第 50 卷 第 3 期 2001 年 3 月
1000-3290/2001/50(03)/0383-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 50, No. 3, March, 2001

转动系统相对论性 Birkhoff 动力学的基本理论*

罗绍凯　傅景礼　陈向炜

(商丘师范学院数学力学与数学物理研究所, 商丘　476000)

(2000 年 7 月 11 日收到; 2000 年 8 月 4 日收到修改稿)

建立转动系统相对论性 Birkhoff 动力学的基本理论, 给出其 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组、Pfaff 作用量、Pfaff-Birkhoff 原理、Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理, 以及 Birkhoff 方程. 并研究转动系统相对论性 Lagrange 力学、Hamilton 力学与转动系统相对论性 Birkhoff 动力学之间的关系, 证明完整保守、完整非保守转动相对论系统都可纳入转动相对论 Birkhoff 系统.

关键词: 转动系统, 相对论, Birkhoff 动力学, 变分原理

PACC: 0316, 0412

1 引　言

自旋运动是微观粒子的固有属性. 1979 年, Bengtsson 和 Frauendorf 精确测量 14 种核子的自旋转速最大值, 结果表明各核子的自旋转速最大值各不相同[1]. 随着科学与技术的进步, 越来越多的实验现象与高速转动问题有关. Carmeli 于 1985 年建立了转动相对论力学理论[2—5]. 1996 年以来, 我们建立了转动系统的相对论性分析力学理论, 给出其多种形式的变分原理和运动方程, 研究了其代数结构、Noether 对称性和 Lie 对称性[6—9]. 最近文献[10, 11]进一步探讨了具有质量分离或并入的变转动惯量系统的转动相对论理论. 1992 年以来, 梅凤翔等人在文献[12, 13]基础上建立了 Birkhoff 系统动力学, 构造了理论框架[14—18]. Birkhoff 力学比 Hamilton 力学更为一般, Hamilton 力学在近代物理学领域已得到广泛应用, Birkhoff 动力学在近代物理学领域也理应扮演重要角色, 最近文献[19]给出了相对论性 Birkhoff 方程及其 Lie 对称性与守恒量. 本文建立转动系统相对论性 Birkhoff 动力学的基本理论, 探讨它与转动系统相对论性 Lagrange 力学、Hamilton 力学之间的关系, 并证明完整保守、完整非保守转动相对论系统都可纳入转动相对论性 Birkhoff 系统. 本文旨在为解决高速转动系统问题提供理论支撑, 并为经典 Birkhoff 动力学这一新的力学应用于现代物理学提供桥梁.

2 转动系统相对论性 Birkhoff 动力学的基本原理

采用重复角码表示求和的约定. 原理

$$\delta A = 0, \quad A = \int_{t_1}^{t_2} \{R_\nu(t, \boldsymbol{a})\dot{a}^\nu - B(t, \boldsymbol{a})\} \mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}\delta a^\nu = \delta \mathrm{d} a^\nu, \quad \delta a^\nu|_{t=t_1} = \delta a^\nu|_{t=t_2} = 0$$

$$(\nu = 1, \cdots, 2n) \tag{1}$$

称为 Pfaff-Birkhoff 原理[13], 其中 A 称为 Pfaff 作用量, $B(t, \boldsymbol{a})$ 称为 Birkhoff 函数, $R_\nu(t, \boldsymbol{a})$ $(\nu = 1, \cdots, 2n)$ 称为 Birkhoff 函数组. 该原理是一个普遍的一阶积分变分原理.

2.1 转动相对论系统的 Pfaff 作用量

研究 N 个粒子构成的力学系统绕定轴的转动, 在 t 时刻第 i 个粒子绕定轴的角速度为 $\dot{\theta}_i$, i 粒子的极限角速度为 Γ_i, 经典转动惯量为 I_{oi}, 其相对论性转动惯量为[5,6]

$$I_i = \frac{I_{oi}}{\sqrt{1 - \dot{\theta}_i^2 / \Gamma_i^2}}. \tag{2}$$

构造转动相对论系统的 Birkhoff 函数 B^* 和 Birkhoff 函数组 R_ν^* $(\nu = 1, \cdots, 2n)$, 即

$$B^* = B^*(I_i(t, \boldsymbol{a}), t, \boldsymbol{a}), \quad R_\nu^* = R_\nu^*(I_i(t, \boldsymbol{a}), t, \boldsymbol{a})$$

$$(\nu = 1, \cdots, 2n; i = 1, \cdots, N). \tag{3}$$

* 国家自然科学基金(批准号: 19972010)及河南省自然科学基金(批准号: 984053100 和 998040080)资助的课题.

