

用赝角动量方法求解同调谐振子

李文博

(北方交通大学物理系 北京 100044)

(2001 年 2 月 21 日收到 2001 年 6 月 11 日收到修改稿)

采用赝角动量的方法研究了同调谐振子(带有附加有心势垒项的谐振子)的定态薛定谔方程的严格解.详细讨论了有心势垒项的参量对于形成体系束缚定态的有效取值区域,及该参量的不同取值区域对能谱的影响.给出了能谱的确切的全面表述和对应本征态的解析表达式.对于不同文献作者的不同处理予以分析和澄清.

关键词:同调谐振子,类角动量方法,广义湮没算符,广义产生算符,本征值谱,本征态

PACC:4250

1 一类哈密顿算符随时间演化的同调谐振子的分离变量

文献 1 采用因式分解方法由移动算符得到了广义产生算符和广义湮没算符,求得了同调谐振子(具有附加有心势垒 gx^{-2} 项的谐振子)的定态束缚解.文献 2 用正则变换方法求解了质量、频率和有心势都随时间变化的同调谐振子的薛定谔方程,并给出哈密顿算符随时间演化的同调谐振子的严格解.文献 3—7 用来讨论广义相干态、广义压缩态、反聚束效应和有关的量子统计等非经典光场的一些特性.其中的定态部分的结果不尽相同,尤其是对本征值的确切性有不同处理意见.我们给出一种新的解法,并加以讨论.

文献 2 使用的含时间同调谐振子的哈密顿形式为

$$H_1 = \frac{1}{2} \frac{p_1^2}{m(t)} + \frac{1}{2} m(t) \omega^2(t) q_1^2 + \frac{1}{2} \frac{g}{m(t) q_1^2}, \quad (1)$$

式中振子的质量 $m(t)$ 和圆频率 $\omega(t)$ 都是恒大于零的时间实函数, g 为实常数. (1) 式等号右端最后一项为同调谐振子的有效附加有心势垒. q_1 和 p_1 分别为坐标和动量算符, 满足

$$q_1 = q_1^+, \quad p_1 = p_1^+; \quad [q_1, p_1] = i \hbar \quad (\text{取 } \hbar = 1).$$

文献 2 在海森堡图象中利用正则变换,得到与 (1) 式等效的新哈密顿为

$$H_2 = \frac{1}{m(t) B^2(t)} \left[\frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{g}{2x^2} \right], \quad (2)$$

其中 $x = q_1/B(t)$, 而时间实函数 $B(t)$ 是如下二阶微分方程的解:

$$B''(t)m(t) + B'(t)m'(t) + B(t)m(t)\omega^2(t) = \frac{1}{m(t)B^3(t)},$$
$$B(0) = 1, \quad B'(0) = 0.$$

此式后面给出相应的初条件.问题化为求解关于由 (2) 式给出的新哈密顿 H_2 的薛定谔方程

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) = H_2 \Phi(x, t), \quad (3)$$

经分离变量 $\Phi(x, t) = f(t)\psi(x)$ 得到含时间部分

$$f(t) = \exp[-iE_n T(t)], \quad T(t) = \int_0^t \frac{dt'}{m(t')B^2(t')}. \quad (4)$$

方程 (3) 的定态薛定谔方程为

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{g}{x^2} \right) \psi(x) = E\psi(x). \quad (5)$$

所得的定态薛定谔方程 (5) 与文献 1 所提出的同调谐振子的形式相同.延续文献 1 的提法,我们称方程 (5) 所描述的体系为同调谐振子(带有附加有心势垒项的谐振子)的定态薛定谔方程.我们强调指出,对于方程 (5) 中的常实数 g , 文献 1, 6—8 都注意到了, 当 $g \geq -1/4$ 时才能保证体系处于束缚态.然而在实际处理中文献 1—5 都要求 $g \geq 0$, 而对于能级的影响他们的意见不尽相同.注意到, 在 $g = 0$ 的位置, 体系归于一维线性谐振子.本文将详细地讨论关于 g 的合理的有效范围, 研究它在不同范围内对能谱的影响, 并澄清不同文献作者的不同结论.

