第 50 卷 第 11 期 2001 年 11 月
1000-3290/2001/50(11)/2089-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50, No.11, November, 2001

均匀弱磁场中的 Kasuya 双荷外部引力场

苏成悦

(中国科学院云南天文台,昆明 650011;中国科学院国家天文观测中心,北京 100080;
广东工业大学物理系,广州 510643)

(2000 年 10 月 28 日收到;2001 年 6 月 1 日收到修改稿)

利用 Ernst 方法,在 Harrison 变换为线性变换的条件下,得到 Kasuya 荷电荷磁的外部引力场解,解中所含常量 B_0 表示一均匀弱磁场,该解不要求 $q=-2B_0J$. 当 r 趋于 ∞ 时,度规接近 Melvin's 磁宇宙的渐进行为. 该度规是非渐近平直的,在均匀外磁场下这是合理的结果.

关键词:Ernst 方法, Kasuya 双荷, 磁场, 引力场
PACC:0420

1 引 言

爱因斯坦场方程是一组偏微分方程,求解存在极大的困难. 为此,人们发展了一些求解技术,如 Ernst 生成技术[1,2]、Kasuya 复延拓方法等[3]. Kinnersley 研究了 Ernst 方程的内部对称性[4],发现其存在内部群. Harrison, Ehlers, Ernst 等人分别给出了具体的变换[5],通过变换,可以从一个已知的 Einstein-Maxwell(E-M)方程解得到新的解.

1931 年 Dirac 预言存在磁单极. Kasuya 用复延拓的方法从 Kerr-Newman 度规获得了一个既荷电又荷磁的双荷度规[3]. 有学者讨论了荷电荷磁的天体模型,并有学者给出了一个慢速转动条件下,当满足 $g\leqslant q=-2B_0J$ 条件时,磁场中的 Kasuya 双荷黑洞的外部引力场和电磁场的解[6],以及荷电荷磁静止球对称天体共形平直内解[7].

本文运用 Ernst 生成方法,在 Harrison 变换为线性条件下,求得在外磁场中的 Kasuya 双荷引力场的度规.

2 Ernst 方程和 Harrison 变换

辐射对称度规可写为

$$\mathrm{d}s^2=f^{-1}(2P^{-2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\xi^*+\rho^2\mathrm{d}t^2)-f(\mathrm{d}\phi-\omega\mathrm{d}t)^2, \tag{1}$$

其中 ϕ 和 t 为径向角和时间坐标,ξ 为子空间中的复坐标,P,ρ,ω 为实函数.

E-M 方程组可写为 Ernst 方程组[2]

$$(\mathrm{Re}\varepsilon+|\Phi|^2)\nabla^2\varepsilon=(\nabla\varepsilon+2\Phi^*\nabla\Phi)\cdot\nabla\varepsilon,$$

$$(\mathrm{Re}\varepsilon+|\Phi|^2)\nabla^2\Phi=(\nabla\varepsilon+2\Phi^*\nabla\Phi)\cdot\nabla\Phi,$$

其中 ε,Φ 分别称为 Ernst 复引力势和复电磁势,∇ 为三维空间的协变导数算子

$$\nabla=\Delta^{1/2}\frac{\partial}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\theta}, \tag{2}$$

复引力势和复电磁势之间存在关系

$$\varepsilon=f-|\Phi|^2+\mathrm{i}\psi, \tag{3}$$

其中 ψ 称为扭势. Harrison 变换式为[5,8,9]

$$\varepsilon'=\Lambda^{-1}\varepsilon,\quad \Phi'=\Lambda^{-1}\left(\Phi-\frac{1}{2}B_0\varepsilon\right), \tag{4}$$

$$\Lambda=1+B_0\Phi-\frac{1}{4}B_0{}^2\varepsilon, \tag{5}$$

其中 B_0 为常数,Λ 为变换复函数. 其变换的物理意义在于,通过一个已知的解,得到该解处于均匀磁场中的新解[8,9].

