第 50 卷 第 12 期 2001 年 12 月
1000-3290/2001/50(12)/2303-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50,No.12,December,2001

细胞神经网络平衡态的稳定性分析*

王宏霞 虞厥邦
(电子科技大学光电子技术系 570 实验室,成都 610054)
(2001 年 1 月 8 日收到;2001 年 5 月 12 日收到修改稿)

通过对细胞神经网络平衡态的表示、存在区域和稳定性的细致的研究,总结出一些有用的结论,根据所得平衡态的具体稳定的分布区域,适当调节权矩阵,就可使网络系统处于稳定状态,所得结果简洁且实用,并且也通过仿真算例阐明了这一点.

关键词:细胞神经网络,平衡态,稳定性
PACC:0545

1 引 言

细胞神经网络(CNN)理论及应用是由 Chua 等[1] 于 1988 年提出来的,由于其局部的连接性质而易于超大规模电路(VLSI)实现,故 CNN 具有广泛的应用前景.如在预测学、图像处理、模式识别、模逻阵列计算机的构建等方面都有大量报道[2—5].近年来,很多文献对动力系统的稳定性都很关注[6—10],CNN 这种神经动力系统稳定性的研究也有其重要意义,这是因为网络系统的稳定性有助于保证电路设计以及 VLSI 实现的正确性.在神经网络的某些应用(如模式分类问题)中,如果我们通过合理设计神经元之间的权值,而得到网络平衡态的具体的分布区域、数目及平衡态的稳定情况,则解决问题的效率就会有所提高.对于一维和二维 CNN 平衡态的有关分析结果已有文献报道[1,11],但对于高维 CNN 的平衡态在一定区域的较为精细的分布,及各个平衡态的稳定情况,目前还没有较满意的结果,且其研究比较困难.为此,本文借鉴了一维和二维 CNN 的有关分析结果,得到了高维 CNN 平衡态渐近稳定的较为细致的划分区域,其结果简明且实用,具有一定的应用价值.

2 网络系统状态方程的描述

本文研究的 CNN 网络的状态方程描述如下:

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f(x_j) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_j + I \quad (i = 1,2,\cdots,n). \tag{1}$$

这里的 i 为细胞记号;x_i 为状态变量;$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n$;$I$ 表示网络外部输入;$(a_{ij})_{n\times n}$ 和 $(b_{ij})_{n\times n}$ 分别为网络的反馈联接权矩阵和控制联接权矩阵;u_j 表示第 j 个细胞的输入;$f(x_j)$ 表示第 j 个细胞的输出,它是一个分段线性函数,满足如下公式:

$$f(x_j) = \frac{1}{2}(|x_j + 1| - |x_j - 1|). \tag{2}$$

我们称 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*) \in R^n$ 为网络(1)式的平衡态,如果有

$$-x_i^* + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f(x_j^*) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_j + I = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n). \tag{3}$$

3 主要结果

CNN 状态方程(1)可写成矩阵形式为

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = -X + AF(X) + Bu + I_0, \tag{4}$$

其中

$$X = [x_1, x_2 \cdots, x_n]^T,$$
$$F(X) = [f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)]^T,$$
$$u = [u_1, u_2, \cdots, u_n]^T, \quad I_o = [I, I, \cdots, I]^T,$$
$$A = (a_{ij})_{n\times n}, \quad B = (b_{ij})_{n\times n}.$$

* 国家自然科学基金(批准号:69871005)资助的课题.

定理 1 若网络(1)式的所有神经元工作在 $|x_i|<1$, $(i=1,\cdots,n)$ 内,当矩阵 $A-E$ 非奇异时,则在如下区域

$$\begin{cases} 1-a_{ii} > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|; \\ \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij}u_j) < n(1-I) \\ \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}-b_{ij}u_j) < n(1+I) \end{cases}$$

存在渐近稳定的平衡态 $X^*=(E-A)^{-1}(Bu+I_0)$,其中 E 为单位矩阵.