转动相对论系统的 Pfaff 作用量可以定义为

$$A^* = \int_{t_1}^{t_2}\{R_\nu^*(I_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a})\dot{a}^\nu - B^*(I_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a})\}\mathrm{d}t. \tag{4}$$

2.2 转动相对论系统的 Pfaff-Birkhoff 原理

把原理

$$\delta A^* = \delta\int_{t_1}^{t_2}\{R_\nu^*(I_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a})\dot{a}^\nu - B^*(I_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a})\}\mathrm{d}t = 0, \tag{5}$$

$$I_i = \frac{I_{oi}}{\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}},$$

$$\mathrm{d}\delta a^\nu = \delta\mathrm{d}a^\nu,\quad \delta a^\nu|_{t=t_1} = \delta a^\nu|_{t=t_2} = 0$$
$$(\nu = 1,\cdots,2n;i = 1,\cdots,N) \tag{6}$$

称之为转动相对论系统基本形式的 Pfaff-Birkhoff 原理.

原理(5)式可以展开为

$$\delta A^* = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\frac{\partial R_\nu^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\nu^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial a^\nu} - \frac{\partial R_\mu^*}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \left(\frac{\partial B^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial a^\mu} + \frac{\partial B^*}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial t} + \frac{\partial R_\mu^*}{\partial t}\right)\right\}\delta a^\mu\mathrm{d}t = 0$$
$$(\nu,\mu = 1,\cdots,2n;i = 1,\cdots,N), \tag{7}$$

其中用到条件(6)式. 令

$$\tilde{B}^* = \tilde{B}^*(t,\boldsymbol{a}) = B^*(I_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a}),$$
$$\tilde{R}_\nu^* = \tilde{R}_\nu^*(t,\boldsymbol{a}) = R_\nu^*(I_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a}), \tag{8}$$

则有

$$\frac{\partial\tilde{B}^*}{\partial a^\mu} = \frac{\partial B^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial a^\mu} + \frac{\partial B^*}{\partial a^\mu},$$
$$\frac{\partial\tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu} = \frac{\partial R_\nu^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\nu^*}{\partial a^\mu}, \tag{9}$$
$$\frac{\partial\tilde{R}_\nu^*}{\partial t} = \frac{\partial R_\nu^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial t} + \frac{\partial R_\nu^*}{\partial t},$$

那么原理(7)式可以写为

$$\delta A^* = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\frac{\partial\tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial\tilde{R}_\mu^*}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial\tilde{B}^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial\tilde{R}_\mu^*}{\partial t}\right\}\delta a^\mu\mathrm{d}t = 0 \quad (\nu,\mu = 1,\cdots,2n). \tag{10}$$

把原理(10)式称为转动相对论系统标准形式的 Pfaff-Birkhoff 原理.

2.3 转动相对论系统的 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理

在原理(5)和(6)式中,注意到等时变分下变分 δ 与积分 $\int$ 的可交换性,并注意到积分区间 $[t_1,t_2]$ 的任意性,得到

$$\delta\{R_\nu^*(I_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a})\dot{a}^\nu - B^*(I_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a})\} = 0$$
$$(\nu = 1,\cdots,2n;i = 1,\cdots,N). \tag{11}$$

把原理(11)式称为转动相对论系统基本形式的 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理. 无论对于经典力学,还是对于相对论力学,本文给出的原理(11)式都是一个新型的微分变分原理.

对于一个给定的物理系统,只要构造出系统的 B^* 函数和 R_ν^* 函数组,便可直接利用原理(11)式,并注意到系统所受约束对 $\delta a^\mu(\mu = 1,\cdots,2N)$ 独立性的影响,确定该系统的运动方程.

