第 50 卷 第 12 期 2001 年 12 月
1000-3290/2001/50(12)/2363-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50,No.12,December,2001

驻波激光场中囚禁离子内外自由度的周期纠缠*

方卯发 刘 翔

(湖南师范大学理学院物理系,长沙 410081)

(2001 年 3 月 28 日收到;2001 年 8 月 9 日收到修改稿)

在 Lamb–Dicke 极限下,利用幺正变换,将处于驻波激光场中任意位置的囚禁离子哈密顿量变换为离子裸态基中的 Jaynes–Commings 模型哈密顿量,研究了其内外自由度的量子熵和纠缠.结果表明,在非共振条件下,囚禁离子系统内外自由度之间存在周期纠缠.

关键词:驻波激光场,囚禁离子,内外自由度,周期纠缠

PACC:4250,3290,0365

1 引 言

纠缠是量子力学的基本特性之一,是 Einstein-Podolsky-Rosen(缩写为 EPR)佯谬[1]、Bell 不等式[2]、量子保密通信、量子隐形传态[3]、量子计算[4]、量子非定域[5]研究中的关键问题.具有相互作用子系统的量子系统呈现的非平庸动力学性质来源于子系统之间纠缠的存在.纠缠可以发生在原子与原子、原子与场(光子)以及场(光子)与场(光子)之间[6].最著名的双粒子纠缠态的例子是总自旋角动量为零,分自旋为 $\frac{1}{2}$ 的双粒子 EPR 态,即 $|\Psi\rangle=(|\uparrow\rangle\otimes|\downarrow\rangle-|\downarrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$,这里态矢 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 分别表示沿着给定方向自旋向上和向下的量子态.这个态不能写成两个态的张量积.目前,人们对各种量子系统的纠缠动力学作了广泛研究.一个基于 N 个双能级原子量子纠缠,用于改进频标的方案已经提出[7].一个双能级原子与单模量子场相互作用的 Jaynes-Cummings 模型(JCM)提供了一个探测原子与场纠缠特性的有效途径。在这个模型中,随着原子与场相互作用的时间演化,原子与场之间建立起强烈的纠缠[8–10].原子-光子对纠缠的实验观察最近已有报道[11].另一方面,Gea-Banacloche[10] 的研究表明:在某些时间,原子与场相互作用可以导致退纠缠,场态成为由两个相干态叠加的 Schrödinger 猫态.而双模压缩真空态是双量子模场之间纠缠的一个典型例子,它能够通过非简并光学参量振荡而产生,它涉及一非线性光学介质从抽运激光吸收一个光子并发两个关联光子:信号模场和 Idler 模场.双模压缩态已经用于探测 EPR 关联和量子隐形传态[3].一般地,一个非线性光学介质能够产生场-场纠缠态。非线性极化率越高,纠缠度越大[12].

另一方面,由于激光冷却及相关实验技术的发展,囚禁离子系统与激光束的相互作用在非经典态制备[13–17],高精密光谱测量[17],量子逻辑门制造[18]和量子态重建[19,20]等方面具有潜在的应用,正引起人们极大的兴趣.许多作者广泛研究了囚禁离子系统的动力学特性.在本文中,我们根据 Phoenix 和 Knight[21] 提出的量子熵理论,用量子熵作为纠缠程度的量度,研究驻波激光场中囚禁离子系统的纠缠特性,证明在非共振条件下囚禁离子系统内外自由度的周期纠缠特性.

2 模型哈密顿量的幺正变换与态矢

考虑一个双能级离子囚禁在一个频率为 ν 的简谐势中,并与一个驻波激光场相互作用,在囚禁频率 ν 远大于离子衰减率的情况下,系统的哈密顿量可以写为[22]

$$H=\nu a^{+}a+\frac{\Delta}{2}\sigma_z+\frac{\Omega_0}{2}\sigma_x\cos[\eta(a+a^{+})+\phi], \quad (1)$$

式中 a,a^{+} 为囚禁离子振动态或声子的湮没与产生算符,$\Delta=\omega_0-\omega_L$ 为离子跃迁频率与激光频率的失谐量,$\sigma_x=\sigma_{21}+\sigma_{12}$ 和 $\sigma_z=\sigma_{22}-\sigma_{11}$ 为双能级离子的偏振和反转算符,Ω_0 为正比于驻波激光振幅的 Rabi 频率,η 为 Lamb–Dicke 参数,ϕ 表示囚禁离子处在

* 国家自然科学基金(批准号:19874020)资助的课题.

