

基于神经网络的混沌系统鲁棒自适应同步*

关新平 唐英干 范正平 王益群

(燕山大学电气工程学院, 秦皇岛 066004)

(2001 年 5 月 16 日收到, 2001 年 6 月 2 日收到修改稿)

基于神经网络, 研究了两个混沌系统都存在扰动情况下的同步问题. 该方法能有效地克服不确定性对同步所造成的破坏, 实现了良好的同步效果. 针对 Lorenz 系统进行了数值计算. 数值计算结果证明了所给方法的有效性.

关键词: 混沌系统, 同步, 神经网络

PACC: 0545

1 引 言

随着 Ott 等人的 OGY 控制方法与 Pecora 和 Carroll 的驱动-响应同步方法的提出^[1,2], 混沌控制与混沌同步及其在保密通信中的应用引起了人们的广泛兴趣^[3-6]. 目前同步的方法有: 基于极点配置方法^[7]、脉冲控制方法^[8]等. 然而, 这些方法不足之处在于它们都没有考虑干扰对系统的影响. 但在实际系统中, 干扰几乎不可避免, 如两个混沌电路系统中电阻和电容值存在微小的差别. 因此文献^[8,9]的同步方法在实际应用中受到一定的限制. 文献^[9]考虑了扰动情况下混沌系统的同步问题, 但它只考虑了一个系统存在扰动的情况, 而且所采取的控制律是不连续的. 但在实际应用中, 控制律的不连续往往会导导致系统某种程度的破坏, 而且同步的两个系统都可能受到扰动的影响, 还会受到外部干扰. 因此考虑两个系统都存在参数扰动和外部扰动的情况更具有实际意义.

本文在文献^[9]的基础上, 利用神经网络, 研究了两个混沌系统都存在参数扰动和外部干扰情况下的同步问题. 文中所采取的控制律是连续的, 克服了文献^[9]不连续控制律所引起的抖颤现象, 避免了控制律不连续造成的破坏. 研究结果表明, 本文的方法能有效地克服干扰对混沌系统同步所造成的破坏, 实现了很好的同步效果. 对 Lorenz 系统的同步问题进行了数值计算, 数值计算结果证明了所给方法的

有效性.

2 问题描述

考虑如下两个同步的混沌系统:

$$\dot{x} = Ax + f(x) + u, \quad (1)$$

$$\dot{y} = Ay + g(y), \quad (2)$$

其中 $x, y \in R^n$ 为系统的状态, $A \in R^{n \times n}$ 为定常矩阵, $f(\cdot), g(\cdot)$ 为光滑的非线性矢量, u 为控制项. 在实际系统中, 系统总会不可避免地受到外部干扰, 则(1)式可写为

$$\dot{x} = (A + \Delta A_1)x + f(x) + \Delta f(x) + u + d_1(t), \quad (3)$$

$$\dot{y} = (A + \Delta A_2)y + g(y) + \Delta g(y) + d_2(t), \quad (4)$$

其中 $\Delta A_1 x, \Delta A_2 y, \Delta f(x), \Delta g(y)$ 分别为线性和非线性扰动项, $d_1(t), d_2(t)$ 为外部干扰.

定义 对于混沌系统(3)和(4), 定义 $e = x - y$, 如果

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0,$$

则称系统(3)和(4)同步.

下面利用径向基(RBF)网络来实现这两个混沌系统的同步. 先给出两个有用的引理.

引理^[11] 若 $f(t)$ 是一致连续函数, 且满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |f(\tau)| d\tau < \infty, \text{ 那么有 } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0.$$

推论^[11] 若 $f(t) \in L_2 \cap L_\infty$, 且 $f(t) \in L_\infty$, 则有 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

* 国家自然科学基金(批准号: 69872031)及河北省自然科学基金(批准号: 601225)资助的课题.

