$$

文献[11]指出，只有当

$$\Omega^2(t)=-\frac{\ddot{L}(t)}{L(t)} \quad (3)$$

时，含时 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\hat{H}(x,t)\psi(x,t) \quad (4)$$

才可能精确求解，故本文只考虑

$$\hat{H}(x,t)=\frac{\hat{p}_x^2}{2M}-\frac{M}{2}\frac{\ddot{L}(t)}{L(t)}x^2+V(x,t) \quad (1')$$

的情形.

在动边界条件

$$\psi(x,t)=0,\ x\notin(0,L(t)),\ \forall t \quad (5)$$

下，方程(1)，(2)和(4)有下列精确解[11]：

$$\psi_n(x,t)=\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\hbar n^2\pi^2}{2M}\int_0^t\frac{\mathrm{d}t'}{L^2(t')}\right]\varphi_n(x,t), \quad (6)$$

式中

$$\varphi_n(x,t)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{L(t)}}\exp\left[\dfrac{\mathrm{i}M}{2\hbar}\dfrac{\dot{L}(t)}{L(t)}x^2\right]\sin\left(\dfrac{n\pi x}{L(t)}\right) & x\in[0,L(t)],\\ 0 & x\notin[0,L(t)].\end{cases} \quad (7)$$

$\{\varphi_n(x,t):n=1,2,3,\cdots\}$ 构成一个正交归一完备集：

$$\int_0^{L(t)}\mathrm{d}x\varphi_n^*(x,t)\varphi_{n'}(x,t)=\delta_{nn'},$$

$$\sum_n\varphi_n^*(x,t)\varphi_n(x',t)=\delta(x-x'),$$

$$x,x'\in[0,L(t)]. \quad (8)$$

当 $\dot{L}(t)=\mathrm{const.}$，即势阱壁做匀速运动时，(6)式与 Doescher 和 Rice[1] 以及 Greenberger[5] 得到的结果一致.

在文献[5]中,Greenberger曾把(7)式中的"$\frac{M}{2\hbar}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}x^2$"称为"几何相位".很显然,Greenberger得到的并不是真正的(Berry[21]意义上的)几何相位.其后,人们开始了对动边界条件下几何相位问题的研究[8,12,17,18,20].Mostafazadeh[20]的工作指出,被束缚在宽度作周期变化的一维无限深势阱内的自由粒子($\Omega(t)=0$)不会获得非零的Berry相位.

最近,文献[19]考虑了

$$\Omega^2(t) = -\frac{\ddot{\rho}(t)}{\rho(t)} \tag{9}$$

的情形,其中$\rho(t)$为具有含时频率$\Omega(t)$的经典谐振子的运动方程

$$\ddot{x} = -\Omega^2(t)x \tag{10}$$

的实数解.基于不变量的精确解利用几何距离和曲线的几何长度概念,作者第一次计算了动边界条件下的具有随时间变化频率的谐振子的几何相位.计算结果表明,系统不但存在非绝热的几何相位,而且还存在非零的绝热几何相位,即Berry相位.在计算过程中,作者把势阱壁的运动定义为

$$L(t) = a_0\rho(t), \tag{11}$$

式中$a_0$为常数,从而文献[19]的(9)式同文献[11]的(3)式.

本文将Lewis-Riesenfeld的量子不变量理论[22]应用到动边界系统,并计算了动边界条件下的Lewis-Riesenfeld相位[23]($\alpha_n(T)$),发现文献[19]中的"非绝热Berry相位"正好等于Lewis-Riesenfeld相位中的几何部分$\beta_n(T)$.

其次,针对势阱壁作正弦振动($L(t)=L_0+Q\sin(\omega t)$),见后面的(38)式的特殊情况,证明$\beta_n(T)$正比于振动频率$\omega$.因此,在绝热近似下(即$\omega$趋于零),$\beta_n(T)$应趋于零;文献[19]中的'非绝热几何相位'也应随之趋于零.绝热近似下的$\beta_n(T)$正好化为Berry相位,这表明当势阱壁作正弦振动时,系统不应存在非零的Berry相位.

再者,我们以$\Omega(t)=\text{const.}$的情形为例,发现文献[19]的计算结果与Berry理论的结论不一致.这表明,该文以$\dot{\Omega}(t)$趋于零作为绝热近似条件得到的Berry相位公式不能作为计算Berry相位的一般公式.这是因为,$\dot{\Omega}(t)$趋于零不能保证系统哈密顿量作缓慢变化,同时,由(11)式定义的$L(t)$也不一定具有物理意义.

