第 50 卷 第 12 期 2001 年 12 月
1000-3290/2001/50(12)/2318-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.50, No.12, December, 2001
©2001 Chin. Phys. Soc.

混沌 Lur 'e 系统的线性输出反馈同步

刘 锋[1)] 任 勇[1)] 山秀明[1)] 邱祖廉[2)]

[1)] (清华大学电子工程系,北京 100084)

[2)] (西安交通大学自动控制系,西安 710049)

(2001 年 6 月 22 日收到;2001 年 7 月 9 日收到修改搞)

针对一类特殊的混沌 Lur 'e 系统,以系统最后一状态变量作为驱动信号进行误差的线性输出反馈,提出一个同步的全局控制规律,并证明了同步的渐近稳定性.最后以蔡氏振子为例进行仿真,验证该同步方法的有效性.

关键词:混沌同步,输出反馈,Lur 'e 系统,蔡氏振子

PACC:0545

1 引 言

由于混沌系统对初值极端敏感,初值十分接近的任意两条轨迹会很快分离并变得毫不相关,混沌同步被认为是几乎不可能的.自从 Pecora 和 Carroll[1] 于 1990 年首次提出混沌的驱动-响应同步方法,并以 Lorenz 系统为例实现同步以来,混沌同步及其应用研究引起国内外众多学者的兴趣,并且进展飞快,尤其是在保密通信中的应用研究.

近来,针对混沌 Lur 'e 系统提出了几种同步的控制方法[2—5].Nijmeijer 等[2],Morgul 等[3] 将混沌同步看作观测器设计中的一种特例,因此可应用非线性控制理论进行求解.其反馈增益根据混沌系统线性部分矩阵的特征值进行设计,通常由于反馈增益很大导致实现困难.Curran 等[4] 采用绝对稳定性定理,通过解决一个非凸的非线性优化问题来设计同步控制器,同时考虑了信道噪声和参数失配,其控制器的设计极其复杂.Wang 等[5] 针对一类特殊的混沌 Lur 'e 系统(和本文不同),以状态第一分量作为驱动信号设计了一个全局的同步控制规律.另外,文献[6,7]中给出的方法也适用于某些混沌 Lur 'e 系统.

本文针对一类特殊的混沌 Lur 'e 系统,以系统状态的最后一个分量作为驱动信号,提出了一个线性误差反馈控制规律,证明了同步的渐近稳定性.给出的同步控制器相对简单,而且易于实现.

2 主要定理与证明

本文针对如下形式的状态方程描述的混沌系统进行讨论:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \cdots & \cdots & \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} f(x) \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$y = C\boldsymbol{x}, \quad C = (0\cdots01) \in R^n, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n$ 为状态变量,$A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 为常数矩阵,$y \in R$ 为系统输出.

对由(1)和(2)式描述的系统,我们作如下假设:

A. 矩阵 A 中元素 a_{ij} 满足:$a_{i,j-1} \neq 0$ $(i = 2, \cdots, n)$和 $a_{ij} = 0 (j < i-1)$;

B. 函数 $f(\boldsymbol{x})$满足 Liptchitz 条件,并记 k 为 Liptchitz 常数,即 $\| f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2) \| \leq k \| \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \|$.

假设 A 和(2)式保证了系统的可观性,假设 B 对大多数非线性系统来说是一个通常的条件,即使函数 $f(\boldsymbol{x})$ 不是全局 Liptchitz 的,也是局部 Liptchitz 的.

在我们的同步框架中,用输出误差的线性反馈来实现驱动和响应系统的同步.对由(1)和(2)式描述的驱动系统,其响应系统的状态方程如下:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = A\hat{\boldsymbol{x}} + (f(\hat{\boldsymbol{x}})0\cdots0)^T + u, \quad \hat{y} = C\hat{\boldsymbol{x}}, \tag{3}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n)^T \in R^n$ 为状态变量,$u \in R^n$ 为控制量,$\hat{y} \in R$ 为输出.取控制

$$u = K(y - \hat{y}), \tag{4}$$

其中 $K \in R^n$ 为反馈矩阵.