驻波激光场中的位置. 特别地当 $\phi=\pi/2$ 时相应于离子处在驻波激光波节处. 我们以 Lamb – Dicke 参数 η 的各次幂展开方程(1),得到

$$H=\nu a^{+}a+\frac{\Delta}{2}\sigma_z+\frac{\Omega_0}{2}\cos(\phi)\sigma_x-\eta\frac{\Omega_0}{2}\sin(\phi)\sigma_x(a+a^{+})+O(\eta^2),\quad(2)$$

式中 η 的高阶项在 Lamb – Dicke 极限下可以忽略. 我们最近证明:通过引进一个幺正变换[23]

$$T=x\sigma_x+y\sigma_z,\quad(3)$$

式中

$$x=\sqrt{\frac{\Delta+\Omega}{2\Omega}},\qquad y=\frac{\Omega_0\cos(\phi)}{\sqrt{2\Omega(\Delta+\Omega)}},$$

$$\Omega=\sqrt{\Delta^2+\Omega_0^2\cos^2(\phi)},\quad(4)$$

哈密顿量(2)式能够变换到标准 JCM 形式

$$\begin{aligned}H'&=THT^{+}\\&=\nu a^{+}a+\frac{\Omega}{2}\sigma_z+g(\sigma_{21}a+\sigma_{21}a^{+})\\&=H_{\rm JCM},\end{aligned}\quad(5)$$

式中 $g=\eta\frac{\Omega_0\Delta}{2\Omega}\sin(\phi)$. 因此,在研究囚禁离子动力学时,可以直接利用标准 JCM 的结果. 例如:囚禁离子系统的时间演化算符可以用幺正变换 T 作用到 JCM 的时间演化算符 $U_{\rm JCM}$ 得到

$$U_{\rm i}=T^{+}U_{\rm JCM}(t)T,\quad(6)$$

$$U_{\rm JCM}=\begin{bmatrix}{\rm e}^{-{\rm i}\nu(aa^{+}+1/2)t}\left[\cos(At)-{\rm i}\frac{\delta}{2}\frac{\sin(At)}{2A}\right] & -{\rm i}g{\rm e}^{-{\rm i}\nu(aa^{+}+1/2)t}a\frac{\sin(Bt)}{B}\\ -{\rm i}g{\rm e}^{-{\rm i}\nu(a^{+}a-1/2)t}a^{+}\frac{\sin(At)}{A} & {\rm e}^{-{\rm i}\nu(a^{+}a-1/2)t}\left[\cos(Bt)+{\rm i}\frac{\delta}{2}\frac{\sin(Bt)}{B}\right]\end{bmatrix},\quad(7)$$

式中 $A=\sqrt{\delta^2/4+g^2aa^{+}}$, $B=\sqrt{\delta^2/4+g^2a^{+}a}$, $\delta=\Omega-\nu$. 相应地,总密度算符可以给定

$$\rho(t)=U_{\rm i}(t)\rho(0)U_{\rm i}(t).\quad(8)$$

设初始时刻离子处于基态,振动声子处于相干态,则初始时刻系统的约化密度矩阵 $\rho(0)$ 可以写为

$$\rho(0)=\begin{bmatrix}0&0\\0&\rho_{\rm p}(0)\end{bmatrix},\quad(9)$$

式中

$$\rho_{\rm p}(0)=\sum_{n,m=0}^{\infty}P_nP_m^{*}|n\rangle\langle m|,\quad(10)$$

$$P_n=\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\frac{\alpha^n}{\sqrt{n}},\quad(11)$$

式中 $\alpha=\sqrt{\bar n}\exp({\rm i}\beta)$, $\bar n$ 为初始声子数, β 为声子相干态的位相角. 通过直接的计算后,总密度算符可以表示为

$$\rho(t)=\begin{bmatrix}|D\rangle\langle D| & |D\rangle\langle E|\\ |E\rangle\langle D| & |E\rangle\langle E|\end{bmatrix},\quad(12)$$