因为能量是有下限的, 可以人为地规定能量零

点,因此我们特意给出对能量 E 的限制

$$E \geq 0. \quad (6)$$

下面我们对于定态方程(5)给出一种不同于文献[1]的新解法.

2 赝角动量方法

我们采用类似解决角动量问题的方法,称为赝角动量方法.为此我们首先回顾一下通常的角动量问题.设角动量的三个分量为 A_1, A_2 和 A_3 ,它们满足如下对易关系:

$$\begin{aligned} [A_1, A_2] &= iA_3; & [A_2, A_3] &= iA_1; \\ [A_3, A_1] &= iA_2; & [A^2, A_K] &= 0 \\ K &= 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (7)$$

其中我们已经定义了

$$A^2 \equiv A_1^2 + A_2^2 + A_3^2. \quad (8)$$

通常解 A^2 和 A_3 共同表象的本征值方程

$$A^2 \psi = a\psi, A_3 \psi = \lambda\psi, \quad (9)$$

其中 a 和 λ 为相应的本征值, ψ 为已归一化的共同的本征态.构造升降算符

$$A^+ = -iA_1 + A_2, A^- = iA_1 - A_2, \quad (10)$$

利用与方程(5)等价的方程

$$\begin{aligned} A^+ A \psi_\lambda &= [\lambda(\lambda - 1) - a] \psi_\lambda \\ A A^+ \psi_\lambda &= [\lambda(\lambda + 1) - a] \psi_\lambda, \end{aligned} \quad (11)$$

进一步可以求得

$$\begin{aligned} A^+ \psi_\lambda &= \sqrt{\lambda(\lambda + 1) - a} \psi_{\lambda+1}, \\ A \psi_\lambda &= \sqrt{\lambda(\lambda - 1) - a} \psi_{\lambda-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

以下的问题就是:根据具体问题中对本征值的物理限制求出本征值 a 和 λ 的具体值;当给出具体表象后还可以计算出 a 和 λ 所对应的所有本征态.例如 λ 有下降 λ_0 ,则可以求得本征值为 $\lambda = n + \lambda_0$; $n = 0, 1, 2, \dots$; 以及相应的归一化的本征态 ψ_n .显然,这里的本征值 λ 是一个单位一个单位变化的.

下面我们根据这个思路解决方程(5)的本征值问题.

3 利用赝角动量方法求解同调谐振子的定态本征值问题

为了达到我们的目的构造如下算符:

$$A_1 = \frac{i}{4} \left(-\frac{d^2}{dx^2} - x^2 + \frac{g}{x^2} \right),$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} x + x \frac{d}{dx} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} x - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$A_3 = \frac{1}{4} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{g}{x^2} \right).$$

注意 $2A_3 = H$ 就是方程(5)等号左端的哈密顿算符; A_3 的本征值 λ 将对应 H 的本征值 $E = 2\lambda$. 我们给出 A_2 的不同的等价表达式以备后面计算上的方便.

按照(8)式,利用 $A_1 = i(A_3 - \frac{1}{2}x^2)$ 可以得到

$$\begin{aligned} A^2 &= -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}(A_3x^2 + x^2A_3) \\ &\quad + \frac{1}{4}\frac{d}{dx}x^2\frac{d}{dx} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{8} \left\{ \frac{d}{dx} \left[x^2 \frac{d}{dx} \right] + \left[\frac{d}{dx} x^2 \right] \frac{d}{dx} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4}g + \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{4} \left[x \frac{d}{dx} \right] + \frac{1}{4}g + \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{4} \left(g - \frac{3}{4} \right) = a. \end{aligned} \quad (14)$$

很显然, A^2 的本征值 a 就是常数 $(g - 3/4)/4$. 经过仔细地计算(13)式中的算符满足(7)式的对易关系,在证明中要用到以下几个对易式:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dx^2}, A_2 \right] &= \frac{d^2}{dx^2}; & [A_2, x^2] &= x^2; \\ \left[\frac{1}{x^2}, A_2 \right] &= \frac{1}{x^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

这几个对易式在后面第7节中还会用到.把方程(5)写成

$$A_3 \psi_\lambda(x) = \lambda \psi_\lambda(x), \quad 2\lambda = E. \quad (16)$$

这里 E 就是待求的方程(5)的能量本征值.