证明 若网络(1)式的所有神经元工作在 $|x_i|<1$, $(i=1,\cdots,n)$ 内,则 $F(X)=X$,令(4)式等号右边等于 0,得网络(1)式的平衡态为

$$X^*=(E-A)^{-1}(Bu+I_0).$$

由定理 1 条件可知矩阵 $A-E$ 为对角占优矩阵且负定,所以平衡态稳定.

由 $x_i^*=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^*+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}u_j+I$ 可推得

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^*\left(1-\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}u_i+nI.$$

再由 $x_i<1$ 推得

$$\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij}u_j)<n(1-I).$$

同样由 $x_i>-1$ 推得

$$\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}-b_{ij}u_j)<n(1+I).$$

因此,定理 1 得证.

注: 若矩阵 $A-E$ 非奇异,只要 $a_{ii}>1$,则网络(1)式的平衡态是不稳定的.

定理 2 若网络(1)式的所有神经元工作在 $x_i\geqslant1$ $(x_i\leqslant-1)$, $(i=1,\cdots,n)$ 内,则在如下区域

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij}u_j)\geqslant1-I\quad\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-b_{ij}u_j)\geqslant1+I\right)$$

存在渐近稳定的平衡态 $X^*=Am+Bu+I_0$ $(X^*=-Am+Bu+I_0)$,其中 $m\in R^{n\times1}$ 且矩阵元素全为 1.

证明 注意到所有神经元工作在 $x_i\geqslant1$ $(x_i\leqslant-1)$, $(i=1,\cdots,n)$ 内,网络(4)式的所有特征值为 -1 即可得证.

不失一般性,假设第 k 个神经元工作在 $x_k\geqslant1$ 内,第 l 个神经元工作在 $x_l\leqslant-1(1<k<l<n)$ 内,其余神经元工作在 $|x_i|<1$ $(i\neq k,l,i=1,\cdots,n)$ 内,则网络(4)式可写成

$$\dot{X}=A_{kl}X+a_k-a_l+Bu+I_0, \tag{5}$$

其中

$$a_k=[a_{1k}\quad a_{2k}\cdots\quad a_{kk}\cdots\quad a_{lk}\cdots\quad a_{nk}]^T,$$
$$a_l=[a_{1l}\quad a_{2l}\cdots\quad a_{kl}\cdots\quad a_{ll}\cdots\quad a_{nl}]^T,$$

$$A_{kl}=\begin{bmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & 0 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,l-1} & 0 & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1 & \cdots & a_{2,k-1} & 0 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2,l-1} & 0 & a_{2,l+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{k,k-1} & -1 & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,l-1} & 0 & a_{k,l+1} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{l,k-1} & 0 & a_{l,k+1} & \cdots & a_{l,l-1} & -1 & a_{l,l+1} & \cdots & a_{ln} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & 0 & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,l-1} & 0 & a_{n,l+1} & \cdots & a_{nn}-1 \end{bmatrix}.$$

定理 3 若矩阵 A_{kl} 非奇异,网络(5)式存在渐近稳定的平衡态 $X^*=A_{kl}^{-1}[a_l-a_k-Bu-I_0]$ 的充分条件为

$$1-a_{ii}(1-\delta_j)>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}(1-\delta_j)|, \tag{6}$$

其中

$$\delta_j=\begin{cases}1, & j=k,l;\\ 0, & j\neq k,l.\end{cases}$$

证明方法类似定理 1,略去.

注: 若矩阵 A_{kl} 非奇异,只要 $a_{ii}(1-\delta_j)>1$,则网络(5)式的平衡态是不稳定的.

4 仿真算例与结果分析

我们考虑如下四维 CNN 网络：

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=-x_i+\sum_{j=1}^{4}a_{ij}f(x_j)+\sum_{j=1}^{4}b_{ij}u_j+0.5 \quad (i=1,2,3,4), \tag{7}$$

其中联接权系数矩阵 A 和 B 分别为

$$A=(a_{ij})_{4\times4}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1/2 & -1/2\\ 1/2 & -1/2 & 0 & 1/3\\ -1/2 & -1/3 & 1/4 & -1/4\\ 1/2 & -1/4 & 1/3 & -2\end{bmatrix},$$

$$B=(b_{ij})_{4\times4}=\begin{bmatrix}1/2 & 1 & 1/3 & 0\\ 0 & 1/2 & 1/4 & -1/2\\ -1/4 & -1/3 & 1 & 2\\ -2 & 1/2 & 0 & -1\end{bmatrix},$$