式中

$$\begin{aligned}|D(t)\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}P_n\exp(-{\rm i}n\nu t)\Big\{&\exp\left(-{\rm i}\frac{\nu t}{2}\right)\\&\times\left[xy\zeta_n|n\rangle-{\rm i}y^2\eta_n|n+1\rangle\right]\\&-\exp\left({\rm i}\frac{\nu t}{2}\right)\left[xy\zeta_{n-1}|n\rangle\right.\\&\left.-{\rm i}x^2\eta_{n-1}|n-1\rangle\right]\Big\},\end{aligned}\quad(13)$$

$$\begin{aligned}|E(t)\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}P_n\exp(-{\rm i}n\nu t)\Big\{&\exp\left(-{\rm i}\frac{\nu t}{2}\right)\\&\times\left[y^2\zeta_n|n\rangle+{\rm i}xy\eta_n|n+1\rangle\right]\\&+\exp\left({\rm i}\frac{\nu t}{2}\right)\left[x^2\zeta_{n-1}|n\rangle\right.\\&\left.+{\rm i}xy\eta_{n-1}|n-1\rangle\right]\Big\},\end{aligned}\quad(14)$$

式中

$$\begin{aligned}\zeta_n&=\cos A_nt-{\rm i}\frac{\delta}{2}\frac{\sin A_nt}{A_n},\\ \eta_n&=\frac{g\sqrt{n+1}\sin A_nt}{A_n},\\ A_n&=\sqrt{\frac{\delta^2}{4}+g^2(n+1)}.\end{aligned}\quad(15)$$

将 $\rho(t)$ 对声子变量作求迹运算可得囚禁离子的约化密度矩阵

$$\rho_{\rm i}(t)=\begin{bmatrix}\langle D(t)|D(t)\rangle & \langle E(t)|D(t)\rangle\\ \langle D(t)|E(t)\rangle & \langle E(t)|E(t)\rangle\end{bmatrix}.\quad(16)$$

不难求得囚禁离子约化密度矩阵的本征值与本征函数分别为

$$\begin{aligned}\Pi^{\pm}(t)=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\big[(&\langle D(t)|D(t)\rangle\\&-\langle E(t)|E(t)\rangle)^2\\&+4|\langle D(t)|E(t)\rangle|^2\big]^{1/2},\end{aligned}\quad(17)$$

$$|\Psi^{\pm}(t)\rangle=\frac{1}{\sqrt{\Pi^{\pm}(t)+\Pi^{\mp}(t)\exp(\mp 2\theta)}}\times[|2\rangle\pm\exp(-\mathrm{i}\varphi\mp\theta)|1\rangle].\quad(18)$$

3　囚禁离子内外自由度的周期纠缠

我们将根据离子(或振动声子)的量子熵探讨囚禁离子内外自由度的纠缠规律. 在囚禁离子系统中,离子(或声子)的量子约化熵的时间演化反映了其内(离子)外(声子)自由度之间纠缠的时间行为. 熵越大,纠缠度越大.离子和声子的量子约化熵可由它们各自的约化密度算符定义

$$S_k(t)=-\mathrm{Tr}_k(\rho_\kappa\ln\rho_\kappa),\quad(19)$$

式中下标 k 表示离子、声子或离子-声子全系统.一般双分量量子系统的熵满足著名的熵三角不等式[24]

$$|S_{\mathrm{i}}(t)-S_{\mathrm{p}}(t)|\leqslant S\leqslant S_{\mathrm{i}}(t)+S_{\mathrm{p}}(t),\quad(20)$$

式中 S 表示离子-声子全系统的总熵.对于上面涉及的离子和声子所处的初始纯态,离子-声子全系统的总熵 S 为零.从不等式(20)可得到一个直接的结果:$S_{\mathrm{i}}(t)=S_{\mathrm{p}}(t)$,即离子和声子的熵相等,因此,仅仅只需要计算离子(声子)的熵. 离子的量子约化熵可以通过离子约化密度矩阵的本征值 $\Pi^{\pm}(t)$ 给定