## 2 动边界系统的不变量

对于一个哈密顿量$\hat{H}(t)$显含时间的系统假设存在一个厄密不变量$\hat{I}(t)$,它满足方程

$$\frac{\mathrm{d}\hat{I}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\hat{I}(t)}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{I}(t),\hat{H}(t)] = 0, \tag{12}$$

从而其本征值$\lambda_n$不依赖于时间,即

$$\frac{\partial\lambda_n}{\partial t} = 0,\quad \hat{I}(t)\,|\,\mu_n(t)\rangle = \lambda_n\,|\,\mu_n(t)\rangle. \tag{13}$$

以下,我们总假定$\{|\mu_n(t)\rangle : n=1,2,\cdots\}$是正交归一的.令

$$|\,\phi_n(t)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n(t)}\,|\,\mu_n(t)\rangle, \tag{14}$$

式中

$$\alpha_n(t) = d_n(t) + \beta_n(t), \tag{15}$$

$$d_n(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}t'\langle\mu_n(t')|\hat{H}(t')\,|\,\mu_n(t')\rangle, \tag{16}$$

$$\beta_n(t) = \int_0^t \mathrm{d}t'\langle\mu_n(t')|\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t'}\,|\,\mu_n(t')\rangle. \tag{17}$$

Lewis-Riesenfeld的量子不变量理论[22]指出,当$\lambda_n$不简并时,(14)式定义的$|\phi_n(t)\rangle$便是含时Schrödinger方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\phi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\phi(t)\rangle \tag{18}$$

的精确解.人们习惯于把$\alpha_n(t)$称为Lewis-Riesenfeld相位,$d_n(t)$和$\beta_n(t)$分别为其动力学部分和几何部分.

李伯臧等人[23,24]已经指出,$\alpha_n(t)$以及$d_n(t)$和$\beta_n(t)$一般是不确定的量,因而缺乏物理意义;对于周期(为$T$)的量子系统,当且仅当$\hat{I}(t)$和$|\mu_n(t)\rangle$被取得具有相同的周期性时,$\alpha_n(T)$,$d(T)$和$\beta_n(T)$才是物理上有意义的量;此时,

$$|\,\phi_n(T)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n(T)}\,|\,\phi_n(0)\rangle, \tag{19}$$

从而$\alpha_n(T)$为系统的Bloch相位,$d_n(T)$和$\beta_n(T)$分别为其动力学部分和几何部分.

顺便指出,从本节开头到现在的$\hat{H}(t)$,$\hat{I}(t)$,$|\mu_n(t)\rangle$和$|\phi_n(t)\rangle$中均隐去了坐标$x$,因为这些公式适用于任何量子系统,所以这里采用了Dirac符号.下面仍采用$x$-表象.

将含时Schrödinger方程的精确解(6)与(14)式作比较,不难判断,系统一定存在以(7)式中的$\varphi_n(x,t)$为瞬时本征函数的不变量$\hat{I}(x,t)$.下面来

求这样的 $\hat{I}(x,t)$.

设 $\hat{R}(x,t)$ 为含时幺正算符,在该幺正变换下不变量方程(12)的 $x$-表象

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\hat{I}(x,t)}{\partial t}=[\hat{H}(x,t),\hat{I}(x,t)]\tag{20}$$

成为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\hat{I}'(x,t)}{\partial t}=[\hat{H}'(x,t),\hat{I}'(x,t)],\tag{21}$$

式中

$$\hat{I}'(x,t)=\hat{R}^{+}(x,t)\hat{I}(x,t)\hat{R}(x,t),\tag{22}$$

$$\hat{H}'(x,t)=\hat{R}^{+}(x,t)\hat{H}(x,t)\hat{R}(x,t)-\mathrm{i}\hbar\hat{R}^{+}(x,t)\frac{\partial\hat{R}(x,t)}{\partial t}.\tag{23}$$

若取

$$\hat{R}(x,t)=\exp\left[\frac{\mathrm{i}M}{2\hbar}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}x^2\right],\tag{24}$$

则有

$$\hat{H}'(x,t)=\frac{\hat{p}_x^2}{2M}+\frac{\dot{L}(t)}{2L(t)}(x\hat{p}_x+\hat{p}_x x)+V(x,t).\tag{25}$$

由于本文所涉及的波函数均满足边条件(5)式,即它们在开区间$(0,L(t))$之外恒为零,故只须要求 $I'(t)(I(t))$ 当 $x\in(0,L(t))$ 时满足(21)((20))式即可.为此,令

$$\hat{I}'(x,t)=\frac{L^2(t)}{2M}\hat{p}_x^2+V(x,t),\tag{26}$$

易见它当 $x\in(0,L(t))$(甚至当 $x\notin[0,L(t)]$)时,确实满足(21)式.