利用(8)和(9)式,可以把原理(11)式写为

$$\left\{\left(\frac{\partial\tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial\tilde{R}_\mu^*}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial\tilde{B}^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial\tilde{R}_\mu^*}{\partial t}\right\}\delta a^\mu = 0$$
$$(\nu,\mu = 1,\cdots,2n). \tag{12}$$

把原理(12)式称为转动相对论系统标准形式的 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理.

原理(12)式也可由原理(10)式利用积分区间 $[t_1,t_2]$ 的任意性直接得到.

3 转动相对论系统 Birkhoff 动力学的基本方程

3.1 转动相对论系统的 Birkhoff 方程

对于只受理想完整约束或自由的转动相对论系统,原理(12)式中的 $\delta a^\mu(\mu = 1,\cdots,2n)$ 是彼此独立的. 此时,由原理(12)式得到

$$\left(\frac{\partial\tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial\tilde{R}_\mu^*}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial\tilde{B}^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial\tilde{R}_\mu^*}{\partial t} = 0$$
$$(\nu,\mu = 1,\cdots,2n). \tag{13}$$

称方程(13)为转动相对论系统的 Birkhoff 方程.

取

$$\tilde{\Omega}_{\mu\nu}^* = \left(\frac{\partial\tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial\tilde{R}_\mu^*}{\partial a^\nu}\right),$$
$$\tilde{\Omega}^{*\mu\nu} = \left(\left\|\frac{\partial\tilde{R}_\beta^*}{\partial a^\alpha} - \frac{\partial\tilde{R}_\alpha^*}{\partial a^\beta}\right\|^{-1}\right)^{\mu\nu}$$
$$(\nu,\mu,\alpha,\beta = 1,\cdots,2n), \tag{14}$$

则方程(13)可以改写为

$$\tilde{\Omega}_{\mu\nu}^*\dot{a}^\nu - \frac{\partial\tilde{B}^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial\tilde{R}_\mu^*}{\partial t} = 0 \quad (\nu,\mu = 1,\cdots,2n) \tag{15}$$

或

$$\dot{a}^{\mu} = \widetilde{\Omega}^{*\mu\nu}\left(\frac{\partial \widetilde{B}^{*}}{\partial a^{\nu}} + \frac{\partial \widetilde{R}_{\nu}^{*}}{\partial t}\right) \qquad (\nu,\mu = 1,\cdots,2n). \tag{16}$$

称方程(16)为逆变形式的转动相对论系统的 Birkhoff 方程. $\widetilde{\Omega}_{\mu\nu}^{*}$ 为转动相对论系统的 Birkhoff 张量, $\widetilde{\Omega}^{*\mu\nu}$ 为 $\widetilde{\Omega}_{\mu\nu}^{*}$ 的逆变张量. 一般假设系统(13)式非奇异,即有

$$\det(\widetilde{\Omega}_{\mu\nu}^{*}) \neq 0. \tag{17}$$

3.2　自治和半自治形式的转动相对论系统的 Birkhoff 方程

如果 $\widetilde{R}_{\mu}^{*}$ 和 $\widetilde{B}^{*}$ 都不显含时间 t,则系统是自治的.如果 $\widetilde{R}_{\mu}^{*}$ 不显含时间 t,则系统是半自治的. 对于自治和半自治系统,转动相对论系统的 Birkhoff 方程(13)有如下简单形式:

$$\widetilde{\Omega}_{\mu\nu}^{*}\dot{a}^{\nu} - \frac{\partial \widetilde{B}^{*}}{\partial a^{\mu}} = 0 \qquad (\nu,\mu = 1,\cdots,2n). \tag{18}$$

3.3　转动相对论系统带乘子形式的 Birkhoff 方程

如果系统受有约束

$$\varphi_{\rho}(t,\boldsymbol{a}) = 0 \qquad (\rho = 1,\cdots,2m;m < n), \tag{19}$$

