

利用小波分析计算离散动力系统的 最大 Lyapunov 指数*

刘海峰 赵艳艳 代正华 龚欣 于遵宏

(华东理工大学资源与环境工程学院, 上海 200237)

(2001 年 6 月 6 日收到, 2001 年 7 月 10 日收到修改稿)

最大 Lyapunov 指数是诊断和描述动力系统混沌的重要参数. 在仿真计算的基础上, 发现小尺度的小波变换模数的最大 Lyapunov 指数与离散动力系统本身是一致的. 同时仿真计算还表明, 由于小尺度小波变换的高通滤波性质, 利用小波变换模数计算最大 Lyapunov 指数可有效克服极强的大尺度噪声的干扰.

关键词: 混沌, Lyapunov 指数, 小波分析

PACC: 0545, 0540

1 引 言

近几年来, 混沌信号的时间序列分析研究是目前非线性科学的前沿课题之一^[1-3]. 在诊断和描述混沌信号时, 最大 Lyapunov 指数(λ_1)不仅是一个很重要的不变量, 而且是判断混沌存在的一个重要依据. 目前, 利用 λ_1 去诊断和描述混沌仍然是一种主要方法. 估计 λ_1 的方法主要有两种: 一种是分析法 (analytic approach), 一种是轨道跟踪法 (trajectory tracing method). 前者是用一个函数 (如局部多项式或神经网络等) 来建立系统模型, 然后估计系统的雅可比矩阵, 进而求取 λ_1 ; 后者是直接从 λ_1 的定义出发跟踪系统的两条轨道, 获取 λ_1 . 由于轨道跟踪法不像分析法那样易受系统拓扑结构的影响, 因而受到许多学者的高度重视.

自从 1985 年 Wolf 等^[4]提出轨道跟踪法以来, 这种方法得到了较大的改进^[5-7]. 最有代表性的是 Kantz^[5]和 Rosenstein 等^[6]的工作, 他们给出了一种比较优化的算法^[3]. 对于 m 维相空间 $x_t = (x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+m-1})$, 该法定义

$$\text{dis}(x_t, x_i, \Delta t) = |x_{t+m-1+\Delta t} - x_{i+m-1+\Delta t}|. \quad (1)$$

同时 U_i 是 x_i 的半径为 ϵ 的邻域. 计算

$$S(\Delta t) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \ln \left(\frac{1}{|U_i|} \sum_{x_j \in U_i} \text{dis}(x_t, x_j, \Delta t) \right). \quad (2)$$

当 $S(\Delta t)$ 随 Δt 线性增加时, 其斜率就是最大 Lyapunov 指数.

小波变换^[8]是目前许多科学和工程技术领域研究中极为活跃的热门问题之一, 已在诸如湍流^[9, 10]、分形^[11, 12]、信号处理^[13, 14]、混沌^[15-18]等各种应用领域获得了广泛的应用. 它既可以作为表示函数的一种基底, 也可以作为时间-频率分析的一种技术. 本文提出利用信号的小波变换模数代替信号本身, 在 m 维相空间中计算其最大 Lyapunov 指数.

2 小波分析

在 $L^2(\mathbf{R})$ 上的一维连续小波变换为

$$\begin{aligned} \tilde{f}(b, a) &= \frac{1}{|a|^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi \left(\frac{x-b}{a} \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{W_{a,b}(x)} dx, \quad f \in L^2(\mathbf{R}) \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $a, b \in \mathbf{R}$ 而 $a \neq 0$, $W_{a,b}(x) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \psi \left(\frac{x-b}{a} \right)$, $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ 满足“容许性”条件.

本文探讨离散动力系统小波变换后的最大 Lyapunov

* 国家重点基础研究发展规划 (批准号: G1999022103) 教育部骨干教师基金资助的课题.

apunov 指数.