因此,将上式代入(22)式,便得到系统的一个不变量:

$$\hat{I}(x,t)=L^2(t)\left(\frac{\hat{p}_x^2}{2M}-\frac{\dot{L}(t)}{2L(t)}(x\hat{p}_x+\hat{p}_x x)+\frac{M\dot{L}^2(t)}{2L^2(t)}x^2\right)+V(x,t).\tag{27}$$

不难验证此不变量以 $\varphi_n(x,t)$ 为本征函数,而相应的本征值为

$$\lambda_n=\frac{\hbar^2n^2\pi^2}{2M}.\tag{28}$$

若按(11)式以 $\rho(t)$ 代换(27)式中的 $L(t)$,就得到文献[19]的结果.但值得注意的是,将文献[19]求得的 $\rho(t)$ 代入(11)式,不能总满足 $L(t)$ 大于零的物理要求.

## 3　动边界系统的 Lewis-Riesenfeld 相位与 Berry 相位

既然系统存在以 $\varphi_n(x,t)$ 为本征态的不变量 $\hat{I}(x,t)$,那么,方程(3)就可按 Lewis-Riesenfeld 的量子不变量理论进行求解.将(7)式代入(15)—(17)式,得

$$\begin{aligned}d_n(t)&=-\frac{1}{\hbar}\int_0^t\mathrm{d}t'\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n^*(x,t')\hat{H}(x,t')\varphi_n(x,t')\mathrm{d}x\\&=-\frac{\hbar n^2\pi^2}{2M}\int_0^t\frac{\mathrm{d}t'}{L^2(t')}-\frac{M}{2\hbar}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n^2\pi^2}\right)\\&\quad\cdot\int_0^t(\dot{L}^2(t')-L(t')\ddot{L}(t'))\mathrm{d}t',\end{aligned}\tag{29}$$

$$\begin{aligned}\beta_n(t)&=\int_0^t\mathrm{d}t'\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n^*(x,t')\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t'}\right)\varphi_n(x,t')\mathrm{d}x\\&=\frac{M}{2\hbar}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n^2\pi^2}\right)\int_0^t(\dot{L}^2(t')\\&\quad-L(t')\ddot{L}(t'))\mathrm{d}t',\end{aligned}\tag{30}$$

$$\alpha_n(t)=d_n(t)+\beta_n(t)=-\frac{\hbar n^2\pi^2}{2M}\int_0^t\frac{\mathrm{d}t'}{L^2(t')}.\tag{31}$$

当 $\dot{L}(t)=\mathrm{const}.$ 时,有

$$d_n(t)=-\frac{n^2\pi^2}{4\alpha}\left(1-\frac{1}{\eta}\right)-\frac{2\hbar\eta\alpha^2}{ML}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n^2\pi^2}\right)t,\tag{32}$$

$$\beta_n(t)=-\frac{2\hbar\eta\alpha^2}{ML}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n^2\pi^2}\right)t,\tag{33}$$

$$\alpha_n(t)=d_n(t)+\beta_n(t)=-\frac{n^2\pi^2}{4\alpha}\left(1-\frac{1}{\eta}\right),\tag{34}$$

式中 $\eta(t)=\dfrac{L(t)}{L_0}$,$L_0=L(0)$和 $\alpha=\dfrac{M}{2\hbar}L_0\dot{L}(t)$.于是我们得到与文献[1]和[5]相同的结果:

$$\psi_n(x,t)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{L(t)}}\exp\left[\mathrm{i}\alpha\eta\left(\dfrac{x}{L(t)}\right)^2-\mathrm{i}\dfrac{n^2\pi^2}{4\alpha}\left(1-\dfrac{1}{\eta}\right)\right]\sin\left(\dfrac{n\pi x}{L(t)}\right) & x\in[0,L(t)],\\0 & x\notin[0,L(t)].\end{cases}\tag{35}$$

