

# 用勒让德级数处理 Abel 变换

阮怀林 万宝年 张先梅 刘建坤

(中国科学院等离子体物理研究所, 合肥 230031)

(2000 年 12 月 9 日收到 2001 年 6 月 20 日收到修改稿)

提出了一种处理弱非中心对称 Abel 变换的新方法. 把测量的积分值用 Yasutomo 的方法分成奇、偶两部分. 非对称的原函数被表达为一个权函数和一个中心对称函数之积. 对称函数用勒让德级数展开. 级数的系数通过用最小二乘法来决定.

关键词: Abel 变换, 勒让德级数, 测试函数, 对称, 非对称

PACC: 5265, 5270

## 1 引 言

托卡马克等离子体诊断中, 测量到的许多重要的物理参量(如: 电子密度、杂质的辐射等)都是它们截面的弦积分值, 必须通过逆变换(即解积分方程)来获得它们的截面空间分布. 在中心对称分布情况下, 采用经典的 Abel 变换方法<sup>[1-5]</sup>; 在非中心对称但接近中心对称的情况下, 可以采用所谓的非对称的 Abel 变换方法<sup>[6]</sup>(其思想没有通过数学证明, 数学方法仍主要是经典 Abel 变换问题); 在一般情况下, 要采用层析分析<sup>[7]</sup>.

用 Barr 方法变换的结果在边界处的值有普遍升高的现象, 在某些点处变换后的值与实际值有较大的偏离, 而且对某些类型的分布曲线(如双峰型)的变换误差较大<sup>[8]</sup>. 此外, 这种方法也是很复杂的.

本文提出了一种变换方法, 即对称部分用勒让德级数展开, 从而简化了 Abel 变换. 只要勒让德级数项数取得合适, 就可以处理非对称性不是很大的参量分布. 我们用了两次最小二乘曲线拟合, 使得有较大随机噪声的实验数据的处理也能保证有足够高的精度.

## 2 数学方法

变量和实验获得的积分值  $K(x)$  的几何关系如图 1 所示. 测量的弦一般是平行于  $Y$  轴的. 在逆变换计算中, 通常假定托卡马克等离子体的实际分布是上下对称的. 如果  $K(x)$  相对于  $x=0$  点是非对称

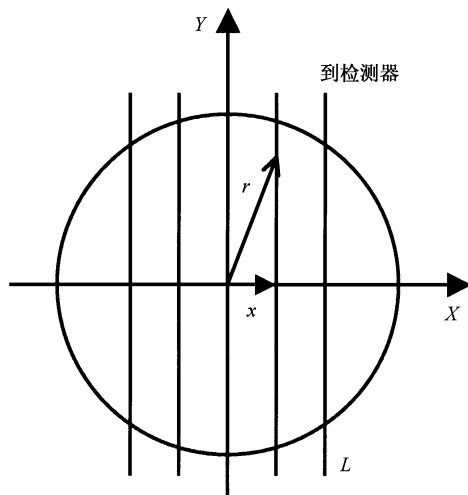


图 1 坐标系和弦参量定义的几何关系

的, 则按 Yasutomo 的方法<sup>[6]</sup>将  $K(x)$  写成偶函数部分和奇函数部分之和(假设  $K(x)$  的定义域相对于  $x=0$  点是对称的),

$$K(x) = I_0(x) + I_1(x), \quad (1)$$

式中

$$I_0(x) = \frac{K(x) + K(-x)}{2}, \quad (2a)$$

$$I_1(x) = \frac{K(x) - K(-x)}{2}. \quad (2b)$$

中心对称分布的弦积分是偶函数. 虽然弦积分是偶函数的分布不一定是中心对称的, 但考虑到圆截面托卡马克等离子体参量分布的一般特点, 作为一种可能的近似, 假设积分的偶函数部分  $I_0(x)$  对应中心对称分布  $n_0(r)$ . 若设弦积分  $K(x)$  对应的分

布具有如下形式：

$$n(r) = g(x)n_0(r), \quad (3)$$

$g(x)$  为描述不对称程度的权函数, 如果  $g(x)$  和  $n_0(r)$  能求得 就可得到  $n(r)$ . 式中  $r$  是由  $r$  和  $\theta$  的值来决定的,  $r = r\cos\theta e_x + r\sin\theta e_y, x = r\cos\theta, \theta$  为  $r$  与  $X$  轴正方向的夹角.