3 小波变换模数的最大 Lyapunov 指数

对一由离散混沌系统产生的序列 $\{x_k : k = 1, 2, \dots, N\}$ 进行小波变换(尺度 $a = 1$, 为采样间隔)得到一相应的由小波变换模数构成的序列 $\{\tilde{x}_k : k = 1, 2, \dots, N\}$. 为避免边缘效应, 可将该序列的首尾几个点去掉. 对其利用由 Kantz^[5] 提出的算法计算最大 Lyapunov 指数. 即在 m 维相空间 $\tilde{x}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}, \dots, \tilde{x}_{i+m-1})$ 定义

$$\text{dis}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_i, \Delta t) = |\tilde{x}_{i+m-1+\Delta t} - \tilde{x}_{i+m-1+\Delta t}| \quad (4)$$

同时 U_i 是 \tilde{x}_i 的直径为 ϵ 的邻域. 计算

$$S(\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^T \ln \left(\frac{1}{|U_i|} \sum_{\tilde{x}_i \in U_i} \text{dis}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_i, \Delta t) \right). \quad (5)$$

当 $S(\Delta t)$ 随 Δt 线性增加时, 其斜率就是 $\{\tilde{x}_k : k = 1, 2, \dots, N\}$ 的最大 Lyapunov 指数.

4 仿真结果与分析

4.1 混沌系统

我们以 Logistic, Hénon 和 Ikeda^[5] 系统(计算中选择 y 变量)为例, 采用 Matlab5.3 及其小波工具包进行了仿真计算. 表 1 列出了这三种混沌系统的有关参数.

表 1 离散混沌动力系统及其最大 Lyapunov 指数

混沌系统	方程	λ_1
Logistic	$x_{i+1} = 4.0x_i(1 - x_i)$	$0.693^{[6]}$
Hénon	$x_{i+1} = 1 - 1.4x_i^2 + 0.3x_{i-1}$	$0.4169^{[5]}$
Ikeda	$\varphi = 0.4 - 6(1 + x_i^2 + y_i^2)$ $x_{i+1} = 1 + 0.9(x_i \cos \varphi - y_i \sin \varphi)$ $y_{i+1} = 0.9(x_i \sin \varphi + y_i \cos \varphi)$	$0.505^{[5]}$

计算结果呈现在表 2 和图 1 中. 表 2 中 λ_{1d} 表示由混沌序列本身计算的最大 Lyapunov 指数, λ_{1w} 表示由混沌序列的 Morlet 小波^[7] 变换模数(尺度 $a = 1$) 计算的最大 Lyapunov 指数. 从表 2 中可以发现, λ_{1w} 与 λ_{1d} 基本相同, 并具有基本上相当的计算精度.

表 2 仿真计算结果

混沌系统	N	m	λ_{1d}	λ_{1d} 的相对误差/%	λ_{1w}	λ_{1w} 的相对误差/%
Logistic	2000	2	0.6915	-0.22	0.6865	-0.94
		3	0.6980	0.72	0.6897	-0.48
		4	0.6982	0.75	0.7086	2.25
		5	0.6871	-0.85	0.7063	1.92
Hénon	2000	2	0.4163	-0.14	0.4076	-2.23
		3	0.4163	-0.14	0.4139	-0.72
		4	0.4090	-1.89	0.4190	0.50
		5	0.4052	-2.81	0.4201	0.77
Ikeda	5000	3	0.4794	-5.07	0.4791	-5.13
		4	0.4834	-4.28	0.4806	-4.83
		5	0.4963	-1.72	0.5009	-0.81
		6	0.4914	-2.69	0.4992	-1.15
		7	0.4896	-3.05	0.5052	0.04
		8	0.4958	-1.82	0.5033	-0.34
		9	0.4993	-1.13	0.5006	-0.87