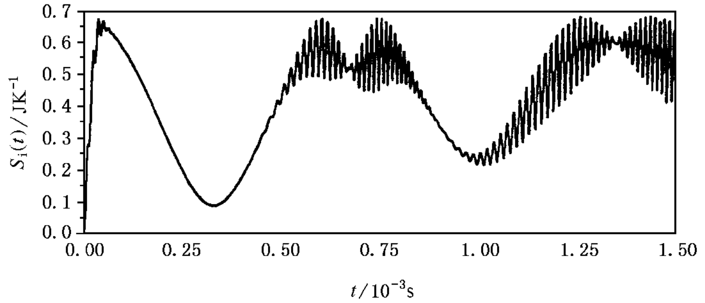
$$S_{\mathrm{i}}(t)=-\Pi^{+}(t)\ln\Pi^{+}(t)-\Pi^{-}(t)\ln\Pi^{-}(t).\quad(21)$$

选择参数 $\Omega_0=6\pi\times10^5\,\mathrm{s}^{-1}$[25],$\Delta=\Omega_0/20$,$\eta=0.05$,$\bar{n}=25$ 和 $\delta=-\Omega$,图 1 给出了离子熵时间演化的数值结果.图 1(a)相应于囚禁离子处于驻波激光波节($\phi=\pi/2$)的情况. 很明显,离子熵的演化是非周期的,这类似于 JCM 中的场熵演化.在时间演化的初始阶段,离子熵演化到它的最大值,内(离子)外(声子)自由度强烈地纠缠,而在离子反转回复时间的二分之一时($t_0=T_r/2=5\pi/g$),离子熵演化到局域最小值,内外自由度退纠缠. 依据 JCM 的性质[10],在这个时刻,离子几乎处于纯态 $|\Psi(T_r/2)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle+\mathrm{i}|-\rangle)$.如果囚禁离子偏离波节,比如 $\phi=\pi/4$(图 1(b)),$\phi=\pi/10$(图 1(c)),离子熵的演化呈现严格的周期性,周期约为 $T_{\mathrm{r}}=\pi\Omega/g^2$(下面将于证明).对于 $\phi=\pi/4$ 的情况,$T_{\mathrm{r}}\approx0.76\mathrm{s}$;对于 $\phi=\pi/10$ 的情况,$T_{\mathrm{r}}=9.66\mathrm{s}$.当时间 $t=kT_{\mathrm{r}}(k=0,1,2,\ldots)$,离子熵取得它的最小值,离子内外自由度退纠缠,而在其余时间,离子熵取得它的最大值,离子内外自由度强烈地纠缠.这意味着囚禁离子内外自由度之间存在着周期纠缠.以上结果也说明,囚禁离子内外自由度的纠缠特性高度依赖于囚禁离子在驻波激光场中的位置.这里应该指出,囚禁离子内外自由度的周期纠缠特性仅在 $\delta=\Omega-\nu\neq0$ 的非共振条件下才发生.而在共振条件 $\delta=\Omega-\nu=0$ 下,离子熵的时间演化是非周期的,如文献[23]所示,除初始时刻外,其熵值均取极大值,离子内外自由度之间强烈地纠缠,但不具有周期性.

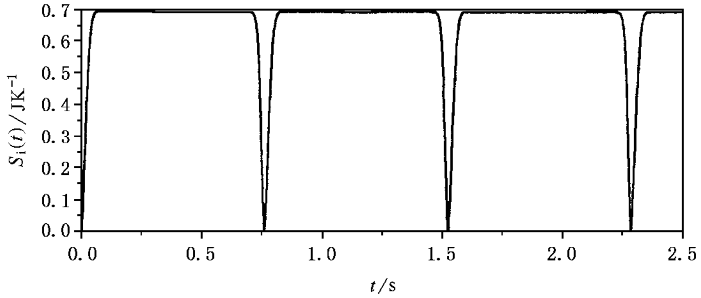
根据(17)式给定的囚禁离子约化密度算符本征值的时间演化,可以解释囚禁离子内外自由度的周期纠缠行为.图 2 给出了当 $\phi=\pi/4$ 时,本征值 $\Pi^{-}(t)$ 的数值结果(注意 $\Pi^{+}(t)=1-\Pi^{-}(t)$). 在图 2(a),考虑 $\delta=\Omega-\nu=-\Omega$ 的情况,很明显,本征值 $\Pi^{-}(t)$ 呈现严格的周期演化,演化周期与图 1(b)的离子熵演化周期相同.当时间 $t=kT_{\mathrm{r}}$,$k=0,1,2,\ldots$ 时,本征值 $\Pi^{-}(t)$ 演化到它的零值,而 $\Pi^{+}(t)$ 演化到它的最大值 1.从(21)式可以看到,在这些时间点,离子的熵为零. 然而在其余时间,$\Pi^{-}(t)=\Pi^{+}(t)\approx0.5$,几乎具有相同的值.从(21)式可知,离子熵取得它的最大值.因此,在 $\delta=\Omega-\nu=-\Omega$ 的非共振条件下囚禁离子内外自由度之间存在周期纠缠.图 2(b)显示了共振条件 $\delta=\Omega-\nu=0$ 下本征值 $\Pi^{-}(t)$ 的时间演化.可以看出,在时间演化的初始阶段,$\Pi^{-}(t)$ 趋向于零,$\Pi^{+}(t)$ 趋向于 1,所以离子熵演化到它的最小值. 随着时间的发展,$\Pi^{-}(t)$ 和 $\Pi^{+}(t)$ 几乎有相等的值,离子熵保持极大值.很明显,在共振条件下,囚禁离子内外自由度之间的纠缠是非周期的.

