第 50 卷 第 2 期 2001 年 2 月
1000-3290/2001/50(02)/0310-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 50, No. 2, February, 2001
©2001 Chin. Phys. Soc.

梯形自旋链的一种规范场论的形式*

许伯威 叶 飞 丁国辉

(上海交通大学物理系,上海 200030)

(2000 年 7 月 25 日收到)

考虑无质量费米场和规范场的 Pauli 相互作用项的系统,在这一理论中耦合常数为无量纲量. 该模型等价于自旋 1/2 反铁磁 XXZ 量子链. 如在模型中引入费米场的味自由度,则可定性描述二条自旋链的梯形结构系统. 在这一系统中不再存在无能隙激发.

关键词:梯形结构,规范场,自旋链

PACC:7510J,7550E,1110

众所周知,自旋 $S = 1/2$ 的海森堡 XXZ 量子链可由 Bethe ansatz 严格求解[1,2],对各向同性的反铁磁链,系统的激发能谱是无能隙的,具有共形对称性. Baxter 等给出了代数式关联函数的临界指数[3,4]. 但实验和理论研究指出,二条各向同性自旋链耦合的梯形系统,激发能谱不再是无能隙的,而出现有能隙的质量项[5,6]. 最近有作者提出均匀电荷密度背景中味自由度为 2 的 Schwinger 模型来解释梯形自旋链中的质量项的出现[7]. 但在通常二维量子电动力学中,耦合项的耦合常数是有量纲的. 当玻色化后,该项对应玻色场的质量项[8]. 在讨论自旋链中无能隙和有能隙的条件时,引入这样的规范场论并不恰当;自然的做法应引入无量纲耦合常数的规范场论. 而 Pauli 相互作用项的引入是满足这一要求的[9].

考虑以下拉式密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - g\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu}, \tag{1}$$

其中

$$\gamma_0 = \sigma_x,\ \gamma_1 = -\mathrm{i}\sigma_y,\ \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1 = \sigma_z,$$
$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}],\ \psi = (R, L). \tag{2}$$

(1)式中前两项分别为自由规范场和无质量自由费米场的拉氏密度,而最后一项即 Pauli 相互作用项. 在二维场论中耦合常数 g 为无量纲. 选取规范条件 $A_1 = 0$[8],由场方程求解得

$$\partial A_0 = 2\mathrm{i}g\psi^{+}\gamma^{1}\psi. \tag{3}$$

将(1)式中的规范场由(3)式代入,其对应的哈密顿密度为

$$\mathcal{H} = -\mathrm{i}R^{+}\partial R + \mathrm{i}L^{+}\partial L + 2g^{2}(\mathrm{i}R^{+}L - \mathrm{i}L^{+}R)^{2}. \tag{4}$$

引入玻色化手续[10]

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}\exp\left\{\pi\left[\phi(x) - \int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}y\pi(y)\right]\right\},$$
$$L(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}\exp\left\{-\mathrm{i}\pi\left[\phi(x) + \int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}y\pi(y)\right]\right\}, \tag{5}$$

其中 $\phi(x)$,$\pi(x)$ 为正则玻色场,满足对易式 $[\phi(x),\pi(y)] = \mathrm{i}\delta(x-y)$,则(4)式的玻色化形式为

$$\mathcal{H} = \frac{v}{2}\left[K\pi^{2} + \frac{1}{K}(\partial\phi)^{2}\right] - \frac{g^{2}}{\pi^{2}\varepsilon^{2}}\cos 4\sqrt{\pi}\phi,$$
$$K = \left(\frac{\pi - 2g^{2}}{\pi + 2g^{2}}\right)^{1/2},\ v = \left(1 - \frac{4g^{4}}{\pi^{2}}\right)^{1/2}. \tag{6}$$

(6)式为含标度因子的 sine-Gordon 模型,其中不出现文献[8]中的玻色场的质量项.