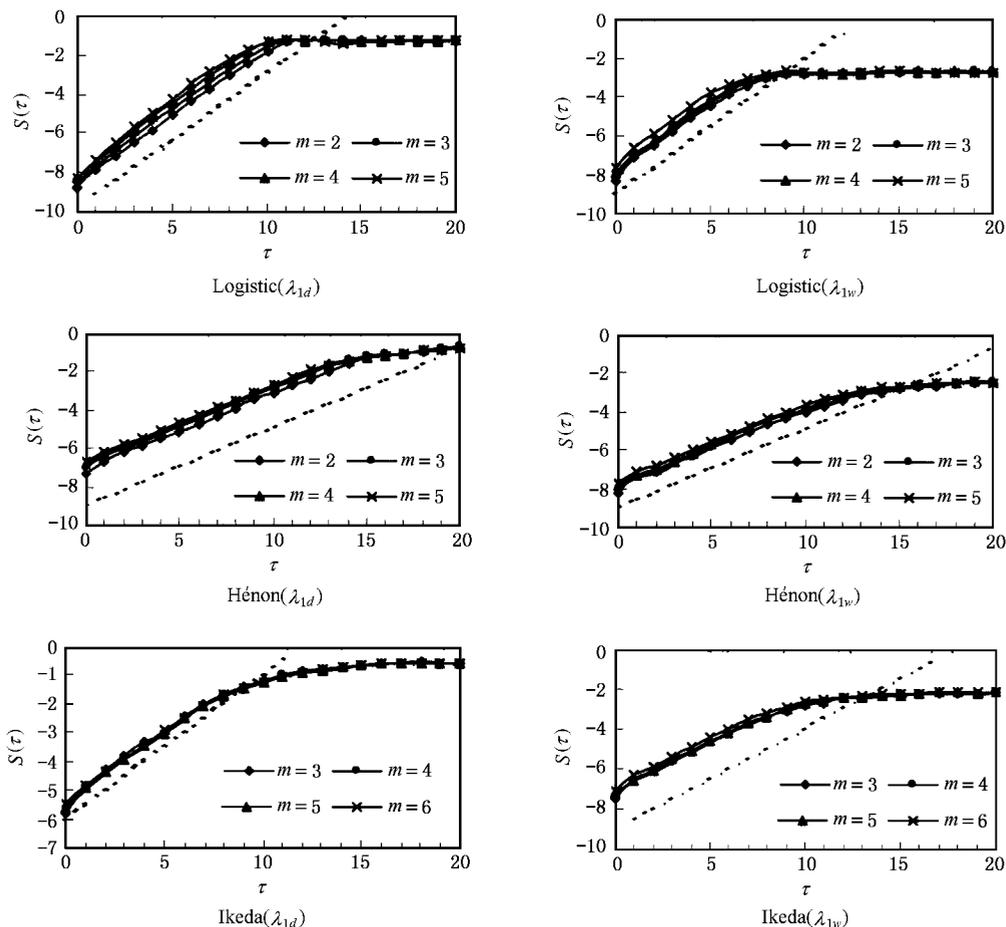


图 1 最大 Lyapunov 指数仿真计算收敛图 图中虚线斜率为 λ_1

4.2 尺度的影响

计算结果表明,小波变换时的尺度对最大 Lyapunov 指数的计算结果有显著影响.以 Hénon 系统为例,同时还采用 Morlet 小波分别计算了 $a = 2-5$ 时的最大 Lyapunov 指数,结果见表 3 及图 2.随尺度的增大,由小波变换模数计算的最大 Lyapunov 指数逐渐减小,并且计算时线性关系逐渐变差,从图 1 和图 2 中可以发现, $a = 1$ 的计算结果最好.计算结果还清楚表明,随 m 的增大,尺度的影响逐渐减弱.

4.3 小波函数的影响

以 Hénon 系统为例,对混沌信号选择 Morlet, Mexican hat, Gauss1, Haar 和 Db4^[8]等 5 种(后两种是正交小波)不同的小波进行小波变换,最大 Lyapunov 指数($a = 1$)的计算结果见表 4 及图 3.计算结果表明,小波函数对最大 Lyapunov 指数计算结果的影响不大,小波的正交性对计算结果的影响也不大.