定义误差向量 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}} \in R^n$,则由系统方程(1)和(3)可得到如下的误差系统方程:

$$\dot{e} = (A - KC)e + ((f(x) - f(\hat{x}))0\cdots0)^T. \quad (5)$$

在给出主要定理之前,先引入下面要用的一些定义和引理.

引理 1　存在唯一正定的矩阵 $S(\theta) = (s_{ij}(\theta)) \in R^{n\times n}$ 满足下面的李雅普诺夫方程：

$$\theta S + A_0^T S + SA_0 - C^T C = 0, \qquad \theta > 0, \quad (6)$$

其中

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in R^{n\times n},$$

$$C = (0,\cdots,0,1) \in R^n.$$

而且满足

$$s_{ij}(\theta) = \frac{(-1)^{i+j} C_{2n-i-j}^{n-j}}{\theta^{2n-i-j+1}}, \qquad 1 \leqslant i, \qquad j \leqslant n,$$

$$C_n^i = \frac{n!}{(n-i)!i!}. \quad (7)$$

引理 1 可以仿照 Gauthier 在文献[8]中的定理 3 的证明过程类似得到,文献[9]中也给出了具体的证明过程,这里忽略不证.

接着,首先陈述下面的定理.

定理 1　如果系统(1)式满足假设 A 和 B,则当 $A = A_0$ 时,存在 $\theta_0 \geqslant 1$,对任意的 $\theta \geqslant \theta_0$ 和 $e(0) \in R^n$,取反馈 $K = S^{-1}(\theta)C^T$ 可使得系统(1)和(3)式的同步误差系统(5)式在原点渐近稳定.

证明　将 $K = S^{-1}(\theta)C^T$ 代入(4)和(5)式,考虑到 $A = A_0$,则得到

$$\dot{e} = (A_0 - S^{-1}(\theta)C^T C)e + ((f(x) - f(\hat{x}))0\cdots0)^T.$$

构造李雅普诺夫函数 $V(e) = e^T S(\theta) e$,由 $S(\theta)$ 正定可知 $V(e) > 0$.对 $V(e)$ 求导

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T(A_0^T S(\theta) + S(\theta)A_0 - 2C^T C)e \\ &\quad + 2e^T S(\theta)((f(x) - f(\hat{x}))0\cdots0)^T \\ &\leqslant e^T(-\theta S(\theta))e - e^T C^T C e + \\ &\quad + 2e^T S(\theta)((f(x) - f(\hat{x}))0\cdots0)^T \\ &\leqslant (-\theta e^T S(\theta))e + 2e^T S(\theta)((f(x) \\ &\quad - f(\hat{x}))0\cdots0)^T. \end{aligned}$$

设 $\| x \|_{S(\theta)} = (x^T S(\theta) x)^{1/2}$,其中 $x \in R^n$,$S(\theta) \in R^{n\times n}$ 为正定矩阵.应用 Schwartz 不等式[8]可得 $\dot{V}(e) \leqslant -\theta \| e \|_{S(\theta)}^2 + 2\| e \|_{S(\theta)} \| ((f(x) - f(\hat{x}))0\cdots0)^T \|_{S(\theta)}$.

注意到 $\| f(x) - f(\hat{x}) \| \leqslant k \| x - \hat{x} \|$,则有

$$\| ((f(x) - f(\hat{x}))0\cdots0)^T \|_{S(\theta)}^2 \leqslant k^2 s_{11}(\theta) \| e \|^2.$$

当 $\theta \geqslant 1$ 时,有

$$\begin{aligned} \| e \|_{S(1)}^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} e_i s_{ij}(1) e_j \\ &\leqslant \theta^{2n-1} \sum_{i,j=1}^{n} e_i \frac{s_{ij}(1)}{\theta^{2n-i-j+1}} e_j = \theta^{2n-1} \| e \|_{S(\theta)}^2. \end{aligned}$$