我们知道对于自旋 $S = 1/2\ XXZ$ 量子链的哈密顿量为

$$H_H = -\sum_{n}[S^{x}(n)S^{x}(n+1) + S^{y}(n)S^{y}(n+1) - \Delta S^{z}(n)S^{z}(n+1)]. \tag{7}$$

其对应的玻色化形式的哈密顿密度[11]

$$\mathcal{H}_H = \frac{v}{2}\left[K\pi^{2} + \frac{1}{K}(\partial\phi)^{2}\right] - \frac{\Delta}{\pi^{2}\varepsilon^{2}}\cos 4\sqrt{\pi}\phi,$$

* 国家自然科学基金(批准号:19975031)和高校博士科学点专项科研基金(批准号:1999024833)资助的课题.

$$K = \left(\frac{\pi - 2\Delta}{\pi + 2\Delta}\right)^{1/2},\ v = \left(1 - \frac{4\Delta^2}{\pi^2}\right)^{1/2}. \tag{8}$$

(6),(8)二式相比较,有 $\Delta = g^2$,所以规范场模型(1)式可描述反铁磁 XXZ 量子链. 当 $g^2 = \Delta \leqslant \frac{3\pi}{10}$ 时,对应无能隙区,其相互作用项为非相关算符(irrelevant operator),$\Delta = \frac{3\pi}{10}$ 为临界值. 而由 Bethe ansatz 严格解求得 XXZ 量子链的无能隙区为 $\Delta \leqslant 1$[1,2]. 这是格点模型和连续模型二者的微小差别.

现考虑味自由度为 2 的费米场 ψ_a,$a = 1,2$ 即为味自由度指标. (1)式的推广是直接的,对应的拉氏密度为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \mathrm{i}\bar{\psi}_a\gamma^\mu\partial_\mu\psi_a - g\bar{\psi}_a\sigma^{\mu\nu}\psi_a F_{\mu\nu}. \tag{9}$$

取与以上相同的规范条件,同样可写出其对应的哈密顿密度

$$\mathcal{H}' = -\mathrm{i}R_a^+\partial R_a + \mathrm{i}L_a^+\partial L_a + 2g^2(\mathrm{i}R_a^+L_a - \mathrm{i}L_a^+R_a)^2. \tag{10}$$

其玻色化形式为

$$\mathcal{H}' = \frac{v}{2}\left[K\pi_a^2 + \frac{1}{K}(\partial\phi_a)^2\right] - \frac{g^2}{\pi^2\varepsilon^2}\left[\cos 4\sqrt{\pi}\phi_1 + \cos 4\sqrt{\pi}\phi_2\right] + \frac{4g^2}{\pi^2\varepsilon^2}\sin 2\sqrt{\pi}\phi_1 \sin 2\sqrt{\pi}\phi_2 \tag{11}$$

由重整化群方程可知[12],当 $g^2 \leqslant \frac{3\pi}{10}$ 时,第二项仍为非相关算符,但是第三项为相关算符(relevant opertor),给出质量项,能隙质量 $m \sim g^{1/(1-K)}$. 例如在 g^2 的临界值附近,$m \sim g^2$. 如只保留对质量有贡献的相关项,则(11)式可写成

$$\mathcal{H}' = \frac{v}{2}\sum_a\left[\pi_a'^2 + (\partial\phi')_a^2\right] + \frac{6}{5\pi\varepsilon^2}\sin\sqrt{2\pi}\phi_1'\sin\sqrt{2\pi}\phi_2', \tag{12}$$

其中 $\phi_a' = K^{-1/2}\phi_a$,$\pi_a' = K^{1/2}\pi_a$.