由此可以得出,对离散动力系统而言,小尺度的小波变换模数的最大 Lyapunov 指数与系统本身是一致的.

4.4 噪声的影响

小波具有带通滤波器的性质^[19],尺度为采样间隔的小波变换则具有高通滤波器的功能.因此上述利用小波变换模数计算最大 Lyapunov 指数的算法可有效地克服大尺度噪声信号的影响.我们以 Hénon 系统为例,在混沌信号上分别叠加具有一定振幅的正弦信号、振幅变化的正弦信号和线性偏移信号,比较直接采用信号计算最大 Lyapunov 指数及采用其小波变换模数($a = 1$, Morlet 小波)计算最大 Lyapunov 指数的差异.

首先,在混沌信号上叠加振幅为 100 的正弦信号,即 $100\sin(\pi/200t)$,信噪比(混沌信号与正弦信号能量之比)约为 0.0001.计算结果见图 4.从图 4 中可以发现,当 $m > 3$ 时,两种方法均能给出精度相当

准确(相对误差均小于 3%)的计算结果,但直接采用信号计算最大 Lyapunov 指数受正弦信号的影响较大.

表 3 尺度对最大 Lyapunov 指数的影响

a	M	λ_{1w}	λ_{1w} 的相对误差/%
1	2	0.4076	-2.23
	3	0.4139	-0.72
	4	0.4190	0.50
	5	0.4201	0.77
	2	0.3933	-5.66
2	3	0.4165	-0.10
	4	0.3999	-4.08
	5	0.4077	-2.21
	3	0.3341	-19.86
3	3	0.3957	-5.09
	4	0.4114	-1.32
	5	0.4187	0.43
	4	0.2919	-29.98
4	3	0.3293	-21.01
	4	0.3391	-18.66
	5	0.3787	-9.16
	2	0.2563	-38.52
	5	3	0.2536
4		0.2695	-35.36
5		0.2714	-34.90

表 4 小波函数度对最大 Lyapunov 指数的影响

小波	m	λ_{1w}	λ_{1w} 的相对误差/%
Morlet	2	0.4076	-2.23
	3	0.4139	-0.72
	4	0.4190	0.50
	5	0.4201	0.77
	2	0.4025	-3.45
Mexican hat	3	0.4060	-2.61
	4	0.4218	1.18
	5	0.4134	-0.84
Gauss1	2	0.4081	-2.11
	3	0.4021	-3.55
	4	0.4076	-2.23
Haar	5	0.4062	-2.57
	2	0.4244	1.80
	3	0.4169	0.00
Db4	4	0.4190	0.50
	5	0.4155	-0.34
	2	0.4095	-1.78
Db4	3	0.4175	0.14
	4	0.4205	0.86
	5	0.4137	-0.77