对(19)式取等时变分,得到

$$\frac{\partial \varphi_{\rho}}{\partial a^{\mu}}\delta a^{\mu} = 0. \tag{20}$$

利用原理(12)式,由通常的 Lagrange 乘子法,得到

$$\left(\frac{\partial \widetilde{R}_{\nu}^{*}}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial \widetilde{R}_{\mu}^{*}}{\partial a^{\nu}}\right)\dot{a}^{\nu} - \frac{\partial \widetilde{B}^{*}}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial \widetilde{R}_{\mu}^{*}}{\partial t} = \lambda_{\rho}\frac{\partial \varphi_{\rho}}{\partial a^{\mu}}$$
$$(\nu,\mu = 1,\cdots,2n;\rho = 1,\cdots,2m;m < n). \tag{21}$$

称(21)式为转动相对论系统带乘子形式的 Birkhoff 方程. 由方程(19)和(21),便可确定 a^{μ} 和 λ_{ρ}.

对于给定的转动相对论系统,要构造其 B^{*} 函数和 R_{μ}^{*} 函数组,可延用 Santilli 第一方法、Santilli 第二方法、Hojman 方法,以及自治系统 Birkhoff 函数的一种构造方法,见文献[13,14].

4　转动相对论系统的 Lagrange 力学, Hamilton 力学和 Birkhoff 动力学

文献[6,7]中构造了转动相对论系统的广义动能函数

$$T_r^{*} = I_{oi}\Gamma_i^2\left(1 - \sqrt{1 - \dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}\right) \qquad (i = 1,\cdots,N), \tag{22}$$

证明了 T_r^{*} 与转动相对论系统的动能函数 T_r 满足关系

$$T_r^{*} = I_i\dot{\theta}_i^2 - T_r, \qquad T_r = I_i\Gamma_i^2 - I_{oi}\Gamma_i^2 \qquad (i = 1,\cdots,N), \tag{23}$$

构造了转动相对论系统的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数

$$L_r(t,q^s,\dot{q}^s) = T_r^{*} - V, \tag{24}$$

$$H_r(t,q^s,p_s) = p_s\dot{q}^s - L_r, \quad p_s = \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s = 1,\cdots,n), \tag{25}$$

给出了转动相对论系统的 Hamilton 原理、D'Alembert 原理和 Hamilton 正则方程

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L_r(t,q^s,\dot{q}^s)\mathrm{d}t = 0 \qquad (s = 1,\cdots,n), \tag{26}$$

$$\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}^s} + \frac{\partial L_r}{\partial q^s}\right)\delta q^s = 0 \qquad (s = 1,\cdots,n), \tag{27}$$

$$\dot{q}^s = \frac{\partial H_r}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H_r}{\partial q^s} \qquad (s = 1,\cdots,n). \tag{28}$$

下面探讨(26)—(28)式与转动相对论系统 Birkhoff 动力学之间的关系.

4.1　转动相对论系统的 Hamilton 原理是原理(5)式的特例

利用(25)式,原理(26)式可以写为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L_r\mathrm{d}t = \delta\int_{t_1}^{t_2}(p_s\dot{q}^s - H_r)\mathrm{d}t = 0 \qquad (s = 1,\cdots,n). \tag{29}$$

令

$$a^{\mu} = \begin{cases} q^{\mu} & (\mu = 1,\cdots,n), \\ p_{\mu-n} & (\mu = n+1,\cdots,2n), \end{cases}$$
$$R_{\mu}^{*} = \begin{cases} p_{\mu} & (\mu = 1,\cdots,n), \\ 0 & (\mu = n+1,\cdots,2n), \end{cases} \tag{30}$$
$$B^{*} = H_r,$$

把(30)式代入原理(5)式,立即得到原理(29)式. 这表明原理(26)式是原理(5)式在条件(30)式下的特例.

4.2　转动相对论系统的 D'Alembert-Lagrange 原理是原理(12)式的特例

如果 R_{μ}^{*} 不显含时间 t,利用(30)式,则转动相

对论系统的 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理(12) 式给出

$$\left(-\dot{p}_s-\frac{\partial H_r}{\partial q^s}\right)\delta q^s+\left(\dot{q}^s-\frac{\partial H_r}{\partial p_s}\right)\delta p_s=0 \quad (s=1,\cdots,n), \tag{31}$$

注意到

$$p_s=\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}^s},\quad \frac{\partial H_r}{\partial q^s}=-\frac{\partial L_r}{\partial q^s},\quad \dot{q}^s=\frac{\partial H_r}{\partial p_s}, \tag{32}$$

则(31) 式成为转动相对论系统的 D'Alembert-Lagrange 原理(27) 式.