我们可以按照(10)式构造出广义产生算符和广义湮没算符为

$$\begin{aligned} A^+ &= A_3 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \frac{d}{dx}, \\ A &= A_3 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} x. \end{aligned} \quad (17)$$

这里已经利用了 $A_1 = i(A_3 - \frac{1}{2}x^2)$. 考虑到如果这里的升降算符只作用在本征态 ψ_n 上,则上式可以写成

$$\begin{aligned} A^+(n) &= n + \lambda_0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \frac{d}{dx}, \\ A(\lambda) &= n + \lambda_0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} x. \end{aligned} \quad (18)$$

下面讨论能量本征值谱及其对参量 g 的依赖关系.

4 基态能级和能谱

由(12)式可见,本征值 λ 一个单位一个单位地变动,按照前面(6)式的规定, $E = 2\lambda$ 有极小值;设这个最小值为 $E_0 = 2\lambda_0 \geq 0$;与之对应的本征态记为 $\psi_0(x)$,作为存在的态它不恒为零,立即可以得到体系的能量为

$$\lambda = n + \lambda_0, \quad E_n = 2(n + \lambda_0) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

现在的任务是求出 E_0 (或 λ_0),显然应有

$$A(\lambda_0)\psi_0 = 0. \quad (20)$$

上式等号右端的零表示不存在的状态,而 $\psi_0(x)$ 不恒为零.按照(11)式的第一式有

$$A^+(\lambda_0 - 1)A(\lambda_0)\psi_0(x)$$

$$\lambda_n = \begin{cases} n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{g + \frac{1}{4}}, \\ n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{g + \frac{1}{4}}, \end{cases}$$

相应的能级为

$$E_n = 2\lambda_n = \begin{cases} 2n + 1 - \sqrt{g + \frac{1}{4}}, \\ 2n + 1 + \sqrt{g + \frac{1}{4}}, \end{cases}$$

这里我们把 $g = -1/4$ 和 $g = 3/4$ 简并情况包括在内.

在 $g = 0$ 处,体系将归于一维线性谐振子.把(26)式的两套解表为

$$E_n = \begin{cases} 2n + \frac{3}{2}, & \lambda_{01} = \frac{3}{4}; \\ 2n + \frac{1}{2}, & \lambda_{02} = \frac{1}{4}, \end{cases} \quad g = 0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

把这两套合起来写成

$$E_n = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (28)$$

这正是线性谐振子情况.显然,同调谐振子必须包括线性谐振子.

文献[1]使用的能级实际上是本文中的 λ_{01} 为起点所对应的一套能级

$$3/2, 7/2, 11/2, \dots$$

$$= [\lambda_0(\lambda_0 - 1) - a]\psi_0(x) = 0. \quad (21)$$

此式等号右端的零来自(20)式,由于 $\psi_0(x)$ 不恒为零,则(21)式成立的必要条件为

$$\lambda_0(\lambda_0 - 1) - a = 0, \quad a = \frac{1}{4}\left(g - \frac{3}{4}\right). \quad (22)$$

我们已经把(14)式的结果引入了,由此可以解出

$$\lambda_{01} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{g + \frac{1}{4}}\right), \quad \lambda_{02} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{g + \frac{1}{4}}\right). \quad (23)$$

由于要求本征值为实数,而且要求 $\lambda_0 \geq 0$ 就必须有

$$-1/4 \leq g \leq 3/4. \quad (24)$$

这里实际上只涉及到(24)式所给出的 g 的取值范围.当 $g = -1/4$ 和 $g = 3/4$ 时体系只有一套解,这实际是简并情况.