3 同步控制设计

本文旨在实现系统(3)和(4)同步.由上面的定义,对系统(3)和(4),有

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{y} = (A + \Delta A_1)x + f(x) + \Delta f(x) + u \\ &\quad + d_1(t) - (A + \Delta A_2)y \\ &\quad - g(y) - \Delta g(y) - d_2(t) \\ &= A_m e + [(A - A_m)e + f(x) + \Delta f(x) \\ &\quad - g(y) - \Delta g(y) + d_1(t) - d_2(t) \\ &\quad + \Delta A_1 x - \Delta A_2 y] + u, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 A_m 为预先给定的矩阵,其特征值的实部均小于零.令

$$\begin{aligned} F(x) &= [(A - A_m)e + f(x) + \Delta f(x) - g(y) \\ &\quad - \Delta g(y) + d_1(t) - d_2(t) \\ &\quad + \Delta A_1 x - \Delta A_2 y], \end{aligned}$$

则(5)式可写为

$$\dot{e} = A_m e + F(x) + u. \quad (6)$$

根据神经网络逼近理论^[12],任何一个连续的非线性函数都可以通过理想权值和充分多的输入基函数的神经网络来表示.本文采用三层径向基函数网络来表示 $F(x)$,那么 $F(x)$ 可以用神经网络表示为

$$F(x) = W^{*T} \alpha(x) + \epsilon(x), \quad (7)$$

$F(x)$ 的神经网络估计为

$$F(x) = \hat{W}^T \alpha(x), \quad (8)$$

其中 W^* 为理想权值矩阵, \hat{W} 为 W^* 的估计, $\epsilon(x)$ 为神经网络的重构误差, $\alpha(x)$ 为基函数矢量,根据(7)式(6)式可写为

$$\dot{e} = A_m e + W^{*T} \alpha(x) + \epsilon(x) + u. \quad (9)$$

对于系统(9),设计控制器为 $u = u_1 + u_2$,其中 u_1 为神经网络控制器, u_2 为辅助控制器,选取

$$u_1 = -\hat{W}^T \alpha(x), \quad (10)$$

(9)式可写为

$$\dot{e} = A_m e + \tilde{W}^T \alpha(x) + \epsilon(x) + u_2, \quad (11)$$

其中 $\tilde{W} = W^* - \hat{W}$.

定理 对于系统(11),神经网络控制器采用(10)式,辅助控制器选为

$$u_2 = -\frac{1}{\gamma} P e, \quad (12)$$

神经网络权值调整规律选为

$$\dot{\hat{W}} = \eta \rho(x) e^T P, \quad (13)$$

那么系统(11)的状态收敛到零,即 $x \rightarrow y$.系统(3)和

(4)同步,其中 $\gamma > 0$ 为设计参数, $\eta > 0$ 为网络权值的学习率,矩阵 P 为如下 Riccati 方程的正定对称解:

$$A_m^T P + P A_m + P \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{2}{\gamma} \right) P + Q = 0, \quad (14)$$

其中 Q 为正定对称阵, $\rho > 0$ 为设计参数.

证明 选取 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2\eta} \text{Tr}(\tilde{W}^T \tilde{W}), \quad (15)$$

对(15)式沿时间求导,可得

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{e}^T P e + \frac{1}{2} e^T P \dot{e} + \frac{1}{\eta} \text{Tr}(\tilde{W}^T \dot{\tilde{W}}). \quad (16)$$

将(11)式代入(16)式,并整理得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} e^T [A_m^T P + P A_m - \frac{2}{\gamma} P P] e + \epsilon^T(x) P e \\ &\quad + \frac{1}{\eta} \text{Tr}(\tilde{W}^T \dot{\tilde{W}}) + \sigma^T(x) \tilde{W} P e. \end{aligned} \quad (17)$$

由于 $\sigma^T(x) P e = \text{Tr}(P e \sigma^T(x) \tilde{W})$, $\dot{\tilde{W}} = -\dot{\hat{W}}$,将(13)和(14)式代入(17)式,得

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} e^T Q e - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho^2} e^T P P e - 2\epsilon^T(x) P e \right). \quad (18)$$

对(18)式配方,可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2} e^T Q e - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} P e - \rho \epsilon(x) \right)^T \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{\rho} P e - \rho \epsilon(x) \right) + \frac{1}{2} \rho^2 \epsilon^T(x) \epsilon(x). \end{aligned} \quad (19)$$