记 $\lambda_{\min}(S(1))$ 为矩阵 $S(1)$ 得最小特征值,则有 $\| e \|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_{\min}(S(1))} \| e \|_{S(1)}^2$,因而 $\| e \|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_{\min}(S(1))} \theta^{2n-1} \| e \|_{S(\theta)}^2$.由于 $s_{11}(\theta) = \frac{s_{11}(1)}{\theta^{2n-1}}$,故有

$$\begin{aligned} &\| ((f(x) - f(\hat{x}))0\cdots0)^T \|_{S(\theta)}^2 \\ &\leqslant k^2 \frac{s_{11}(1)}{\theta^{2n-1}} \frac{1}{\lambda_{\min}(S(1))} \theta^{2n-1} \| e \|_{S(\theta)}^2 \\ &= k^2 \frac{s_{11}(1)}{\lambda_{\min}(S(1))} \| e \|_{S(\theta)}^2. \end{aligned}$$

从而得到

$$\dot{V}(e) \leqslant -\left(\theta - 2k\left(\frac{s_{11}(1)}{\lambda_{\min}(S(1))}\right)^{1/2}\right) \| e \|_{S(\theta)}^2$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\| e \|_{S(\theta)}^2) \leqslant -\left(\theta - 2k\left(\frac{s_{11}(1)}{\lambda_{\min}(S(1))}\right)^{1/2}\right) \| e \|_{S(\theta)}^2.$$

令 $\theta_0 = \max\left\{2k\left(\frac{s_{11}(1)}{\lambda_{\min}(S(1))}\right)^{1/2}, 1\right\}$,则当 $\theta \geqslant \theta_0$ 时,有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\| e \|_{S(\theta)}^2) \leqslant 0$,即 $\lim_{t\to\infty} \| e \| = 0$.故可知误差系统(5)式在原点渐近稳定,原结论成立,命题得证.

定理 1 给出一种特殊情形($A = A_0$)下的同步控制规律.对于更一般的情形(A 由(1)式描述),我们构造如下形式的上三角阵 $T = (t_{ij}) \in R^{n\times n}$：

$$t_{11} = 1, \qquad t_{lm} = \sum_{j=l-1}^{m-1} t_{j,m-1} a_{ij},$$
$$m = 2,3,\cdots,n, \qquad l = 1,2,\cdots,m, \quad (8)$$

其中设 $t_{0i} = a_{i0} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$.

由于 $t_{11} = 1 \neq 0$ 和假设,$t_{mm} = a_{m,m-1} t_{m-1,m-1} \neq 0$,$m = 2,3,\cdots,n$,故 T 非奇异,存在逆矩阵 T^{-1}.显然,T^{-1} 也是上三角阵.

分别对系统(1)和(3)式作坐标变换 $x = Tz$ 和 $\hat{x} = T\hat{z}$,则得到

$$\begin{aligned} \dot{z} &= T^{-1}ATz + T^{-1}(f(Tz)0\cdots0)^T, \\ y &= CTz = t_{nn}Cz, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\dot{\hat{z}} = T^{-1}AT\hat{z} + T^{-1}(f(T\hat{z})0\cdots0)^T + T^{-1}u,$$

$$\hat{y} = CT\hat{z} = t_{nn}C\hat{z}, \tag{10}$$

其中有 $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{bmatrix}$.

令 $L = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in R^n$,则有

$$T^{-1}AT = A_0 + LC. \tag{11}$$

$T^{-1}(f(Tz)0\cdots 0)^T = (f(Tz)/t_{11}\ 0\cdots 0)^T = (f(Tz)0\cdots 0)^T$. 由于 $f(x)$ 满足 Liptchitz 条件,故 $f(Tz)$ 也满足 Liptchitz 条件,且其 Liptchitz 常数 k' 满足不等式 $k' \leqslant k\|T\|$.