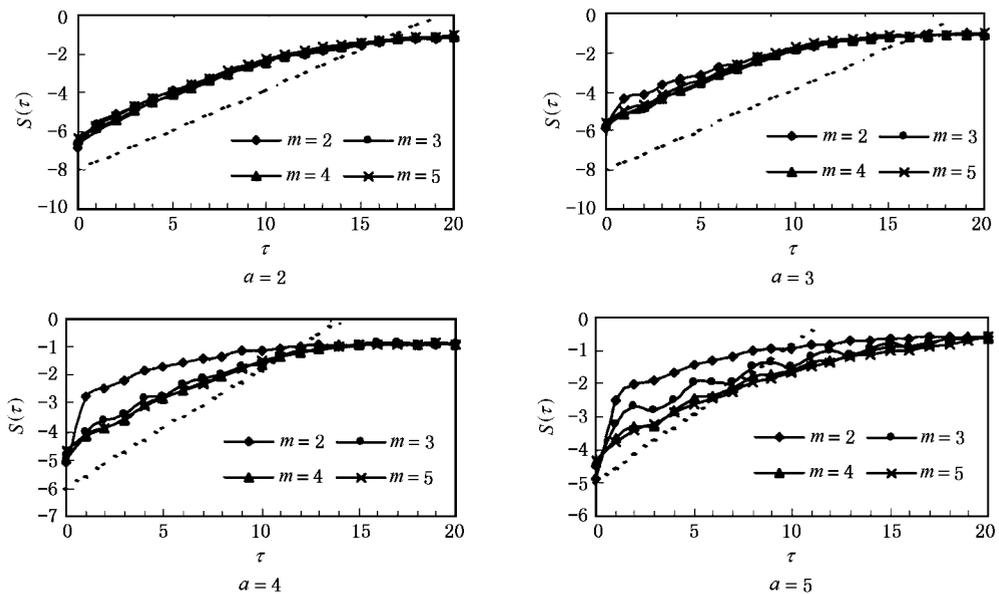


图 2 尺度对最大 Lyapunov 指数的影响 图中虚线斜率为 λ_1

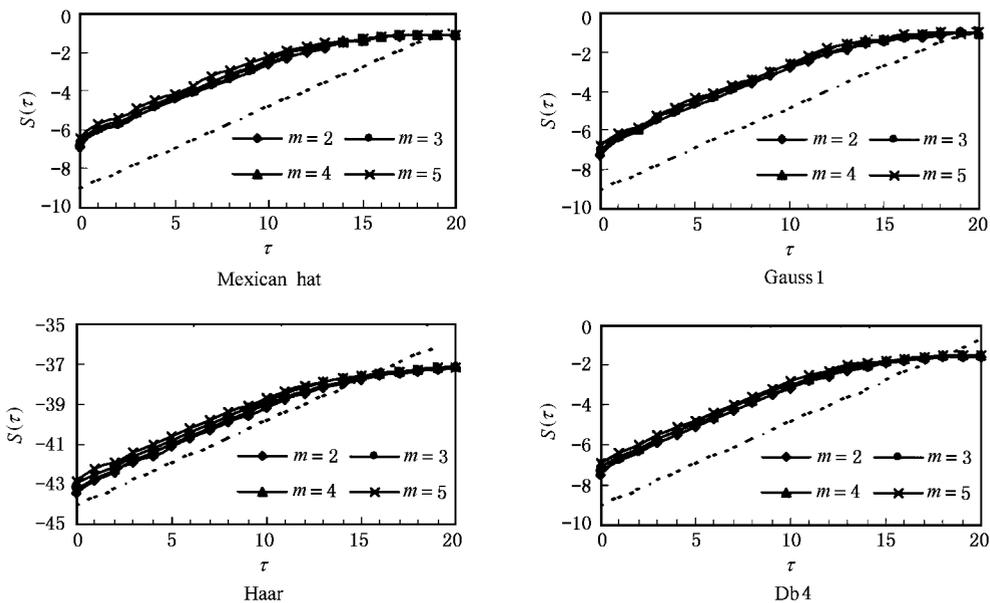


图 3 小波函数对最大 Lyapunov 指数的影响 图中虚线斜率为 λ_1

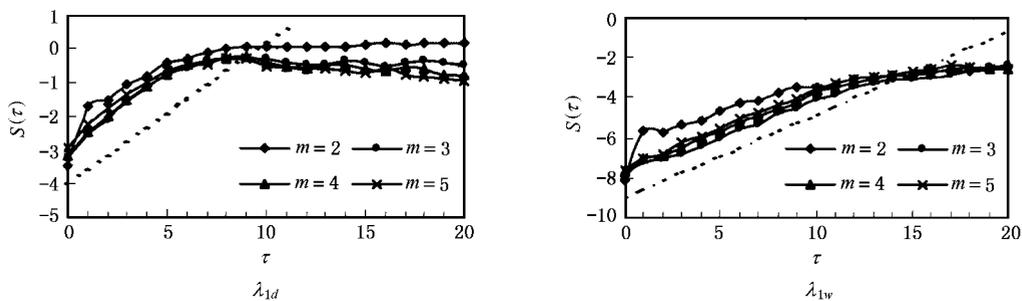


图 4 正弦信号对最大 Lyapunov 指数的影响 图中虚线斜率为 λ_1

其次,在混沌信号上叠加振幅变化的正弦信号,即 $100(t/2000)^2 \sin(\pi/200t)$,信噪比约为 0.0005. 计算结果见图 5. 从图 5 中可以发现,直接采用信号已无法计算出最大 Lyapunov 指数,而利用小波变换模数则可以得到较好的计算结果,当 $m > 3$ 时,计算结果的相对误差小于 3%.

计算中还发现,由于随时间的推移,整个信号的取值范围迅速增大,对于一定的阈值,当 i 较大时, U_i 基本上是空的,即此时的信号对计算结果基本没有贡献. 而利用小波变换模数计算时,这一缺陷得到了显著改善,可以比较充分地利用全部数据.