测量的非对称数据  $K(x)$  为  $n(r)$  沿着弦  $L$  的积分, 可以写为

$$K(x) = \int_L n(r) dy = \int_L g(x)n_0(r) dy.$$

因为沿  $L$  上对  $y$  积分时,  $x$  的值保持不变, 从而有

$$K(x) = g(x) \cdot 2 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} n_0(r) dy = g(x)I_0(x), \quad (4)$$

其中  $I_0(x)$  为  $n_0(r)$  的线积分. 利用(1)式可得到

$$g(x) = 1 + I_1(x)/I_0(x) = 1 + u(x), \quad (5)$$

$u(x)$  为直接由测量的数据决定的奇函数, 可以用奇幂级数拟合：

$$u(x) = \sum_{i=1}^N a_i x^{2i-1} \quad (-1 \leq x \leq 1), \quad (6)$$

$N$  为  $u(x)$  的拟合项数, 用最小二乘法平滑技术来得到系数  $a_i$ .  $I_1(x)$  的数据点的数目必须大于  $N$  的值. 在我们的实验数据分析中,  $N$  取为 6—8, 精度就能满足要求了.

中心对称部分  $n_0(r)$  可以根据  $I_0(x)$  的值来计算. 它们的关系为

$$I_0(x) = \int_L n_0(r) dy, \quad (7)$$

只要  $n_0(r)$  满足狄利克雷条件, 根据数学原理我们能把  $n_0(r)$  展开成傅里叶-勒让德级数,

$$n_0(r) = \sum_{l=0}^{\infty} [a_l P_l(r)] \quad (0 \leq r \leq 1). \quad (8)$$

勒让德级数有一些特点: 1) 它们是完备的正交系 2) 每一个勒让德函数都是幂级数.

由(7)和(8)式可得到

$$I_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} [a_j f_j(x)], \quad (9)$$

$$f_j(x) = 2 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} P_j(r) dy \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}). \quad (10)$$

这就是说, 测得弦积分值的偶函数部分可以用一系列函数  $f_j(x)$  来表示. 系数  $a_j$  可以通过对(9)式作最小二乘法拟合得到. 因为要得到  $f_j(x)$  的解析表达式是很困难的, 我们可以利用勒让德级数的表示式进行编程计算, 从而得到  $f_j(x)$ . 在我们的实验数据分析中,  $j$  取 8—12 即可满足要求.

当我们求得  $g(x)$  和  $n_0(r)$ , 它们的乘积即为分布  $n(r)$ .

### 3 测试和误差分析

此计算方法通过用一些测试函数来进行检验. 为了估计数值计算的误差, 我们采用了标准误差

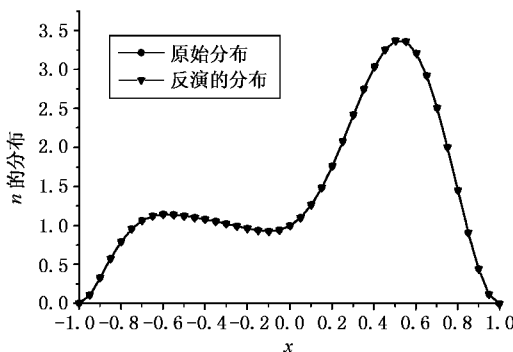
$$\sigma = \left( \frac{\sum_{i=1}^k (\Delta n_i)^2}{k} \right)^{1/2}, \quad (11)$$

式中  $\Delta n_i = n - n_i, n$  为精确的函数值,  $n_i$  为变换后的值,  $k$  为选取的点数. 这里我们选了 41 个点.