前面已指出,当且仅当不变量 $\hat{I}(x,t)$和 $\varphi_n(x,t)$被取得具有与 $\hat{H}(x,t)$相同的周期性时,$\alpha_n(T)$,$d_n(T)$和 $\beta_n(T)$才是物理上有意义的量,为此考虑势阱壁作周期运动的情况.此时,

$$\beta_n(T)=\frac{M}{2\hbar}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n^2\pi^2}\right)\int_0^T(\dot{L}^2(t)-L(t)\ddot{L}(t))\mathrm{d}t, \tag{36}$$

$$d_n(T)=-\frac{\hbar n^2\pi^2}{2M}\int_0^T\frac{\mathrm{d}t}{L^2(t)}-\beta_n(T). \tag{37}$$

作为特例,考虑一个简单情况,即设势阱壁作正弦振动:

$$L(t)=L_0+Q\sin(\omega t), \tag{38}$$

式中 $L_0=\mathrm{const.}>0, Q=\mathrm{const.}, |Q|<L_0$. 由此得

$$\beta_n(T)=\frac{M}{\hbar}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n^2\pi^2}\right)Q^2\pi\omega, \tag{39}$$

$$d_n(T)=-\frac{\hbar n^2\pi^2}{2M}\int_0^T\frac{\mathrm{d}t}{L^2(t)}-\frac{M}{\hbar}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n^2\pi^2}\right)Q^2\pi\omega. \tag{40}$$

(36)和(39)式分别与文献[19]中的(46)和(47)式完全一致.由此可看出,对于本文和文献[19]所考虑的运边界系统,文献[19]利用几何距离和曲线的几何长度概念得到的'非绝热 Berry 相位'等价于本文按 Lewis-Riesenfeld 的不变量理论得到的相位 $\beta_n(T)$.

用不变量理论得到的精确解,Lewis-Riesenfeld 相位及其几何部分 $\beta_n(T)$完全等同于用其他方法得到的结果,这表明 Lewis-Riesenfeld 的不变量理论在动边界系统中仍然适用.

从(39)式可以看出,当势阱壁作正弦振动时,$\beta_n(T)$正比于势阱壁的振动频率 $\omega$.因此在绝热近似下,即 $\omega$ 趋于零时(关于将绝热近似表述为 $\omega$ 趋于零的合理性,将在下节论述),$\beta_n(T)$趋于零,从而文献[19]中的'非绝热 Berry 相位'亦应如此.当 $\omega$ 趋于零时,得

$$\hat{I}(x,t)\approx\frac{L^2(t)}{2M}\hat{p}_x^2+V(x,t), \tag{41}$$

$$\hat{H}(x,t)\approx\frac{\hat{p}_x^2}{2M}+V(x,t). \tag{42}$$

此时,不变量的本征函数

$$\varphi_n(x,t)\approx\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{L(t)}}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{L(t)}\right) & x\in[0,L(t)],\\ 0 & x\notin[0,L(t)]\end{cases} \tag{43}$$

近似为哈密顿量的本征函数.因此,Lewis-Riesenfeld 相位中的几何部分 $\beta_n(T)$化为 Berry 相位.由此可知,该动边界系统不存在非零的 Berry 相位.

## 4 结论与讨论

对于一维无限深动壁(动壁位于 $x=L(t)$处)势阱中频率 $\Omega(t)$按 $\Omega^2(t)=-\dfrac{\ddot{L}(t)}{L(t)}$随时间变化的谐振子,我们利用含时幺正变换得到了系统的不变量.

在势阱壁作周期运动的情况下,我们计算了动边界条件下的 Lewis-Riesenfeld 相位 $\alpha_n(T)$,及其动力学部分 $d_n(T)$和几何部分 $\beta_n(T)$,发现本文的 $\beta_n(T)$与文献[19]中的'非绝热 Berry 相位'完全一样.这表明,文献[19]利用几何距离和曲线的几何长度概念得到的'非绝热 Berry 相位'与本文按 Lewis-Riesenfeld 的不变量理论得到的 $\beta_n(T)$完全等价.从计算结果不难看出,当动壁作正弦振动时,$\beta_n(T)$正比于势阱壁的振动频率.在绝热近似下($\omega$ 趋于零),$\beta_n(T)$趋于零,故系统不存在非零的 Berry 相位.