在 g 处于 $3/4 > g > -1/4$ 区域时体系有两套解

$$-\frac{1}{4} < g < \frac{3}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \leq g \leq \frac{3}{4}, & \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ g \geq -\frac{1}{4}, & \end{aligned} \quad (26)$$

对应了图1的每条曲线的上半支与 $g = 0$ 的交点.文献[2]使用的能级实际上是本文中的 λ_{02} 为起点所对应的另一套能级

$$1/2, 5/2, 9/2, \dots$$

对应了图1的每条曲线的下半支与 $g = 0$ 的交点.两套合起来才是本文(28)式给出的一维线性谐振子的能级.在 $g = 0$ 处,属于 $3/4 \geq g > -1/4$ 范围情况,体系的能级用两套能级公式才能完整表达;一套从 λ_{01} 开始,一套从 λ_{02} 开始;它们的能级间隔都是2.文献[2]对文献[1]的批评是不对的;事实上是他们都丢了一套.文献[1]采用的是 $3/4 \geq g > -1/4$ 区域内始于 λ_{01} 的一套本征值谱,而文献[2]采用的是该区域内始于 λ_{02} 的一套本征值谱.

我们还指出,当 $g = -1/4$ 和 $g = 3/4$ 时都是两套能谱合二为一的结果,这两种情况应该看作是偶然简并.

4.1 基态能级

(26) 式给出的这套能谱很特别,为了看得清楚我们特意给出图 1,上面只讨论了图 1 中所对应的 $3/4 \geq g > -1/4$ 范围情况.在这个范围内基态能级为

$$E_{00} = 1 - \sqrt{g + \frac{1}{4}}, \quad -\frac{1}{4} \leq g \leq \frac{3}{4}. \quad (29)$$

观察图 1,可见无论 g 取何值,体系的基态能总

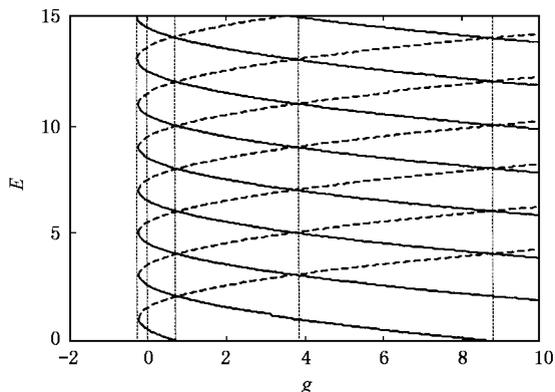


图 1 E 与 g 的关系

是由抛物线的下半支提供.从 $g = 3/4$ 开始到 $g = 8 + 3/4$ 基态能量将由 $n = 1$ 抛物线的下半支提供,在这个区间的基态能为

$$E_{01} = 3 - \sqrt{g + \frac{1}{4}}, \quad \frac{3}{4} < g \leq 8 + \frac{3}{4}. \quad (30)$$

同理,在下一个区间 $8 + 3/4 < g < 24 + 3/4$ 的基态能为

$$E_{02} = 5 - \sqrt{g + \frac{1}{4}}, \quad 8 + \frac{3}{4} < g \leq 24 + \frac{3}{4},$$

与 $m > 0$ 时,一般地有

$$E_{0m} = 2m + 1 - \sqrt{g + \frac{1}{4}},$$

$$4m(m - 1) + \frac{3}{4} < g \leq 4m(m + 1) + \frac{3}{4},$$

$$m = 1, 2, 3, \dots \quad (31)$$

仔细观察图 1 每条抛物线的下半支不难发现,在 g 的不同区域上基态能的表达式是不相同的.

4.2 能谱

从图 1 可以看出:每条抛物线的上半支在整个 $g \geq -1/4$ 区域总是成立的,但是不提供基态能级;而下半支提供的基态能级已由(29)和(31)式给出.因此能谱可以一般地写成

$$E_m(n_+, n_-) = \begin{cases} (2n_+ + 1) + \sqrt{g + 1/4} & n_+ = 0, 1, 2, \dots; \\ [\chi(m + n_-) + 1] - \sqrt{g + 1/4} & n_- = 0, 1, 2, \dots, \\ \begin{cases} 4m(m - 1) + 3/4 < g \leq 4m(m + 1) + 3/4 & m = 1, 2, 3, \dots; \\ -1/4 \leq g \leq 3/4 & m = 0. \end{cases} \end{cases} \quad (32)$$

注意,这里 $m = 0$ 单列出来.这套能谱对 g 的依赖关系如图 1 所示.