进一步,通过对方程(17)进行解析近似研究,可以求出内外自由度周期纠缠的周期.这里对于图 1 给定的参数,我们考虑 $\phi=\pi/4$,$\Delta\ll\Omega$,则 $x\approx y$,$\Pi^{\pm}(t)$ 具有近似形式

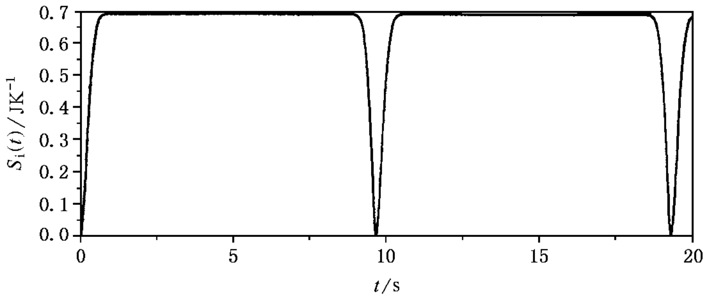
$$\Pi^{\pm}(t)\approx\begin{cases}\dfrac{1}{2}\pm x^2y^2\Big\{4+\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty}|P_n|^2\cos[3\Omega+2g^2\times(2n+1)/\Omega]t\Big)^2+4\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty}|P_n|^2\sin[3\Omega+2g^2(2n+1)/\Omega]t\Big\}^{1/2} & \text{当 }\delta=-\Omega;\\ \dfrac{1}{2}\pm x^2y^2\Big\{4+\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty}|P_n|^2\cos\big(\Omega-\dfrac{1}{2}g/\sqrt{n}\big)t\Big)^2+\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty}|P_n|^2\Big[\sin\big(\Omega+\dfrac{1}{2}g/\sqrt{n}\big)t+\sin\big(\Omega-\dfrac{1}{2}g/\sqrt{n}\big)t\Big]^2\Big\}^{1/2} & \text{当 }\delta=0.\end{cases}\quad(22)$$