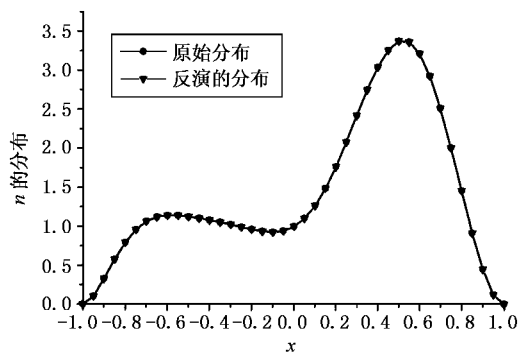
我们首先选了下面的一个测试函数来检验这种方法的有效性. 此函数为

$$n(r) = (1 + 0.5\sin\pi x) (1 + 10r^2 - 23r^4 + 12r^6). \quad (12)$$

图 2(a) 显示利用新方法所得的结果. 这个结果



(a) 为输入无噪声



(b) 为输入有 10% 的正态噪声

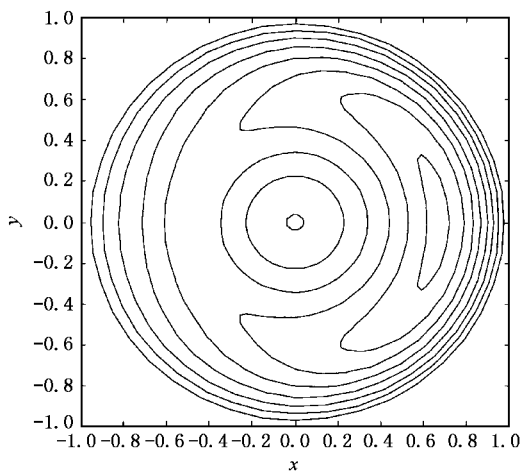
图 2 (12) 式反演的结果

与实际的值符合得很好. 它的偏差为  $\sigma = 9.73 \times 10^{-5}$ . 这个方法优于同心圆的方法 ( $\sigma = 1.13 \times 10^{-3}$ )<sup>[9]</sup>, 也优于 Yasutomo 的方法 ( $\sigma = 4.13 \times 10^{-2}$ )<sup>[9]</sup>. 同样也优于用幂级数的方法 ( $\sigma = 4.7 \times 10^{-4}$ )<sup>[9]</sup>. 当原积分的值有 10% 的正态随机噪声时, 变换的结果显示在图 2(b) 中, 此时的偏差为  $\sigma = 9.4 \times 10^{-3}$ . 表明本文提出的方法在测量值中存在一定的随机噪声时, 仍能很好地给出反演的计算结果.

对于这样的测试函数:

$$n(r) = 3200\pi^{-1}(1 - r^2)^2 \quad (13)$$

变换的结果, 包括曲线的形状和数值几乎与实际的值是一致的. 它的偏差  $\sigma = 12.8577$ , 接近用同心圆的方法 ( $\sigma = 8.3612$ )<sup>[9]</sup>, 优于 Yasutomo 的方法 ( $\sigma = 33.2592$ ). 与用傅里叶-贝塞尔级数<sup>[10]</sup>相比, 这种方法对于平行弦的测量反演的结果更精确. 对于  $n(r) = 1 - r$  的分布, 变换的结果与实际的值也是一致的.

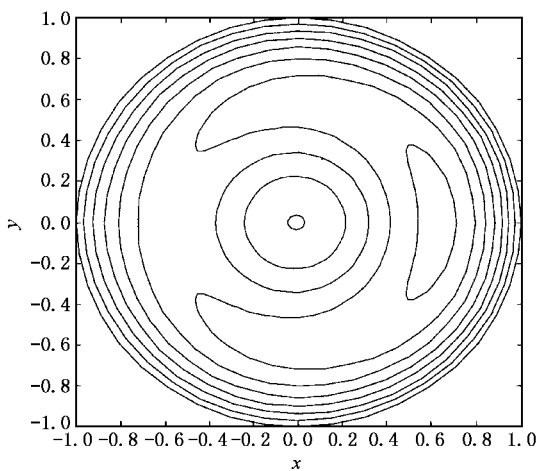


(a) 为实际分布

为了更好地检验我们的方法, 我们又选取了另外一个测试函数<sup>[11]</sup>:

$$\begin{aligned} \varphi(r) = & \frac{r_0^2 + r_s^2}{2} \ln\left(\frac{r_0^2 + 1}{r_0^2 + r^2}\right) - \frac{1 - r^2}{2} \\ & - \left\{ \frac{W^2}{2} \times \frac{n}{m} \times \frac{r_s^{2-m}}{r_0^2 + r_s^2} \times \frac{r^m(1 - r)}{1 - r_s} \right. \\ & \left. \times \frac{2}{1 + \exp[10(1 - r/r_s)]} \cos m\theta \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

此函数是不可分离变量的, 式中  $r_0$  为反转面半径,  $r_s$  为有效的电流通道半径,  $W$  为磁岛宽度. 我们选取  $m = 1, n = 1, r_0 = 0.9, r_s = 0.6, W = 0.3$ . 原函数和变换的结果分别如图 3(a) 和图 3(b) 所示, 两者相符得较好. 从这也可以看出, 对于弱非对称的分布函数, 我们可以用分离变量的方法来近似计算不可分离变量的函数.



(b) 为变换结果

图 3 (14) 式反演的结果

总之, 我们提出的方法在圆截面等离子体且参量接近中心对称的条件下, 是比较合理的.