由上式可知

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{1}{2} e^T Q e + \frac{1}{2} \rho^2 \epsilon^T(x) \epsilon(x) \\ &\leq -\frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 + \frac{1}{2} \rho^2 \epsilon^T(x) \epsilon(x), \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $\lambda_{\min}(Q)$ 为矩阵 Q 的最小特征值.(20)式意味着当 $\|e\| > (\rho^2 \epsilon^T(x) \epsilon(x) / \lambda_{\min}(Q))^{1/2}$ 时, $\dot{V} \leq 0$,这说明 e 有界,即 $e \in L_\infty$.对(20)式等号两端从 0 到 T 积分,可得

$$\begin{aligned} V(T) - V(0) &\leq -\frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) \int_0^T \|e\|^2 dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho^2 \int_0^T \epsilon^T(x) \epsilon(x) dt. \end{aligned} \quad (21)$$

由于 $V(T) \geq 0$,所以

$$\begin{aligned} \int_0^T \|e\|^2 dt &\leq \frac{2V(0)}{\lambda_{\min}(Q)} + \frac{\rho^2}{\lambda_{\min}(Q)} \\ &\quad \cdot \int_0^T \epsilon^T(x) \epsilon(x) dt < \infty. \end{aligned} \quad (22)$$

(22)式说明 $e \in L_2$,由(11)式可知, \dot{e} 有界,即 $\dot{e} \in$

L_∞ . 根据推论可知 $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$. 证毕.

4 数值计算

考虑如下 Lorenz 系统：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 + ax_2, \\ \dot{x}_2 &= bx_2 - x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= -cx_3 + x_1x_2. \end{aligned}$$

系统的参数为 $a = 10, b = 28, c = 8/3$. 被控系统的参数扰动分别为 $\delta a = \delta b = 0.05, \delta c = 0.02$. 非线性扰动为 $\Delta f_1 = 0, \Delta f_2 = 0.1x_1x_3, \Delta f_3 = 0.2x_1x_2$. 外部扰动为 $d_1 = 0.8\sin t, d_2 = 0.7\sin t, d_3 = 0.6\sin t$. 同步系统的参数扰动为 $\delta a = \delta b = 0.03, \delta c = 0.04, \Delta f_1 = 0, \Delta f_2 = 0.5x_1x_3, \Delta f_3 = 0.4x_1x_2$. 外部扰动为 $d_1 = 0.9\sin t, d_2 = 0.6\sin t, d_3 = 0.4\sin t$. 这时两个系统都处于混沌状态. 预先给定的矩阵为

$$A_m = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ -3 & -7 & -5 \end{bmatrix},$$

它的特征根的实部都小于 0.

$$Q = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

解 Ricatti 方程 得

$$P = \begin{bmatrix} 1.4094 & 0.5784 & -0.2595 \\ 0.5784 & 1.7145 & -0.5281 \\ -0.2595 & -0.5281 & 1.1611 \end{bmatrix}.$$

神经网络选用三层 RBF 网络, 输入个数为 3, 中间层为 7, 输出个数为 3. 网络的中心值选为 $(-0.2, -0.15, -0.1, 0, 0.1, 0.15, 0.2)$. 设计参数 $\gamma = 0.05, \rho = 0.05$. 权值学习率为 $\eta = 0.15$. 仿真结果如图 1 至图 4 所示.