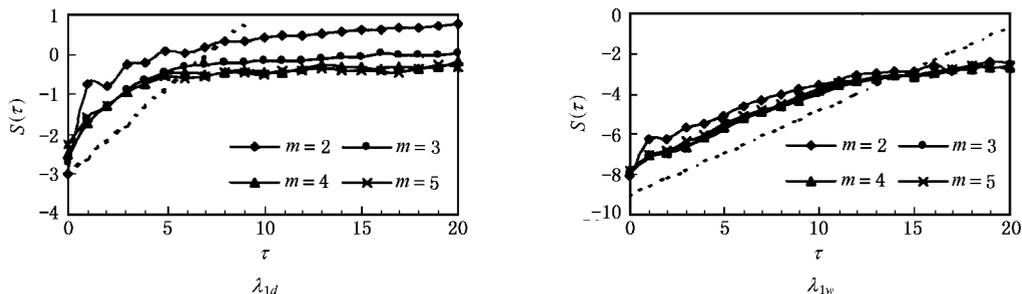
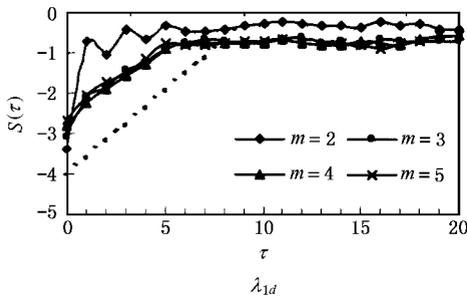


图 5 振幅变化的正弦信号对最大 Lyapunov 指数的影响 图中虚线斜率为 λ_1

最后,在混沌信号上叠加一线性增加信号,即 $10(t - 1000)/1000$,信噪比约为 0.016. 计算结果见图 6. 从图 6 中可以发现,直接采用信号已无法准确计



算出最大 Lyapunov 指数,而利用小波变换模数则可以得到较好的计算结果. 当 $m = 2-5$ 时,后者的计算结果分别为 0.4010, 0.4096, 0.4140, 0.4188, 相对

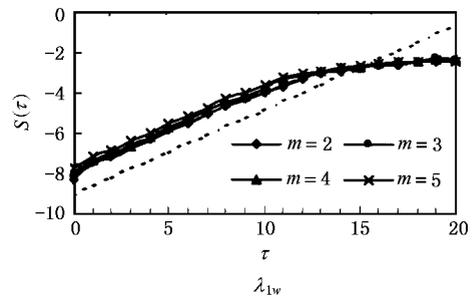


图 6 叠加线性增加信号对最大 Lyapunov 指数的影响 图中虚线斜率为 λ_1

误差为 -3.81% , -1.75% , -0.70% , 0.46% .