(a)为囚禁离子处于驻波激光场波节处，$\phi=\pi/2$；$\beta=0$

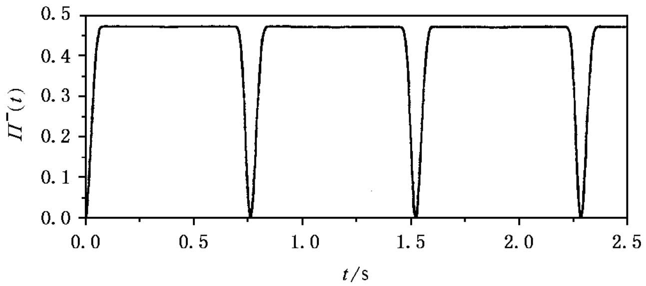


(b)为囚禁离子偏离驻波激光场波节，$\phi=\pi/4$，$\beta=0$

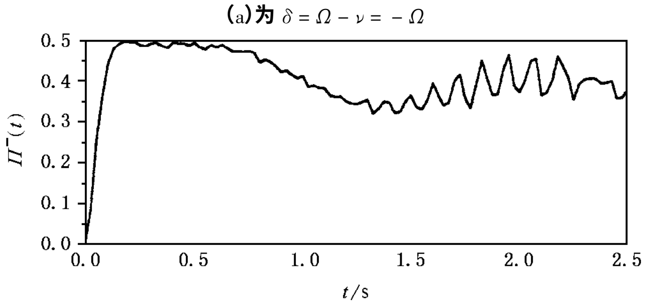


(c)为囚禁离子偏离驻波激光场波节，$\phi=\pi/10$，$\beta=0$

图 1　驻波激光场中囚禁离子熵 $S_i(t)$ 的时间演化　离子初始处于基态 $|-\rangle$，声子初始处于具有平均声子数 $\bar{n}=25$ 的相干态，$\Omega_0=6\pi\times10^5\,s^{-1}$，$\Delta=\Omega_0/20$，$\eta=0.05$，$\delta=-\Omega$



(a)为 $\delta=\Omega-\nu=-\Omega$



(b)为 $\delta=\Omega-\nu=0$

图 2　驻波激光场中囚禁离子约化密度矩阵本征值 $\Pi^-(t)$ 的时间演化　$\phi=\pi/4$，其他参量选择同图 1

这里已经假定 $n \approx \bar{n} \gg 1$. 从上式可求得 $\Pi^{\pm}(t)$ 的演化周期(回复时间)为

$$T_{\mathrm{r}} \approx \begin{cases} \pi \Omega g^{-2} & \text{当 } \delta = -\Omega, \\ 8\pi \bar{n}^{3/2} g^{-1} & \text{当 } \delta = 0. \end{cases} \tag{23}$$

从方程(22)可以看到,在非共振条件 $\delta = -\Omega$ 下,本征值 $\Pi^{\pm}(t)$ 经历振动频率正比于声子数 n 的 Rabi 振荡. 这类似于双光子 JCM 的周期动力学演化情况. 在 $\phi = \pi/4$ 情况下,这种 Rabi 振荡导致离子熵以周期 $T_{\mathrm{r}} \approx 0.76\mathrm{s}$ 作时间演化(如图 2(a)和图 1(b)所示),囚禁离子系统内外自由度展示严格的周期纠缠. 然而,在共振条件 $\delta = \Omega - \nu = 0$ 下,本征值 $\Pi^{\pm}(t)$ 的 Rabi 振荡频率正比于 $1/\sqrt{n}$,这类似于单光子 JCM 的非周期动力学演化情况. 因此在共振条件下,离子熵演化是非周期的,囚禁离子内外自由度之间不存在周期纠缠.

作为结论,我们在 Lamb-Dicke 极限下,利用幺正变换,将处于驻波激光场中任意位置的哈密顿量变换为离子裸态基中的 JCM 哈密顿量,研究了其内外自由度的量子熵和纠缠特性. 结果表明,在非共振条件下,囚禁离子系统内外自由度之间存在周期纠缠. 值得指出,囚禁离子系统的纠缠规律对于囚禁离子的信息测量十分重要. 当离子内外自由度处于最大纠缠态时,我们可以通过离子内部自由度的测量获得外部自由度的充分信息. 例如,囚禁离子质心运动的振动态的充分信息可以由长寿命电子跃迁的离子基态动力学测量得到. 因此本文的结果既有学术意义,也有应用价值.

[1] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Phys. Rev.*, **A47** (1935), 777.

[2] J.S. Bell, *Physics*, **1** (1964), 195.

[3] A.K. Ekert, *Phys. Rev. Lett.*, **67** (1991), 661; C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.*, **70** (1993), 1895; C. H. Bennett, D. P. Divincenzo, *Nature*, **377** (1995), 389; D. Bouwmeester, J. W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger, *Nature*, **390** (1997), 575.

[4] M. O. Scully, M. S. Zubairy, Quantum Optics (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).

[5] D. Bohm, Quantum Theory (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1951).

[6] S. Liu, G. C. Guo, *Chin. Phys.*, **9** (2000), 171.

[7] S. F. Huelga, C. Macchiavello, T. Pellizzari, A. K. Ekert, M. B. Plenio, J. I. Cirac, *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997), 3865.