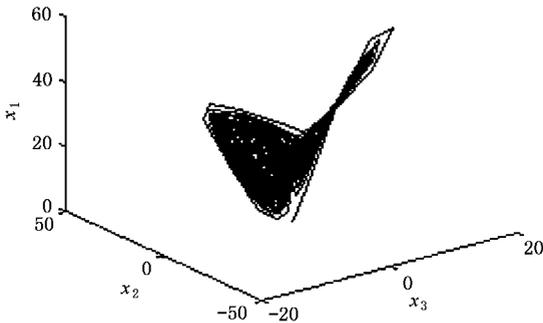


图 1 Lorenz 系统的相轨迹图

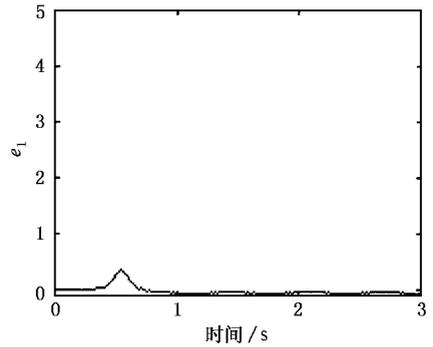


图 2 同步误差 e_1 曲线

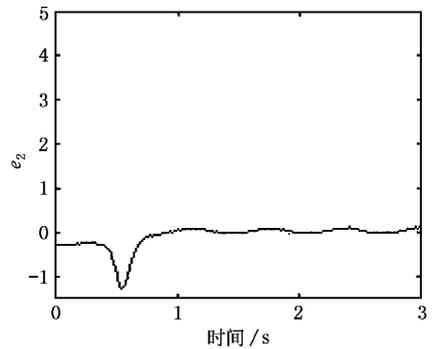


图 3 同步误差 e_2 曲线

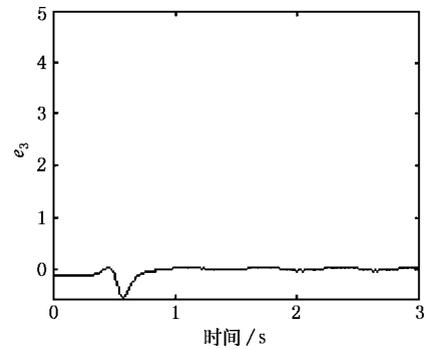


图 4 同步误差 e_3 曲线

从仿真结果可以看出, 当两个同步的系统都存在扰动的情况下, 使用本文方法能够较好地实现同步.

- [1] L. M. Pecora , T. L. Carroll , *Phys. Rev. Lett.* , **64**(1990) , 821 .
- [2] E. Ott , C. Grebogi , J. A. Yorke , *Phys. Rev. Lett.* , **64**(1990) , 1196 .
- [3] J. Z. Yu , N. Shu , *Acta Phys. Sin.* , **48**(1999) , 1198(in Chinese) 余建祖、苏楠 , *物理学报* , **48**(1999) , 1198 .
- [4] F. Tang , *Acta Phys. Sin.* , **48**(1999) , 802(in Chinese) 唐芳 , *物理学报* , **48**(1999) , 802 .
- [5] X. P. Guan , H. P. Peng , L. X. Li , Y. Q. Wang , *Acta Phys. Sin.* , **50**(2001) , 26(in Chinese) 关新平、彭海朋、李丽香、王益群 , *物理学报* , **50**(2001) , 26 .
- [6] L. X. Li , H. P. Peng , H. B. Lu , X. P. Guan , *Acta Phys. Sin.* , **50**(2001) , 629(in Chinese) 李丽香、彭海朋、卢辉斌、关新平 , *物理学报* , **50**(2001) , 629 .
- [7] G. Giuseppe , M. Saverio , *Int. J. Bifurc. Chaos* , **9**(1999) , 705 .
- [8] L. B. Yang , T. Yang , *Acta Phys. Sin.* , **49**(2000) , 33(in Chinese) 杨林保、杨涛 , *物理学报* , **49**(2000) , 33 .
- [9] X. P. Guan , Z. P. Fan , P. H. Peng , Y. Q. Wang , *Acta Phys. Sin.* , **50**(2001) , 2108(in Chinese) 关新平、范正平、彭海朋、王益群 , *物理学报* , **50**(2001) , 2108 .
- [10] Z. Y. Wang , Y. L. Cai , D. Jia , W. J. Liu , *Control and Decision* , **15**(2000) , 55(in Chinese) 王忠勇、蔡远利、贾冬、刘文江 , *控制与决策* , **15**(2000) , 55 .
- [11] S. Sastry , M. Bodson , Engle Wood Cliffs (Prentice Hall , NJ : 1989) .
- [12] K. Hornik , M. Stinchcombe , H. White , *Neural Networks* , **2** (1989) , 359 .

NEURAL NETWORK BASED ROBUST ADAPTIVE SYNCHRONIZATION OF A CHAOTIC SYSTEM*

GUAN XIN-PING TANG YING-GAN FAN ZHENG-PING WANG YI-QUN
(Institute of Electrical Engineering , Yanshan University , Qinhuangdao 066004 , China)
(Received 16 May 2001 ; revised manuscript received 2 June 2001)

ABSTRACT

Based on the neural network , the synchronization of two chaotic systems with uncertainties is studied. The results show that the approach proposed in this paper can overcome effectively the disruption of perturbation. Lorenz system is used to verify the effectiveness of the proposed method , and the simulation results confirm it.

Keywords : chaotic system , synchronization , neural network

PACC : 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 69872031) , and the Natural Science Foundation of Hebei Province , China(Grant No. 601225) .