5 结 论

本文通过仿真计算发现,小尺度的小波变换模数的最大 Lyapunov 指数与系统本身是一致的,并具

有基本相同的计算精度. 由此可初步推断,对离散动力系统而言,进行小尺度小波变换时,最大 Lyapunov 指数基本不变. 同时仿真计算还表明,由于小尺度小波变换的高通滤波性质,利用小波变换模数计算最大 Lyapunov 指数可有效克服极强的大尺度噪声的干扰.

- [1] P. Berge *et al.*, Order Within Chaos (John Wiley & Sons Inc , 1984), p. 279.
- [2] G. L. Baker *et al.*, Chaotic Dynamics : an Introduction (Cambridge University Press , 1996), p. 84.
- [3] H. Kantz *et al.*, Nonlinear Time Series Analysis (Cambridge University Press , 1997), p. 58.
- [4] A. Wolf *et al.*, *Physica*, **16D**(1985), 285.
- [5] H. Kantz, *Phys. Lett.*, **A185**(1994), 77.
- [6] M. T. Rosenstein *et al.*, *Physica*, **D65**(1993), 117.
- [7] Shao-qing Yang *et al.*, *Acta Phys. Sin.*, **49**(2000), 636(in Chinese) [杨绍清等, *物理学报*, **49**(2000), 636].
- [8] I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, CBMS-NSF Reg Conf Ser Appl Math (Philadelphia : SIAM Press , 1992), p. 17.
- [9] M. Farge, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **24**(1992), 395.
- [10] M. Farge *et al.*, *Proc. IEEE*, **84**(1996), 639.
- [11] S. Jaffard, Some Mathematical Results about the Multifractal For-

malism for Function, in Wavelet : Theory, Algorithms, and Applications (Academic Press , 1994), p. 325.

- [12] C. Karanikas, *Chaos, Solitons and Fractals*, **11**(2000), 275.
- [13] P. Guillemain *et al.*, *Proc. IEEE*, **84**(1996), 561.
- [14] K. Forinash *et al.*, *Physica*, **D123**(1998), 123.
- [15] L. G. Garnero *et al.*, *Physica*, **A246**(1997), 487.
- [16] X. G. Huang *et al.*, *Acta Phys. Sin.*, **48**(1999), 1810(in Chinese) [黄显高等, *物理学报*, **48**(1999), 1810].
- [17] J. Q. Fang *et al.*, *Acta Phys. Sin.*, **50**(2001), 435(in Chinese) [方锦清等, *物理学报*, **50**(2001), 435].
- [18] Z. Y. Wang *et al.*, *Acta Phys. Sin.*, **48**(1999), 206(in Chinese) [王忠勇等, *物理学报*, **48**(1999), 206].
- [19] C. K. Chui, An Introduction to Wavelets (Xi 'an Jiaotong University Press, Xi 'an 1995), p. 82(in Chinese) [崔锦泰, *小波分析导论* (西安交通大学出版社,西安,1992),第 82 页].

CALCULATION OF THE LARGEST LYAPUNOV EXPONENT IN THE DISCRETE DYNAMICAL SYSTEM WITH WAVELET ANALYSIS*

LIU HAI-FENG ZHAO YAN-YAN DAI ZHENG-HUA GONG XIN YU ZUN-HONG

(College of Resource and Environmental Engineering , East China University of Science and Technology , Shanghai 200237 , China)

(Received 9 June 2001 ; revised manuscript received 10 July 2001)

ABSTRACT

The largest Lyapunov exponent is an important parameter of detecting and characterizing chaos produced from a dynamical system. Based on simulative calculation , it has been found that the largest Lyapunov exponent of the small-scale wavelet transform modulus of a discrete dynamical system is the same as the system 's. At the same time , the calculated results show that calculating the largest Lyapunov exponent with the small-scale wavelet transform modulus can efficiently eliminate the effect of strong large-scale noiss because of the high-pass filtering characteristic of small-scale wavelet transform.

Keywords : chaos , Lyapunov exponent , wavelet analysis

PACC : 0545 , 0540

* Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China(Grant No. G1999022103) , and by the Foundation for University Key Teachers by the Ministry of Education , China.