4.3 转动相对论系统的 Hamilton 正则方程是方程(13) 的特例

如果 R_μ^* 不显含时间 t,对于转动相对论系统 Birkhoff 方程(13),利用(30) 式,则转动相对论系统 Birkhoff 张量为

$$(\widetilde{\Omega}^*_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0_{n\times n} & +1_{n\times n}\\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n}\end{pmatrix}, \tag{33}$$

立即得到转动相对论系统的 Hamilton 正则方程(28). 显然,转动相对论系统的 Lagrange 方程也同样是转动相对论系统的 Birkhoff 方程(13) 的特例.

5 转动相对论系统动力学方程的 Birkhoff 表示

把用转动相对论系统 Birkhoff 方程来描述运动的力学系统或描述状态的物理系统,称为转动相对论 Birkhoff 系统. 通过第 4 节的讨论可知,理想、完整、保守条件下的转动相对论 Hamilton 系统、Lagrange 系统是转动相对论 Birkhoff 系统在半自治情形下的一个特例,可以直接纳入转动相对论 Birkhoff 系统.

下面再给出一个例子,证实完整非保守的转动相对论系统可以纳入转动相对论 Birkhoff 系统. 研究思路是把完整非保守转动相对论系统的 Lagrange 方程表示为 Birkhoff 方程(13) 的形式.

文献[7] 给出了完整非保守转动相对论系统的 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r^*}{\partial \dot{q}^s}-\frac{\partial T_r^*}{\partial q^s}=G_s,\quad G_s=M_i\frac{\partial \theta_i}{\partial q^s} \quad (s=1,\cdots,n;i=1,\cdots,N). \tag{34}$$

注意到(23) 式,系统的广义动能 T_r^* 表为

$$T_r^*=I_i\dot{\theta}_i^2-I_i\Gamma_i^2+I_{oi}\Gamma_i^2=I_ia_{sk}^i(t,\boldsymbol{q})\dot{q}^s\dot{q}^k+2I_ib_s^i(t,\boldsymbol{q})\dot{q}^s+I_ic^i(t,\boldsymbol{q})-I_i\Gamma_i^2+I_{oi}\Gamma_i^2 \quad (i=1,\cdots,N), \tag{35}$$

其中

$$a_{sk}^i=\frac{\partial \theta_i}{\partial q^s}\frac{\partial \theta_i}{\partial q^k},\quad a_s^i=\frac{\partial \theta_i}{\partial q^s}\frac{\partial \theta_i}{\partial t},\quad c^i=\frac{\partial \theta_i}{\partial t}\frac{\partial \theta_i}{\partial t}. \tag{36}$$

令

$$[k,r;s]^i=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ks}^i}{\partial q^r}+\frac{\partial a_{rs}^i}{\partial q^k}-\frac{\partial a_{kr}^i}{\partial q^s}\right),$$

$$\Gamma_s^i=\left(\frac{\partial b_k^i}{\partial q^s}-\frac{\partial b_s^i}{\partial q^k}\right), \tag{37}$$

利用(35)—(37) 式,方程(34) 可以展开为显式

$$\begin{aligned}\left(I_ia_{sk}^i+\frac{\partial I_i}{\partial \dot{q}^k}u_s^i\right)\ddot{q}^k=&-I_i[k,r;s]\dot{q}^r\dot{q}^k+\Gamma_s^i\\&+\frac{1}{2}I_i\frac{\partial c^i}{\partial q^s}-I_i\frac{\partial a_{sk}^i}{\partial t}\dot{q}^k\\&-\frac{\partial I_i}{\partial q^k}\dot{q}^ku_s^i+\frac{\partial I_i}{\partial t}u_s^i\\&-I_i\frac{\partial b_s^i}{\partial t}+G_s\end{aligned} \tag{38}$$

$$(i=1,\cdots,N;s,k=1,\cdots,2n),$$

其中 $u_s^i=\dot{\theta}_i\frac{\partial \theta_i}{\partial q^s}$,$\Gamma_s^i$ 为广义陀螺力,$[k,r;s]$ 为 Chirstoffel 符号. 令 $M_{sk}^*=I_ia_{sk}^i+\frac{\partial I_i}{\partial \dot{q}^k}u_s^i$,$N_s$ 为(38) 式等号右边的一串式子,假设由此可解出 $\ddot{q}^k$,即

$$\ddot{q}^s=\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}N_l(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s,l=1,\cdots,n), \tag{39}$$

其中 $\Delta=|M_{sk}^*|\neq 0$,Δ_{sl} 为 Δ 中元素 (l,s) 的代数余子式.