3 引力场度规的求解

Kasuya 双荷度规形式可写为

$$\mathrm{d}s^2=\Sigma\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{\Delta}+\mathrm{d}\theta^2-\frac{\Delta}{A}\mathrm{d}t^2\right)+\frac{A\sin^2\theta}{\Sigma}(\mathrm{d}\phi-\omega\mathrm{d}t)^2, \tag{6}$$

$$\Delta=r^2+a^2+q^2+g^2-2mr,$$

$$A=(r^2+a^2)^2-\Delta a^2,\ \Sigma=r^2+a^2\cos^2\theta,$$

其中 q,g 分别为电荷和磁荷. 将(1)与(6)式对比,可得

$$f=-\frac{A\sin^2\theta}{\Sigma},\quad P=\frac{1}{A^{1/2}\sin\theta},\quad \rho=\Delta^{1/2}\sin\theta,$$

$$\omega=-(q^2+g^2-2mr)\frac{a}{A},\ \mathrm{d}\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\Delta^{1/2}}+\mathrm{i}\mathrm{d}\theta\right).$$

Kasuya双荷度规的复引力势和复电磁势分别为[6]

$$\Phi=\left(\frac{aq\sin^2\theta}{r+\mathrm{i}a\cos\theta}-g\cos\theta\right)-\mathrm{i}\left(\frac{ag\sin^2\theta}{r+\mathrm{i}a\cos\theta}+q\cos\theta\right),\tag{7}$$

$$\varepsilon=-(r^2+a^2)\sin^2\theta-(q^2+g^2)\cos^2\theta+2ma\mathrm{i}\cos\theta(3-\cos^2\theta)-\frac{2a\sin^2\theta}{r+\mathrm{i}a\cos\theta}\cdot[ma\sin^2\theta+\mathrm{i}(q^2+g^2)\cos\theta].\tag{8}$$

采用Harrison变换式(5),变换复函数Λ,有

$$\begin{aligned}\Lambda&=1+B_0\Phi-\frac{1}{4}B_0{}^2\varepsilon\\&=1+B_0\left(\frac{aq\sin^2\theta}{r+\mathrm{i}a\cos\theta}-g\cos\theta\right)-\mathrm{i}B_0\left(\frac{ag\sin^2\theta}{r+\mathrm{i}a\cos\theta}+q\cos\theta\right)\\&\quad-\frac{B_0{}^2}{4}\Big[-(r^2+a^2)\sin^2\theta+2ma\mathrm{i}\cos\theta\cdot(3-\cos^2\theta)-\frac{2ma^2\sin^4\theta}{r+\mathrm{i}a\cos\theta}\Big]\\&\quad+\frac{B_0{}^2}{4}(q^2+g^2)\left[\frac{2a\mathrm{i}\sin^2\theta\cos\theta}{r+\mathrm{i}a\cos\theta}+\cos^2\theta\right].\end{aligned}\tag{9}$$

通过新的复引力势和电磁势可求得

$$f'=\mathrm{Re}\varepsilon'+|\Phi'|^2=|\Lambda|^{-2}f.\tag{10}$$

另外,$P'=P,\rho'=\rho$;f'容易从(10)式求得,现讨论求ω'

$$\nabla\omega'=|\Lambda|^2\nabla\omega+f^{-1}\rho(\Lambda^*\nabla\Lambda-\Lambda\nabla\Lambda^*).\tag{11}$$

将(9)式代入(11)式,采用线性变换,只保留B_0一次项,即考虑在弱磁场中,可得

$$\nabla\omega'=[1+2B_0(\mathrm{Re}\Phi)]\nabla\omega+2B_0\mathrm{i}\rho f^{-1}\nabla(\mathrm{Im}\Phi),\tag{12}$$

由此可得

$$\omega'_{,\theta}=[1+2B_0(\mathrm{Re}\Phi)]\omega_{,\theta}+2B_0f^{-1}\Delta(\mathrm{Im}\Phi)_{,r},\tag{13}$$

$$\omega'_{,r}=[1+2B_0(\mathrm{Re}\Phi)]\omega_{,r}+2B_0f^{-1}\sin\theta(\mathrm{Im}\Phi)_{,\theta}.\tag{14}$$