令 $e = z - \hat{z} \in R^n$,由(9)和(10)式得到

$$\dot{e} = (A_0 + LC)e + T^{-1}((f(Tz) - f(T\hat{z}))0\cdots 0)^T - T^{-1}u. \tag{12}$$

对(12)式,取 $u = K(y - \hat{y})$,其中

$$K = T(S^{-1}(\theta)C^T + L)/t_{nn}, \tag{13}$$

则由定理 1 可知,误差系统(12)式在原点渐近稳定,从而有下面的定理.

定理 2 对满足假设 A 和 B 的系统(1)和(3)式,如果取控制 $u = T(S^{-1}(\theta)C^T + L)(y - \hat{y})/t_{nn}$,当常数 $\theta \geqslant 0$ 充分大时,对任意的初始 $e(0) \in R^n$,响应系统(3)式渐近稳定的同步于驱动系统(1)式. 其中 T 和 L 分别由(8)和(11)式确定.

本文和文献[5]中系统不同之处主要有两点:本文系统线性部分矩阵 A 在形式上为文献[5]中 A 的转置类型;本文系统非线性部分非零项为第一分量,且为状态变量的函数,而文献[5]非线性部分非零项为最后一分量,且为状态最后一分量的函数.

3 数值仿真

考虑蔡氏振子[10]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_2 - x_1 - f(x_1)), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2 - \gamma x_3, \end{cases} \tag{14}$$

$$y = x_3, \tag{15}$$

其中 $f(x_1) = bx_1 + \frac{1}{2}(a - b)(|x_1 + 1| - |x_1 - 1|)$,系统参数 $\alpha = 10.0$, $\beta = 15.0$, $\gamma = 0.0385$, $a = -1.27$, $b = -0.68$.

控制规律适合任意给定的初值,在仿真中分别取驱动和响应系统的初值为 $x(0) = (1.2, -0.2, -1.3)^T$ 和 $\hat{x}(0) = (-1.3, 0.1, 1.2)^T$. 由(8)式可得到 T,且其中 $t_{33} = -15$. 由(11)式可得到 $L = (-150.0, -15.43, -11.04)^T$. 则系统的反馈增益为 $K = T(S^{-1}(\theta)C^T + L)/t_{33}$.

当取 $\theta = 8.0$ 时,$K = (-1.47, -2.27, 12.96)^T$,其误差曲线如图 1 所示. 由图 1 可见,当 $t > 17$s 时,误差最大为 10^{-3} 数量级. 当取 $\theta = 8.5$ 时,$K = (-2.78, -2.82, 14.62)^T$,其误差曲线如图 2 所示. 由图 2 可见,当 $t > 10$s 时,误差最大为 10^{-4} 数量级.

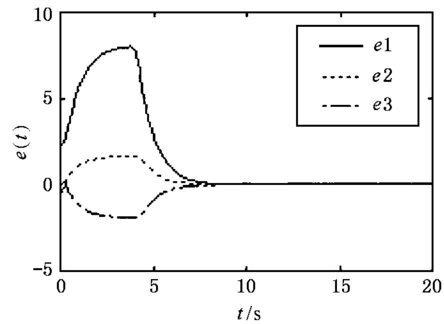

图 1 $\theta = 8.0$ 时蔡氏振子同步误差曲线图

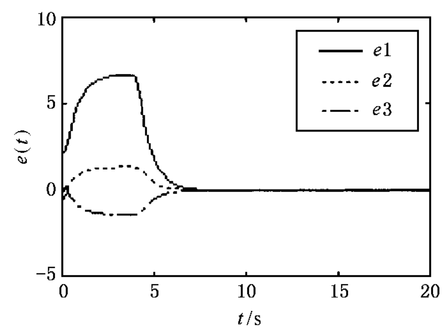

图 2 $\theta = 8.5$ 时蔡氏振子同步误差曲线图

随 θ 的增大,同步速度越来越快,这里不再作出仿真结果曲线. 但反馈增益随 θ 呈幂级数增加,反馈增益随 θ 变化如图 3 所示.