4.3 偶然简并

当 $g = -1/4$ 和 $g = 4m(m + 1) + 3/4$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) 时,图 1 中的两套曲线(上半支和下半支)相交,这些交点处是明显的偶然简并情况.这些位置的能为 $E = 2n$;此外,在上述能级之间还有一套偶然简并能级 $E = 2n + 1$.这些相邻能级间距均为 2,开始不简并,后来简并.这样的位置可统一表成

$$g = K^2 - \frac{1}{4}, \quad K = 0, 1, 2, \dots$$

此外,在 $g = 0, 2, 6, 12, \dots, m(m + 1), \dots$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) 的位置存在着相邻间距开始为 2 后来为 1 的能谱.

5 本征态的解析表达式

下面我们计算本征态.首先计算 $\psi_0(x)$.把(18)式的第二式中的 λ 取为 λ_0 代入(20)式得到

$$\left[\lambda_0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} x \right] \psi_0(x) = 0, \quad (33)$$

解得

$$\psi_0(x) = N_0 x^{2\lambda_0 - 1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right), \quad (34)$$

其中 N_0 为归一化常数.考虑到(22)式,把上式写成

$$\psi_0(x) = N_0 x^{\beta + 1/2} e^{-x^2/2} = N_0 x^{2a-1} e^{-x^2/2},$$

$$\beta = \pm \sqrt{g + \frac{1}{4}}, \quad 2a = \frac{3}{2} + \beta, \quad (35)$$

其中 β 的符号按照(26)式的规定选择.这样上述许多式子都可以写得简单一些,例如(19)式

$$E_n = 2n + 1 + \beta \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (36)$$

下面计算本征态 $\psi_n(x)$. 为此我们首先把(18)式写成

$$A^+(n) = n + \alpha - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \frac{d}{dx},$$

$$A(n) = n + \alpha - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \frac{d}{dx}. \quad (37)$$

在形式上可以把本征态直接写成

$$\psi_n(x) = N_n [A^+(n-1) \dots A^+(1)A^+(0)]$$

$$\times x^\beta \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right), \quad (38)$$

其中 N_n 为归一化常数, 不难证明

$$A^+(n) = \frac{1}{2}x^{-\chi_{n+\alpha}} e^{x^2/2} \left(x \frac{d}{dx}\right) e^{-x^2/2} x^{\chi_{n+\alpha}},$$

$$A(n) = -\frac{1}{2}x^{\chi_{n+\alpha}} e^{-x^2/2} \left(\frac{d}{dx}\right) e^{x^2/2} x^{-\chi_{n+\alpha}}. \quad (39)$$

仔细地把(39)式的第一式代入(38)式可得到

$$\psi_n(x) = N_n \frac{1}{2^n x^{-2n}} e^{-x^2/2}$$

$$\times \left[x^{-2\alpha} e^{x^2} \left(x^3 \frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} x^{2\alpha} \right] x^{2\alpha-1}. \quad (40)$$

我们特意把这个式子写得尽量对称一些.

从(39)式不难看出升降算符的一个性质

$$[A^+(n)]^\dagger = A(n+1). \quad (41)$$

利用这个性质和(12)式可以导出归一化常数的递推式

$$N_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n(\lambda_n+1)-\alpha}} N_n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(n+\lambda_0)(n+\lambda_0+1)-\lambda_0(\lambda_0-1)}} N_n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2\lambda_0)}} N_n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1+\beta)}} N_n. \quad (42)$$

这里我们利用了

$$\alpha = \lambda_0(\lambda_0 - 1), \quad 2\lambda_0 = 1 + \beta,$$

$$\beta = \pm \sqrt{g + \frac{1}{4}}, \quad \alpha = \frac{1}{4} \left(g - \frac{3}{4}\right). \quad (43)$$

这里最后一式是(14)式提供的信息.(42)式的几个步骤实际上是给出几种不同的表达, 为的是以后在各种不同的场合使用起来方便.