### 4 在密度测量中的应用

HT-7 托卡马克具有小半径为  $a = 26\text{--}28\text{cm}$ , 用五道远红外干涉仪测量电子密度, 分布在  $-20, -10, 0, 10$  和  $20\text{cm}$  的位置上. 此外, 我们假定在边界的值为零. 在计算中, 我们采用了牛顿插值法获得 57 个点的值, 然后进行 Abel 变换, 从而用新方法得到了等离子体电子密度的空间分布. 在 HT-7 实验

中, 炮号为 38477 的放电波形如图 4 所示, 测量的值为密度弦积分的平均值. 图 5 显示了用新方法反演的密度分布, 时刻分别为 260 和 460ms. 图 6 对应的是两时刻的等高图.

### 5 结 论

诊断的一个重要任务是获得物理量的空间分布, 即物理量与  $r$  的关系. 根据这些关系总结一些规律, 再与理论比较, 进而揭示它的物理本质. 另外在一些计算中, 要用到这些物理量的空间分布<sup>[12]</sup>.

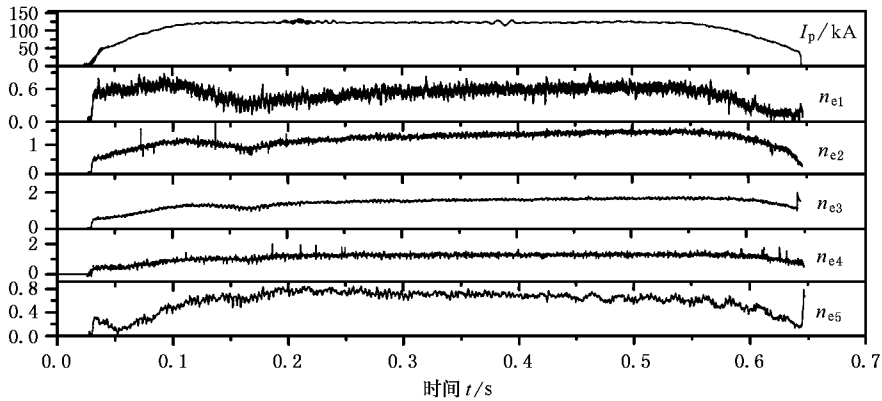


图4 炮号为 38477 的放电波形 信号分别为 : 等离子体电流  $I_p$ 、5 道电子密度弦积分的平均值  $n_{e1}$ — $n_{e5}$ (单位为  $10^{13}/\text{cm}^3$ )