[8] S. J. D. Phoenix, P. L. Knight, *Ann. Phys.* (NY), **186** (1988), 381; *Phys. Rev.*, **A44** (1991), 6023; *J. Opt. Soc. Am.*, **B7** (1990), 116; V. Buzek, H. Moya - Cessa, P. L. Knight, *Phys. Rev.*, **A45** (1992), 8190; P. L. Knight, B. W. Shore, *Phys. Rev.*, **A48** (1993), 642; V. Buzek, B. Hladky, *J. Mod. Opt.*, **40** (1993), 1309.

[9] W. Wei, *Acta Phys. Sin.* (*Overseas Edition*), **7** (1998), 737.

[10] J. Gea-Banacloche, *Phys. Rev. Lett.*, **65** (1990), 3385; *Phys. Rev.*, **A44** (1991), 5913.

[11] C. Kurtsiefer, O. Dross, D. Voigt, C. R. Ekstrom, T. Pfau, J. Mlynek, *Phys. Rev.* **A55** (1997), R2539.

[12] G. Drobny, I. Jex, V. Buzek, *Phys. Rev.*, **A48** (1993), 569; V. Buzek, G. Drobny. *Phys. Rev.*, **A47** (1993), 1237.

[13] D. J. Heinzen, D. J. Wineland, *Phys. Rev.*, **A42** (1990), 2977; J. I. Cirac, R. Blatt, A. S. Parins, P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.*, **70** (1993), 762.

[14] R. L. de Matos Fiho, W. Vogel, *Phys. Rev. Lett.*, **76** (1996), 608.

[15] C. C. Gerry, S. - C. Gou, J. Steinbach, *Phys. Rev.*, **A55** (1997), 63; **55** (1997), 2478.

[16] X.L. Luo, Z.F. Fang, M. Feng, X.M. Fang, K.L. Gao and X.W. Zhu, *Acta Phys. Sin.*, **48** (1999), 218 (in Chinese) [罗学立、张志飞、冯 芒、方细明、高克林、朱熙文,物理学报,**48** (1999), 218].

[17] D. J. Wineland, J. J. Bollinger, W. M. Itano, F. L. Moore, D. J. Heinzen, *Phys. Rev.*, **A46** (1992), R6797.

[18] J. I. Cirac, P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.*, **74** (1995), 4091.

[19] S. Wallentowitz, W. Vogel, *Phys. Rev. Lett.*, **75** (1995), 2932; J. F. Poyatos, R. Walser, J. I. Cirac, P. Zoller, *Phys. Rev.*, **A53** (1996), R1966; C. D. Helon, G. J. Miburn, *Phys. Rev.*, **A54** (1996), R25.

[20] D. Leibfried, D. M. Meekhof, B. E. King, C. Monroe, W. M. Itano, D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996), 4281.

[21] S. J. D. Phoenix, P. L. Knight, *Ann. Phys.* (N. Y.), **186** (1988), 381; *Phys. Rev. Lett.*, **66** (1991), 2833; *Phys. Rev.*, **A44** (1991), 6023.

[22] D. J. Wineland, C. Monroe, W. M. Itano, D. Leibfried, B. E. King, D. M. Meekhof, *J. Res. Nat. Inst. Stan.*, **103** (1998), 259.

[23] M. F. Fang, S. Swain, P. Zhou, *Phys. Rev.*, **A63** (2001), 013812.

[24] H. Araki, E. Lieb, *Commum. Math. Phys.*, **18** (1970), 160.

[25] J. I. Cirac, R. Blatt, A. S. Parkins, P. Zoller, *Phys. Rev.*, **A49** (1994), 1202.

PERIODIC ENTANGLEMENT BETWEEN THE INTERNAL AND EXTERANL DEGREE OF FREEDOM OF A TRAPPED ION IN A STANDING WAVE LASER*

FANG MAO-FA LIU XIANG
(*Department of Physics*, *Hunan Normal University*, *Changsha* 410081, *China*)

(Received 28 March 2001; revised manuscript received 9 August 2001)

ABSTRACT

We have investigated the quantum entropy and entanglement of the internal and external degrees of freedom of a trapped ion in a standing wave laser by transforming the Hamiltonian to that in the Jaynes-Cummings system for the bare basis of the trapped ion under the Lamb-Dicke limit. Under the off-resonant condition, we have found the periodic entanglement between the internal and external degrees of freedom of a trapped ion.

Keywords: standing wave laser, trapped ion, internal and external degree of freedom, periodic entanglement
PACC: 4250, 3290, 0365

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19874020).