现讨论两条各向同性($\Delta = 1$)自旋 $S = 1/2$ 量子链耦合的梯形结构,其哈密顿量为

$$H_H' = \sum_{a=1,2}\sum_n S_a(n)\cdot S_a(n+1) + J\sum_n S_1(n)\cdot S_2(n). \tag{13}$$

保留其中的相关项,其对应的玻色化哈密顿密度为[6]

$$\mathcal{H}_H' \sim \frac{v_s}{2}\sum_a\left[\pi_a'^2 + (\partial\phi')_a^2\right] + \frac{J\lambda}{\pi^2\varepsilon^2}\sin\sqrt{2\pi}\phi_1'\sin\sqrt{2\pi}\phi_2' + \frac{J\lambda}{\pi^2\varepsilon^2}\cos\sqrt{2\pi}(\theta_1 - \theta_2), \tag{14}$$

其中 $\partial\theta_a = \pi_a'$,$\lambda$ 为与电荷场有关的真空平均值. 与(12)式相比,第二项形式完全一样,但多了相关项对偶场量第三项. (14)式可表示为带质量的 Majorana 费米场,具有 $O(3)$ 对称性. 如果在(13)式中将两条量子链的相互作用项写成 $J\sum_n S_1^z(n)S_2^z(n)$,则对应的哈密顿密度不出现(14)式中的第三项. 这样就和(12)式完全等价,但破坏了原来(13)和(14)式中的 $O(3)$ 对称性.

以上规范场理论中,与规范场有关部分显然满足通常的规范变换不变性,但费米场动能项不具有局域规范变换不变,而只保持整体规范变换不变. 由以上结果可知,XXZ 量子链和规范场理论(1)和(6)式完全等价,$\Delta = g^2 > 0$ 也正对应反铁磁链. 但二条自旋链耦合的梯形结构(13)和(14)式,其结果和味自由度为 2 的费米场规范理论(9)—(11)式则不尽相同. 我们知道自旋链梯形结构的玻色化本身可有不同的方案,形式也并不完全一致. 但有一点是共同的,即梯形结构导致能隙的出现. 而规范场论中的味自由度的引入,则在场论中能隙的出现也是自然的. 二者相比较,后者等同于 $O(3)$ 对称性破坏的梯形系统. 味自由度为 2 的费米场规范理论为自旋链梯形结构的研究,提供一种场论的依据,有所借鉴. 特别是其中参量为无量纲,这对讨论能隙的出现,给出一种较为准确的场论方案.

[1] H. A. Bethe, *Z. Physik*, **71**(1931), 205.

[2] C. N. Yang, C. P. Yang, *Phys. Rev.*, **150**(1966), 321.

[3] R. J. Baxter, Exactly Solved Models in Staticstical Mechanics (Academic Press, 1982).

[4] A. Luther, I. Peschel, *Phys. Rev.*, **B8**(1973), 2911.

[5] S. P. Strong, A. J. Millis, *Phys. Rev. Lett.*, **69**(1992), 2419.

[6] D. G. Shelton, A. A. Nersesyan, A. M. Tsvelik, *Phys. Rev.*, **B53**(1996), 8521.

[7] Y. Hosotani, *J. Phys.*, **A30**(1997), L757; **E31**(1997), 7415.

[8] M. Bander, *Phys. Rev.*, **D13**(1976), 1566.

[9] A. O. Barut, B. W. Xu, *Physica Scripta*, **26**(1982), 129.

[10] S. Shankar, Moden condensed matter physics (World Scientific Publishing co., 1995), 353.

[11] B. W. Xu, *Progress in Physics*, **19**(1999), 24 (in Chinese) [许伯威,物理学进展,**19**(1999), 24].

[12] S. Fujimoto, N. Kawakami, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **66**(1997), 2152.

ONE KIND OF THE GAUGE FIELD THEORY OF SPIN LADDERS*

XU BO-WEI YE FEI DING GUO-HUI
(*Department of Physics*, *Shanghai Jiaotong University*, *Shanghai* 200030, *China*)
(Received 25 July 2000)

ABSTRACT

We consider a massless fermion interacting with the gauge field by Pauli interaction in which the coupling constant is dimensionless. The model is equivalent to the $s = 1/2$ antiferromagnetic XXZ spin chain. The two flavours massless fermion of such model can describe the two-leg spin ladder system qualitatively, and there is no gapless exitation in such a system.

Keywords: ladder system, gauge field, spin chain
PACC: 7510J, 7550E, 1110

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19975031).