6 关于本征态集合和叠加态

按照我们的能谱所构造的叠加态应表示为

$$\psi(x) = \psi_+(x) + \psi_-(x),$$

$$\psi_+(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^+ \psi_n^+(x), \quad \psi_-(x) = \sum_{n=m}^{\infty} C_n^- \psi_n^-(x), \quad (44)$$

其中 C_n^+ 和 C_n^- 为两套叠加常数, 它们满足归一化条件

$$\sum_n (C_n^+)^2 + \sum_n (C_n^-)^2 = 1. \quad (45)$$

而 $\psi_n^+(x)$ 和 $\psi_n^-(x)$ 为(40)式分别对应于 $\beta = +\sqrt{g+1/4}$ 和 $\beta = -\sqrt{g+1/4}$ 的本征态; 其中的 m 对应(32)式中标定的 g 的区域. 相应的含时叠加态不难写出.

这就给我们构造广义相干态、广义压缩态、研究反聚束效应和有关的量子统计特性等光场的非经典特性带来了一些麻烦.

相比之下, 文献[1]使用的一套能级因为包含了 $g > 3/4$ 部分, 丢掉的部分要少一些; 而文献[2]使用的一套能级因为不包含 $g > 3/4$ 部分, 丢掉的部分要多一些.

7 关于赝角动量解法

大家知道, 在量子光学中常把二能级原子体系化为一种赝自旋粒子处理, 实际上是一个自旋 1/2 的赝角动量模型. 我们这里也是一种类似的方法, 这种方法与文献[1]的方法是等价的.

现在讨论, 在形如

$$A_3 \psi(x) = \lambda \psi(x), \quad A_3 = \frac{1}{4} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \quad (46)$$

的束缚态本征值问题中, 当势函数 $V(x)$ 是什么样的函数时可以归于赝角动量方法求解呢?

我们首先引入(13)式的第二式给出的 A_2 , 利用关系式 $[A_2, A_3] = iA_1$ 计算得到

$$A_1 = i \frac{1}{4} \left(-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{2}xV' \right). \quad (47)$$

再利用 $[A_1, A_2] = iA_3$, 计算得到

$$A_3 = \frac{1}{4} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4}(x^2 V'' + xV') \right]. \quad (48)$$

计算中将利用(14)式的几个对易关系. 比较(46)式的第二式和(48)式, 可知 $V(x)$ 应满足方程

$$x^2 V'' + xV' = 4V. \quad (49)$$

此方程的通解为

$$V(x) = \frac{g}{x^2} + bx^2, \quad (50)$$

其中 g 和 b 是两个任意常数;把(50)式代入(46)式的第二式和(48)式得到

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{i}{4} \left(-\frac{d^2}{dx^2} - bx^2 + \frac{g}{x^2} \right), \\ A_3 &= \frac{1}{4} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + bx^2 + \frac{g}{x^2} \right). \end{aligned} \quad (51)$$

再利用 $[A_3, A_1] = iA_2$, 计算得到

$$A_2 = \frac{1}{4} b \left(\frac{d}{dx} x + x \frac{d}{dx} \right). \quad (52)$$

显然必须取 $b=1$ 时(51)和(52)式才能满足(7)式的对易关系,从而问题归于(13)式.

是不是可以选择其他形式的 A_2 来构造与方程(5)对应的另一套赝角动量算符呢?似乎值得研究.进一步,是不是还有其他的势 $V(x)$ 使得能谱保持不变呢?也值得研究.事实上,在文献[1]中已经做了一些研究.

8 关于广义产生算符和广义湮没算符的构造

我们前面已经给出广义产生算符和广义湮没算符(17)和(18)式.

我们曾经指出(18)式只能作用在本征态 ψ_n 上,而作用于叠加态时会比较麻烦,需要把叠加态用本征态展开,才能实现;而(17)式没有这个要求,它可以作用在任意叠加态上,也就是说(17)式是通用的,也是方便的.下面我们给出(17)式的另一种等价的表示,为此先把它写成显式

$$\begin{aligned} A^+ &= \frac{1}{4} \left[-\frac{d^2}{dx^2} - x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2} + \left(x \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} x \right) \right], \\ g &= \alpha(\alpha-1), \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{4} \left[-\frac{d^2}{dx^2} - x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2} - \left(x \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} x \right) \right]. \quad (53)$$