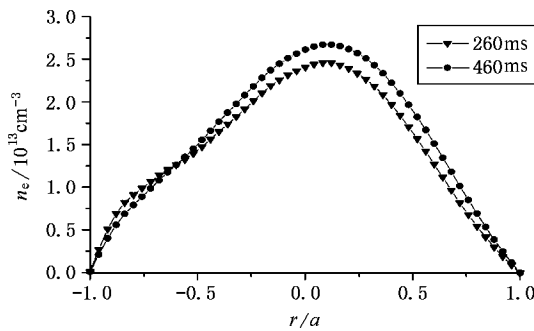


图5 用新方法反演的  $n_e(r)$  在  $X$  轴上的分布 在  $t=260$ 、 $460\text{ms}$

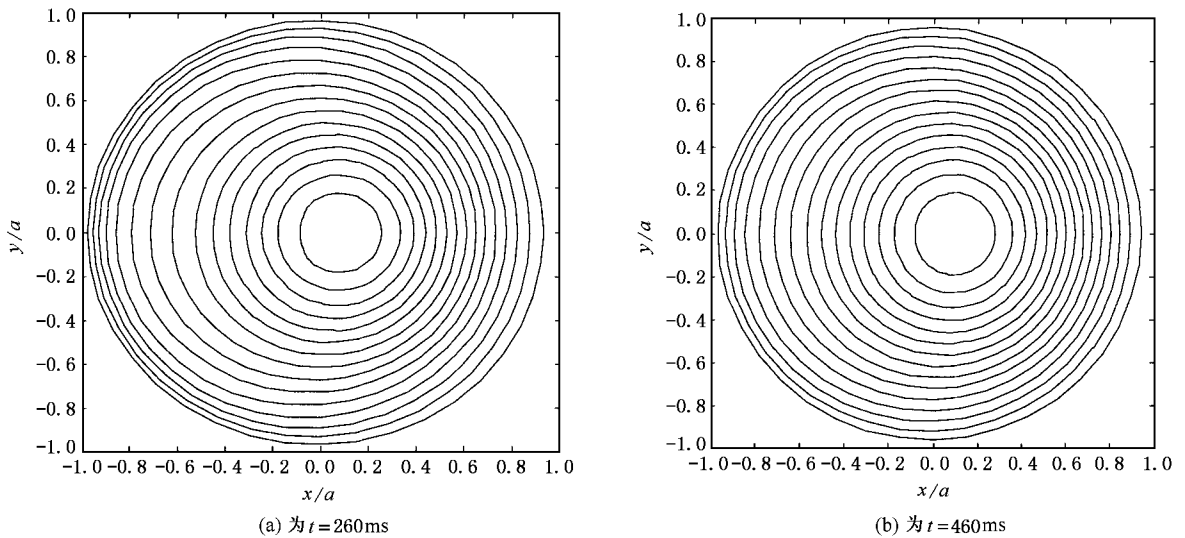


图6  $n_e(r)$  对应的等高图 在  $t=260$ 、 $460\text{ms}$

在同心圆方法中,用  $K$  个方程来确定  $K$  个系数<sup>[9]</sup>,因而变换的结果对测量的噪声很灵敏.而我们提出的新方法由于采用了两次最小二乘法,因此可以平

滑随机噪声对结果的影响.通过与测试函数进行比较,可以看出反演的结果与实际值的偏离是很小的,密度的反演结果也是合理的.与其他方法相比,此方

法有显著的优点. 总之, 本文提出的新方法, 对圆截面托卡马克中心对称或弱非中心对称参量的平行弦

积分值(如电子密度、等离子体的辐射等)的逆变换, 是适用的.

- [ 1 ] K. Bockasten , *J. Opt. Soc. Am.* , **51** ( 1961 ) , 943 .
- [ 2 ] W. L. Barr , *J. Opt. Soc. Am.* , **52** ( 1962 ) , 885 .
- [ 3 ] H. K. Park , *Plasma Phys. Controlled Fusion* , **31** ( 1989 ) , 2035 .
- [ 4 ] H. K. Park , *Rev. Sci. Instrum.* , **61** ( 1990 ) , 2879 .
- [ 5 ] N. Gottardi , *J. Appl. Phys.* , **50** ( 1979 ) , 2647 .
- [ 6 ] Y. Yasutomo *et al.* , *IEEE Trans. Plasma Sci.* , **PS-9** ( 1981 ) , 18 .
- [ 7 ] Y. Nagayama , *J. Appl. Phys.* , **62** ( 1987 ) , 2702 .
- [ 8 ] L. G. Zhang *et al.* , *Nuclear Fusion and Plasma Physics* , **9** ( 1989 ) , 107 ( in Chinese ) [ 张连根等 , 核聚变与等离子体物理 , **9** ( 1989 ) , 107 ] .
- [ 9 ] H. C. Deng *et al.* , *Nuclear Fusion and Plasma Physics* , **12** ( 1992 ) , 111 ( in Chinese ) [ 邓慧忱等 , 核聚变与等离子体物理 , **12** ( 1992 ) , 111 ] .
- [ 10 ] H. L. Ruan *et al.* , *Int. J. Infrared and Millimeter Waves* , **21** ( 2000 ) , 1973 ( in Chinese )
- [ 11 ] A. P. Navarro *et al.* , *Rev. Sci. Instrum.* , **52** ( 1981 ) , 1634 .
- [ 12 ] X. M. Zhang *et al.* , *Acta Phys. Sin.* , **50** ( 2001 ) , 1715 ( in Chinese ) [ 张先梅等 , 物理学报 , **50** ( 2001 ) , 1715 ] .

## DEALING WITH ABEL INVERSION BY USING LENGENDRE EXPANSIONS

RUAN HUAI-LIN WAN BAO-NIAN ZHANG XIAN-MEI LIU JIAN-KUN

( *Institute of Plasma Physics , Chinese Academy of Sciences , Hefei 230031 , China* )

( Received 9 December 2000 ; revised manuscript received 20 June 2001 )

### ABSTRACT

A new method is presented for dealing with weakly asymmetrical Abel inversion in this paper. We separate the integrated quantity into odd and even parts by using Yasutomo's method. The asymmetric local value is expressed as the product of a weight function and a symmetric local value. The symmetric distribution is expanded into Fourier-Legendre series , and the coefficients of the series are determined by using a least-square-fitting method.

**Keywords :** Abel inversion , Legendre series , test function , symmetry , asymmetry

**PACC :** 5265 , 5270