当动壁作正弦振动时,将 $\omega$ 趋于零作为绝热条件是合理的.这是因为,该绝热条件能保证系统哈密顿量 $\hat{H}(x,t)$作缓慢变化.为了说明这一点,下面将动边界转化为固定边界来进行论证.引入含时坐标变换

$$\xi=\frac{x}{L(t)}, \tag{44}$$

在新坐标系中,势阱壁被固定在 $\xi=0$ 和 $\xi=1$ 处.为了得到归一化的波函数,需要对动边界条件下的波函数 $\psi(x,t)$作如下变换:

$$\psi'(\xi,t)=\sqrt{L(t)}\,\psi(x,t)=\sqrt{L(t)}\,\psi(L(t)\xi,t). \tag{45}$$

于是,新哈密顿量成为

$$\hat{H}'(\xi,t)=\frac{\hat{p}_\xi^2}{2ML^2(t)}-\frac{\dot{L}(t)}{2L(t)}(\xi\hat{p}_\xi+\hat{p}_\xi\xi)+\frac{1}{2}ML^2(t)\Omega^2(t)\xi^2+V'(\xi), \tag{46}$$

式中 $\hat{p}_\xi=-\mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial}{\partial\xi}$,而 $V'(\xi)$为具有固定边界的一维无穷深势阱

$$V'(\xi)=V'(L(t)\xi,t)=\begin{cases}0 & \xi\in(0,1),\\ \infty & \xi\notin(0,1).\end{cases} \tag{47}$$

从(46)式容易看到,当且仅当势阱壁作非常缓慢的正弦振动,亦即 $\omega$ 趋于零,从而 $\Omega^2(t)=\dfrac{Q\sin(\omega t)}{L_0+Q\sin(\omega t)}\omega^2$ 趋于零时,$H'(\xi,t)$一定随时间缓慢变化.这是因为,在一般情况下,只有当势阱壁和谐振子频率都随时间变化非常缓慢时,才能保证 $H'(\xi,t)$随时间缓慢变化.

在文献[19]中,作者以 $\dot{\Omega}(t)$趋于零作为绝热条

件给出了运动方程(10)的绝热近似解

$$\rho(t) = \rho_0 \cos\left\{\int_0^t \Omega(t')\mathrm{d}t'\right\} \tag{48}$$

和势阱宽度

$$L(t) = a_0\rho_0 \cos\left\{\int_0^t \Omega(t')\mathrm{d}t'\right\}. \tag{49}$$

将上式代入文献[19]中的(46)式(即本文中的(36)式),得到"非零的 Berry 相位"

$$\beta_n(T) = \frac{a_0\rho_0 M}{2\hbar}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n^2\pi^2}\right)\int_0^T \Omega^2(t)\mathrm{d}t. \tag{50}$$

前面已经指出,仅以 $\dot{\Omega}(t)$ 趋于零作为绝热条件是不够的.这是因为,这个绝势条件不能保证 $H'(\xi,t)$ 作缓慢变化.故按(50)式得到的结果不一定就是 Berry 相位.此外,按(49)式定义的势阱宽度 $L(t)$ 也不一定具有物理意义(不总满足 $L(t)$ 大于零).为此,我们考虑一种特殊情况:$\Omega(t)=c$($c$ 为常数).虽然此时存在非零的 $\beta_n(T)$,但不难发现:当 $ct=\frac{\pi}{2}+k\pi$($k$ 为整数)时,$L(t)=a_0\rho_0\cos(ct)=0$,从而势阱宽度为零,这是没有物理意义的.很显然,由此得到的非零 $\beta_n(T)$ 也是没有意义的.

实际上,当 $\Omega(t)=c$ 时,系统随单参数 $L(t)$ 变化,按 Berry 关于绝热几何相位的几何表述,系统的 Berry 相位自然应为零.这与文献[19]的结果完全不同.我们再一次证明,(50)式的计算结果不正确.可见,(50)式不能作为计算 Berry 相位的一般公式.很显然,只有当满足条件:(1)$L(t)$ 大于零,(2)$\dot{\Omega}(t)$ 趋于零和(3)$\dot{L}(t)$ 趋于零时,才可能按(50)式计算 Berry 相位.因此在文献[19]所设的"绝热近似条件"和"绝热近似解"下,很难找到既满足上述条件又存在非零 Berry 相位的系统.