然后表示成等价的因式分解形式

$$\begin{aligned} A^+ &= \frac{1}{4} \left[\frac{\alpha-1}{x} + \left(x - \frac{d}{dx} \right) \right] \left[\frac{\alpha-1}{x} - \left(x - \frac{d}{dx} \right) \right], \\ A &= \frac{1}{4} \left[\frac{\alpha}{x} + \left(x + \frac{d}{dx} \right) \right] \left[\frac{\alpha}{x} - \left(x + \frac{d}{dx} \right) \right]. \end{aligned} \quad (54)$$

这正是文献[1]给出的形式,注意,在文献[1]中取 $g = l(l+1)$,而本文取 $g = \alpha(\alpha-1)$.这种形式不仅对于计算基态本征函数带来方便,还可以提供体系的许多信息,正如在文献[1]中所讨论的那样.

9 讨 论

以上我们采用赝角动量的方法研究了同调谐振子的定态薛定谔方程的严格解,这种方法有明显的优越性,与文献[1]的方法是等价的;我们也详细地讨论了附加有心势垒项 gx^{-2} 的参量 g 对于形成定态束缚体系的有效取值区域,及参量 g 的不同取值区域对能谱的影响;给出了能谱的确切的全面表述和对应本征态的解析表达式;对于不同文献中的不同处理予以澄清.一个重要且有说服力的验证是:(28)式给出的 $g=0$ 归于一维线性谐振子情况,这是必不可少的验证.

我们进一步指出:当使用本文中给出的广义升降算符 A^+ 和 A 构造光场相干态以及其他叠加态时,需要小心从事,需要考虑到参量 g 的不同取值区域对能谱的影响.可以肯定参量 g 将对构造的各种光场以及这些光场的非经典统计特性要有一定的影响.关于这个问题我们将另文讨论.

[1] D. P. Zhu, *J. Phys.*, **A20**(1987), 4331.

[2] J. L. Zhang, Q. Z. Guo, *Acta Quant. Opt. Sin.*, **6**(2000), 18 (in Chinese) 章介伦, 郭奇志, *量子光学学报* **6**(2000), 18.

[3] Z. X. Ni, *Acta Phys. Sin.*, **46**(1997), 1687 (in Chinese). [倪致祥, *物理学报* **46**(1997), 1687].

[4] Z. X. Yu, J. S. Wang, Y. H. Liu, *Acta Phys. Sin.*, **46**(1997), 1693 (in Chinese) 于肇贤, 王继锁, 刘业厚, *物理学报*, **46**(1997), 1693.

[5] Y. W. Liu, C. Y. Chen, *Acta Quant. Opt. Sin.*, **5**(1999), 73 (in Chinese) 刘友文, 陈昌远, *量子光学学报* **5**(1999), 73.

[6] C. Y. Chen, Y. W. Liu, *Acta Phys. Sin.*, **47**(1998), 536 (in Chinese) 陈昌远, 刘友文, *物理学报* **47**(1998), 536.

[7] Z. W. Xu, *Acta Phys. Sin.*, **45**(1996), 1807 (in Chinese) 徐子敬, *物理学报* **45**(1996), 1807.

[8] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics* (Pergamon, Oxford, 1958), § 35.

SOLVING THE EIGENVALUE EQUATION OF AN ISOTONIC OSCILLATOR BY PSEUDO-ANGULAR-MOMENTUM METHOD

LI WEN-BO

(*Department of Physics , Northern Jiaotong University , Beijing 100044 , China*)

(Received 21 February 2001 ; revised manuscript received 11 June 2001)

ABSTRACT

A rigorous solution of Schrödinger equation of an isotonic oscillator is studied by pseudo-angular-momentum method. The effect of the parameter g in the centripetal potential barrier on the domain of effective values for formation of stationary bounded states and the effect of domain of the parameter g on the energy spectrum are discussed in detail. An appropriate and comprehensive formulation of the energy spectrum and analytic expressions of the corresponding eigenstates are presented. The different treatments in the literatures are clarified.

Keywords : isotonic oscillator , generalized annihilation operator , generalized creation operator , pseudo-angular-momentum

PACC : 4250