将(39) 式写为显形式,记作

$$\ddot{q}^s=g_s(t,q^k,\dot{q}^k) \quad (s,k=1,\cdots,n). \tag{40}$$

令

$$a^s=q^s,\quad a^{n+s}=\dot{q}^s \quad (s=l,\cdots,n), \tag{41}$$

则方程(40) 可表为标准一阶形式

$$\dot{a}^\nu=\sigma^\nu \quad (\nu=1,\cdots,2n), \tag{42}$$

其中

$$\sigma^s=a^{n+s},\quad \sigma^{n+s}=g_s(t,a^k,a^{n+k}) \quad (s=l,\cdots,n). \tag{43}$$

欲使方程(42) 有方程(13) 的形式,即

$$\dot{a}^\mu-\sigma^\mu\equiv\left(\frac{\partial \widetilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu}-\frac{\partial \widetilde{R}_\mu^*}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial \widetilde{B}^*}{\partial a^\mu}-\frac{\partial \widetilde{R}_\mu^*}{\partial t}=0 \quad (\nu,\mu=1,\cdots,2n), \tag{44}$$

则有

$$\left(\frac{\partial \widetilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu}-\frac{\partial \widetilde{R}_\mu^*}{\partial a^\nu}\right)\sigma^\nu(t,\boldsymbol{a})=\frac{\partial \widetilde{B}^*}{\partial a^\mu}+\frac{\partial \widetilde{R}_\mu^*}{\partial t}$$
$$(\mu=1,\cdots,2n), \quad (45)$$

其中 $\widetilde{B}^*$, $\widetilde{R}_\mu^*$ 由(8)式给出. 对于给定的 $\widetilde{B}^*$, 无论 $\widetilde{R}_\mu^*$ 是否显含时间 t, 方程(45)的解总是存在的[13]. 因此, 完整非保守的转动相对论系统总可纳入转动相对论 Birkhoff 系统.

6 算 例

研究常力矩 M_0 作用下定轴高速转动物体的 Birkhoff 表示. 按照(23)式构造系统的转动相对论性广义动能函数为

$$T_r^*=I\dot{q}^2-I\Gamma^2+I_0\Gamma^2,\quad I=\frac{I_0}{\sqrt{1-\dot{q}^2/\Gamma^2}}, \quad (46)$$

其中 Γ 为物体定轴转动的极限角速度, I_0 为经典转动惯量. 方程(34)给出

$$\ddot{q}=\frac{M_0}{I}\left(1-\frac{\dot{q}^2}{\Gamma^2}\right)=\frac{M_0}{I_0}\left(1-\frac{\dot{q}^2}{\Gamma^2}\right)^{3/2}. \quad (47)$$

令
$$a^1=q,\quad a^2=\dot{q}, \quad (48)$$

方程(47)可化为标准一阶形式

$$\dot{a}^\nu=\sigma^\nu\qquad(\nu=1,2),$$

即

$$\sigma^1=a^2,\quad \sigma^2=\frac{M_0}{I_0}\left(1-\frac{(a^2)^2}{\Gamma^2}\right)^{3/2}. \quad (49)$$

易于求得方程(49)具有两个彼此独立的第一积分

$$\Phi_1=\frac{I_0}{M_0}\Gamma\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{a^2}{\Gamma}\right)-t,\quad \Phi_2=\frac{I}{M_0}\Gamma^2-a^1. \quad (50)$$