输入为

$$u=[1/2\quad 1/3\quad 1\quad -1/4]^T.$$

我们取网络(7)式的第 2 个神经元工作在 $x_k\geqslant1$ $(k=2)$内，第 3 个神经元工作在 $x_l\leqslant-1$ $(l=3)$内，第 1 个和第 4 个神经元工作 $|x_i|<1$ $(i=1,4)$内，则

$$A_{kl}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & -1/2\\ 1/2 & -1 & 0 & 1/3\\ -1/2 & 0 & -1 & -1/4\\ 1/2 & 0 & 0 & -3\end{bmatrix}.$$

易知矩阵 A_{kl} 是非奇异的，且满足定理 3 的条件(6)式，故网络(7)式存在渐近稳定的平衡态 $x^*=[0.7692\quad 2.0246\quad 0.8889\quad 0.2949]^T$.

以上算例是对四维 CNN 网络的仿真结果. 由 CNN 神经元的工作情况，我们就可适当调节外部输入，根据以上所得的三个定理来设计网络的联接权参数矩阵，使得网络不会发散或呈混沌状态，文中所得结果并不要求网络具有对称模板，从而便于实际应用和网络设计. 关于一维 CNN 平衡态的存在区域，数目及稳定性的讨论，参见文献[1]，我们知道一般情况下，实际的神经网络是由很多细胞组成的高维神经网络，故本文也推广了文献[1]的结果，并且允许工程人员根据输出的要求，通过调节联接权参数矩阵来设计网络.

[1] L. O. Chua, L. Yang, *IEEE Trans. CAS*, **35**(1988), 1257.

[2] J. S. Zhang, X. C. Xiao, *Chin. Phys. Lett.*, **17**(2000), 88.

[3] T. Matsumoto, L. O. Chua, H. Suzuki, *IEEE Trans. CAS*, **37**(1990), 633.

[4] L. Cao, Y. Sun, J. Yu, *Proc. ICONIP '95*, **2** (1995), 913.

[5] T. Roska, L. O. Chua, *IEEE Trans. CAS* Ⅱ, **40** (1993), 163.

[6] L. Hong *et al.*, *Acta Phys. Sin.*, **49**(2000), 1228 (in Chinese) [洪　灵等，物理学报，**49**(2000)，1228].

[7] D. H. He *et al.*, *Acta Phys. Sin.*, **49**(2000), 833 (in Chinese) [何岱海等，物理学报，**49**(2000)，833].

[8] P. Zhou *et al.*, *Acta Phys. Sin.*, **48**(1999), 1804 (in Chinese) [周　平等，物理学报，**48**(1999)，1804].

[9] S. G. Wu *et al.*, *Acta Phys. Sin.*, **48**(1999), 2180 (in Chinese) [吴顺光等，物理学报，**48**(1999)，2180].

[10] D. H. He *et al.*, *Acta Phys. Sin.*, **48**(1999), 1611 (in Chinese) [何岱海等，物理学报，**48**(1999)，1611].

[11] Xiao-xi Liao, *Sci. Chin.* (A), **24**(1994), 1037 (in Chinese) [廖晓晰，中国科学(A)，**24**(1994)，1037].

ANALYSIS OF STABILITY FOR EQUILIBRIUM OF CELLULAR NEURAL NETWORKS*

WANG HONG-XIA YU JUE-BANG

(*Laboratory* 570, *Department of Optoelectronic Technology*, *University of Electronic Science and Technology of China*, *Chengdu* 610054, *China*)

(Received 8 January 2001; revised manuscript received 12 May 2001)

ABSTRACT

This paper discusses in detail the expressions, distribution and stability of equilibria for cellular neutral networks. Some useful conclusions are obtained. The network can be stable via choosing different connection-weight matrices based on special regions. The example shows the conditions are concise and easy to use.

Keywords: cellular neural network, equilibrium, stability

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 69871005).