文献[10]对蔡氏振子先进行坐标变换,再应用文献[5]中方法设计同步控制规律,方法较为繁琐,且一般难于发现合适的坐标变换. 本文针对一类与文献[5]不同的混沌 Lur'e 系统设计了同步控制规律,其反馈增益为自由参数 θ 的函数,控制规律相对简单而又易于实现. 控制规律为全局的,对初始条件不敏感.

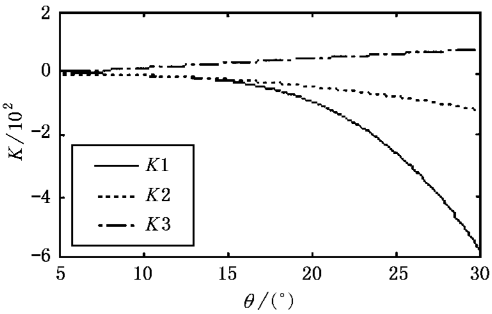

图 3　反馈增益 K 随 θ 变化曲线图

4 结　论

本文对一类特殊的混沌 Lur 'e 系统,以状态最后一分量作为驱动信号,提出了线性输出误差反馈控制规律.其反馈增益为一自由参数的函数,控制规律相对简单,同步的渐近稳定性也得到了证明.最后并用 x_3 对两个蔡氏振子进行同步,仿真结果证明了控制规律的正确性,同步速度快.

[1] L. M. Pecora, T. L. Carroll. *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 821.

[2] H. Nijmeijer, I. M. Y. Mareels, *IEEE trans. Circuits Syst. I*, **44**(1997), 882.

[3] Omer Morgul, Ercan Solak. *Int. J. Bif. Chaos*, **7**(1997), 1307.

[4] P. F. Curran, L. O. Chua. *Int. J. Bif. Chaos*, **7**(1997), 1375.

[5] X. F. Wang, Z. Q. Wang, *Int. J. Bif. Chaos*, **8**(1998), 1363.

[6] J. F. Gao, X. J. Luo, X. K. Ma *et al.*, *Acta Phys. Sin.*, **48**(1999), 1618(in Chinese)[高金峰、罗先觉、马西奎等,物理学报,**48**(1999), 1618].

[7] F. Liu, Z. L. Mu, Z. L. Qiu, *Acta Phys. Sin.*, **48**(1999), 2191(in Chinese)[刘　锋、穆肇骊、邱祖廉,物理学报,**48**(1999), 2191].

[8] J. P. Gauthier, H. Hammouri, S. Othman, *IEEE Trans. Automat. Control*, **37**(1992), 875.

[9] F. Liu, Ph. D. Thesis (Xi 'an Jiaotong University, Xi 'an, 2000)(in Chinese)[刘　锋,博士学位论文(西安交通大学,西安,2000)].

[10] X. F. Wang, Z. Q. Wang. *Int. J. Bif. Chaos*, **8**(1998), 1599.

OUTPUT FEEDBACK SYNCHRONIZATION FOR A CLASS OF CHAOTIC LUR 'E SYSTEMS

LIU FENG[1)]　REN YONG[1)]　SHAN XIU-MING[1)]　QIU ZU-LIAN[2)]

[1)] (*Department of Electronics Engineering, Tsinghua University, Beijing　100084, China*)

[2)] (*Department of Automatic Control, Xi 'an Jiaotong University, Xi 'an　710049, China*)

(Received 22 June 2001; revised manuscript received 9 July 2001)

ABSTRACT

A new synchronization theorem for a class of chaotic Lur 'e systems is proposed. With the last state variable of the drive system as the driving signal, it is proved that the global asymptotic stable synchronization can be attained by a simple linear output error feedback. Taking Chua 's chaotic oscillator as an example, simulation results demonstrated the effectiveness of the present control rule.

Keywords: chaos synchronization, output feedback, Lur 'e system, Chua 's oscillator

PACC: 0545