应用 Hojman 方法[13,14] 给出

$$\widetilde{R}_\mu^*(t,\boldsymbol{a})=Q_\alpha\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial a^\mu},\quad \widetilde{B}^*(t,\boldsymbol{a})=-Q_\alpha\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial t}$$
$$(\alpha,\mu=1,\cdots,2n), \quad (51)$$

$$\det\left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial \Phi^\nu}-\frac{\partial Q_\nu}{\partial \Phi^\mu}\right)\neq 0. \quad (52)$$

已有

$$\widetilde{B}^*=Q_1,\quad \widetilde{R}_1^*=-Q_2,$$
$$\widetilde{R}_2^*=Q_1\frac{I_0}{M_0}\left(1-\frac{(a^2)^2}{\Gamma^2}\right)^{-3/2}+Q_2\frac{I_0}{M_0}a^2\left(1-\frac{(a^2)}{\Gamma^2}\right)^{-3/2}, \quad (53)$$

取 $Q_1=\Phi_2$, $Q_2=0$, 满足(52)式, 则有

$$\widetilde{B}^*=\frac{I}{M_0}\Gamma^2-a^1,\quad \widetilde{R}_1^*=0,$$

$$\widetilde{R}_2^*=\frac{I}{M_0}\left(\frac{I}{M_0}\Gamma^2-a^1\right)\left(1-\frac{(a^2)^2}{\Gamma^2}\right)^{-1}, \quad (54)$$

$\widetilde{B}^*$, $\widetilde{R}_1^*$, $\widetilde{R}_2^*$ 都不显含时间 t, 则它们满足自治形式的转动相对论系统的 Birkhoff 方程(18). (54)式表示的方程(18)描述了该转动相对论系统的运动.

7 讨 论

7.1 关于转动相对论 Birkhoff 系统动力学的研究

本文建立了转动相对论 Birkhoff 系统动力学的基本理论. 关于转动相对论系统 Birkhoff 方程自身的研究, 还可以进一步给出方程的积分理论、Noether 对称性与守恒量理论、Lie 对称性与守恒量理论, 以及方程的代数结构、几何描述与全局分析等. 特别是如何应用转动相对论 Birkhoff 系统动力学、相对论性 Birkhoff 系统动力学描述给定的物理系统的状态, 是需要引起物理学家关注的课题.

7.2 关于相对论 Birkhoff 系统动力学的研究

近 10 余年, 相对论分析力学的研究取得了进展[20—24]. 本文中用

$$m_i=\frac{m_{oi}}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2}}\qquad(i=1,\cdots,N), \quad (55)$$

$$B^*=B^*(m_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a}),$$
$$R_\nu^*=R_\nu^*(m_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a})$$
$$(\nu=1,\cdots,2n;i=1,\cdots,N), \quad (56)$$

$$T^*=m_{oi}c^2\left(1-\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2}\right)\qquad(i=1,\cdots,N) \quad (57)$$

分别替代(2), (3)和(22)式, 则可以转化给出相对论 Birkhoff 系统动力学的基本理论.

7.3 关于经典转动 Birkhoff 系统动力学

在 $\dot{\theta}_i\ll\Gamma_i$ 的经典近似下

$$I_i=\frac{I_{oi}}{\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}}\simeq I_{oi}\qquad(i=1,\cdots,N), \quad (58)$$

$$B^*=B^*(t,\boldsymbol{a})=B,\quad R_\nu^*=R_\nu^*(t,\boldsymbol{a})=R_\nu\qquad(\nu=1,\cdots,2n), \quad (59)$$

取 $\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}$ 关于 $\dot{\theta}_i/\Gamma_i$ 幂级数展开式的前两项,

则

$$T_r^* \simeq I_{oi}\Gamma_i^2 - I_{oi}\Gamma_i^2\left(1 - \frac{\dot{\theta}_i^2}{2\Gamma_i^2}\right) = \frac{1}{2}I_{oi}\dot{\theta}_i^2 = T_r \quad (i = 1,\cdots,N), \tag{60}$$

那么,本文给出了经典转动 Birkhoff 系统动力学的基本理论.

感谢北京理工大学梅凤翔教授多年来给予的指导与帮助.

[1] R. Bengtsson, S. Frauendorf, *Nucler Physics*, **A327** (1979), 139.

[2] M. Carmeli, *Foundations of Physics*, **15** (1985), 175.