进一步计算可得

$$\omega'_{,\theta}=\frac{\Delta a\sin\theta}{A^2}[(2mr-q^2-g^2)a^2\cos\theta-4B_0ear(r^2+a^2)\cos\theta-2B_0g(A-2a^2\Delta\cos^2\theta)],\tag{15}$$

$$\begin{aligned}\omega'_{,r}=&\frac{2maA-2(2mr-q^2-g^2)a[2r(r^2+a^2)-(r-m)a^2\sin^2\theta]}{A^2}\\&+\frac{2ma[qar\sin^2\theta-(r^2+a^2)g\cos\theta]}{\Sigma A}\\&-\frac{4ar(r^2+a^2)(2mr-q^2-g^2)[qar\sin^2\theta-(r^2+a^2)g\cos\theta]}{\Sigma A^2}\\&+\frac{2a^3\sin^2\theta(r-m)(2mr-q^2-g^2)[qar\sin^2\theta-(r^2+a^2)g\cos\theta]}{\Sigma A^2}\\&+\frac{(r^2+a^2)[q(r^2-a^2\cos^2\theta)-2agr\cos\theta]}{\Sigma A}.\end{aligned}\tag{16}$$

经繁复的求解,可求得方程组(15)和(16)的解为

$$\omega'=\frac{1}{A}[a(2mr-q^2-g^2)-2B_0qr(r^2+a^2)+2B_0ga\Delta\cos\theta].\tag{17}$$

为使上式可退化到无磁场情况,积分常数取为零,这样根据(9),(10),(17)式可得到度规

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=f'^{-1}(2P^{-2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\xi^*+\rho^2\mathrm{d}t^2)-f'(\mathrm{d}\phi-\omega'\mathrm{d}t)^2\\&=|\Lambda|^2\Sigma\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{\Delta}+\mathrm{d}\theta^2-\frac{\Delta}{A}\mathrm{d}t^2\right)+\frac{A\sin^2\theta}{\Sigma|\Lambda|^2}(\mathrm{d}\phi-\omega'\mathrm{d}t)^2.\end{aligned}\tag{18}$$

4 结 论

本文得到了在外磁场中Kasuya双荷外部度规的解析表达式,该解不要求$g\leqslant q=-2B_0J$;当B_0

趋于零时，它退为 Kasuya 双荷度规[6] ;并且当 q，g，m 和 α 趋于零时，它可退化为 Melvin 's 磁宇宙度规[8] ;若 r 趋于 ∞ 时，度规接近 Melvin 's 磁宇宙的渐进行为[8,10] .该度规是非渐近平直的，在均匀外磁场下这是必然的结果.

[1] F. J. Ernst, *Phys. Rev.*, **167** (1968), 1175.

[2] F. J. Ernst, *Phys. Rev.*, **168** (1968), 1415.

[3] M. Kasuya, *Phys. Rev.*, **D25** (1982), 995.

[4] W. Kinnersley, *J. Math. Phys.*, **14** (1973), 651.

[5] I. Hauser, F. J. Ernst, *J. Math. Phys.*, **19** (1978), 1316.

[6] Y. J. Wang, *Acta Phys. Sin.*, **33** (1984), 1728 (in Chinese) [王永久，物理学报，**33** (1984), 1728].

[7] J. Y. Zhang, *Acta Phys. Sin.*, **46** (1997), 2294 (in Chinese) [张靖仪，物理学报，**46** (1997), 2294].

[8] F. J. Ernst, *J. Math. Phys.*, **17** (1976), 54.

[9] F. J. Ernst, W. J. Wild, *J. Math. Phys.*, **17** (1976), 182.

[10] M. A. Melvin, *Phys. Rev.*, **139** (1965), B225.

EXTERNAL GRAVITATIONAL FIELD OF THE KASUYA DYON METRIC IN A MAGNETIC FIELD

SU CHENG-YUE

(*Yunnan Observatory*, *Chinese Academy of Sciences*, *Kunming* 650011, *China*;
National Astronomical Observatories, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100080, *China*;
Department of Physics, *Guangdong Industry University*, *Guangzhou* 510643, *China*)

(Received 28 October 2000; revised manuscript received 1 June 2001)

ABSTRACT

Using the Ernest 's method and adopting the Harrison transform under the linear condition, we obtained an expression of the exterior metric associated with the Kasuya dyon, $q \neq -2B_0 J$, in a magnetic field. There is an arbitrary parameter B_0 in the expression, it expresses a homogeneously weak magnetic field. While $r \to \infty$, the metric approaches asymptotically the Melvin magnetic universe, it is reasonable that the metric does not become asymptotically flat in a homogeneously magnetic field.

Keywords: Ernest's method, Kasuya dyon, magnetic field, metric

PACC: 0420