由以上讨论可以得出结论:对于这种处于右壁按 $L(t)$ 运动的一维无限深势阱内的具有特殊频率 $\left(\Omega^2(t)=-\frac{\ddot{L}(t)}{L(t)}\right)$ 的谐振子,至少对于作正弦振动的边界,不可能获得非零的 Berry 相位.


[1] S.W.Doescher, M.H.Rice, *Am.J.Phys.*, **37**(1969), 1246.

[2] A.Munier, J.R.Burgan, M.Feix *et al.*, *J.Math.Phys.*, **22**(1981), 1219.

[3] J.V.Jose, R.Cordery, *Phys.Rev.Lett.*, **56**(1986), 290.

[4] W.M.Visscher, *Phys.Rev.*, **A36**(1987), 5031.

[5] D.M.Greenberger, *Physics*, **B151**(1988), 374.

[6] C.Scheininger, M.Kleber, *Physica*, **D50**(1991), 391.

[7] P.Seba, *Phys.Rev.*, **A41**(1990), 2306.

[8] P.Pereshogin, P.Pronin, *Phys.Lett.*, **A156**(1991), 12.

[9] M.Razavy, *Phys.Rev.*, **A44**(1991), 2384.

[10] V.V.Dodonov, A.B.Klimov, D.E.Nikonov, *J.Math.Phys.*, **34**(1993), 33.

[11] A.J.Makowski, S.T.Dembinski, *Phys.Lett.*, **A154**(1991), 217.

[12] O.Kwon, Y.Kim, C.Lee, *J.Phys.A:Math.Gen.*, **25**(1992), 6113.

[13] A.J.Makowski, *J.Phys.A:Math.Gen.*, **25**(1992), 3419.

[14] A.J.Makowski, P.Pelowski, *Phys.Lett.*, **A163**(1992), 143.

[15] D.N.Pinder, *Am.J.Phys.*, **58**(1990), 54.

[16] O.Kwon, Y.Kim, C.Lee, *Phys.Rev.*, **A45**(1992), 6884.

[17] D.Y.Liu, *Acta Phys.Sin.*, **42**(1993), 705(in Chinese)[刘登云,物理学报,**42**(1993),705].

[18] R.D.Zhang, F.L.Yan, B.Z.Li, *Acta Phys.Sin.*, **47**(1998), 1585(in Chinese)[张润东、阎凤利、李伯臧,物理学报,**47**(1998),1585].

[19] D.Y.Liu, *Acta Phys.Sin.*, **47**(1998), 1233(in Chinese)[刘登云,物理学报,**47**(1998),1233].

[20] A.Mostafazadeh, *J.Phys.A:Math.Gen.*, **32**(1999), 8325.

[21] M.V.Berry, *Proc.Roy.Soc.London*, **A392**(1984), 45.

[22] H.R.Lewis, Jr., W.B.Riesenfeld, *J.Math.Phys.*, **10**(1969), 1458.

[23] B.Z.Li, L.Y.Zhang, X.D.Zhang, *Acta Phys.Sin.*, **46**(1997), 2081(in Chinese)[李伯臧、张凌云、张向东,物理学报,**46**(1997),2081].

[24] B.Z.Li, D.G.Zhang, J.H.Wu, F.L.Yan, *Acta Phys.Sin.*, **46**(1997), 227(in Chinese)[李伯臧、张德刚、吴建华、阎凤利,物理学报,**46**(1997),227].

# LEWIS-RIESENFELD PHASES AND BERRY PHASES IN THE QUANTUM SYSTEM OF TIME-DEPENDENT HARMONIC OSCILLATOR WITH A MOVING BOUNDARY

LI LING[1)2)] LI BO-ZANG[1)] LIANG JIU-QING[2)]

[1)] (*Institute of Physics and Center for Condensed Matter Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080, *China*)

[2)] (*Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan* 030006, *China*)

(Received 18 December 2000; revised manuscript received 8 May 2001)

ABSTRACT

Using the Lewis-Riesenfeld′s quantum invariant theory, the Lewis-Riesenfeld phases for a time-dependent frequency harmonic oscillator, which is confined in an infinite well with a moving wall, are calculated. We find that the geometric part of the Lewis-Riesenfeld phases are identical with the "non-adiabatic Berry phases" described by D.Y. Liu in *Acta Phys. Sin*. It may be important that our results, at least for the system with a sinusoidally oscillating boundary, do not show any non-trivial Berry phase acquired.

**Keywords**: Berry phase, Lewis-Riesenfeld phase, quantum invariant, moving boundary

**PACC**: 0365