[3] M. Carmeli, *Foundations of Physics*, **15** (1985), 889.

[4] M. Carmeli, *Foundations of Physics*, **15** (1985), 1019.

[5] M. Carmeli, *International Journal of Theoretical Physics*, **25** (1986), 89.

[6] S. K. Luo, *J. Beijing Institute Technology*, **16** (S1) (1996), 154 (in Chinese) [罗绍凯,北京理工大学学报,**16** (S1) (1996), 154].

[7] S. K. Luo, *Applied Mathematics and Mechanics*, **19** (1998), 45.

[8] J. L. Fu, X. W. Chen, S. K. Luo, *Applied Mathematics and Mechanics*, **20** (1999), 1266.

[9] J. L. Fu, X. W. Chen, S. K. Luo, *Applied Mathematics and Mechanics*, **21** (2000), 549.

[10] Y. L. Zhang, Y. F. Qiao, Y. P. Ma, *Acta Mechanica Solida Sinica*, **20** (1999), 356 (in Chinese) [张耀良、乔永芬、马云鹏,固体力学学报,**20** (1999), 356].

[11] J. H. Fang, *Acta Physica Sinica*, **49** (2000), 1028 (in Chinese) [方建会,物理学报,**49** (2000), 1028].

[12] G. D. Birkhoff, Dynamical Systems (AMS College Pub., New York, Providence, RI, 1927).

[13] R. M. Santilli, Foundations of Theoretical Mechanics Ⅱ (Springer-Verlag, New York, 1983).

[14] F. X. Mei, R. C. Shi, Y. F. Zhang, H. B. Wu, Dynamics of Birkhoff System (Beijing Institute of Technology Press, Beijing, 1996) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬,Birkhoff 系统动力学(北京理工大学出版社,北京,1996)].

[15] F. X. Mei, Application of Lie Group and Lie Algebra to Constrained Mechanical System (Science Press, Beijing, 1999) (in Chinese) [梅凤翔,李群和李代数对约束力学系统的应用(科学出版社,北京,1999)].

[16] F. X. Mei, *Science in China*, **A36** (1993), 1456 (in Chinese) [梅凤翔,中国科学,**A36** (1993), 1456].

[17] F. X. Mei, *Chinese Science Bulletin*, **41** (1996), 641 (in Chinese) [梅凤翔,科学通报,**41** (1996), 641].

[18] F. X. Mei, *Chinese Science Bulletin*, **44** (1999), 318 (in Chinese) [梅凤翔,科学通报,**44** (1999), 318].

[19] J. L. Fu, X. M. Wang, *Acta Physica Sinica*, **49** (2000), 1023 (in Chinese) [傅景礼、王新民,物理学报,**49** (2000), 1023].

[20] S. K. Luo, *Teaching Material Communcation*, (5) (1987), 31 (in Chinese) [罗绍凯,教材通讯,(5) (1987), 31].

[21] S. K. Luo, Proc. ICDVC (Peking University Press, Beijing, 1990), p. 645.

[22] S. K. Luo, *Shanghai Journal of Mechanics*, **12** (1991), 67 (in Chinese) [罗绍凯,上海力学,**12** (1991), 67].

[23] S. K. Luo, *Acta Mathematica Scientia*, **12** (ZK) (1992), 27 (in Chinese) [罗绍凯,数学物理学报,**12** (ZK) (1992), 27].

[24] S. K. Luo, *Applied Mathematics and Mechanics*, **17** (1996), 683.

BASIC THEORY OF RELATIVISTIC BIRKHOFFIAN DYNAMICS OF ROTATIONAL SYSTEM*

LUO SHAO-KAI FU JING-LI CHEN XIANG-WEI
(*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics*, *Shangqiu Teachers College*, *Shangqiu* 476000, *China*)
(Received 11 July 2000; revised manuscript received 4 August 2000)

ABSTRACT

The basic theory of relativistic Birkhoffian dynamics of rotational system is constructed, and the Birkhoffian, Birkhoff's functions, Pfaff action, Pfaff-Birkhoff principle, Pfaff-Birkhoff-D'Alembert principle and Birkhoffian equations are given. The relations among relativistic Lagrangian mechanics, Hamiltonian mechanics and relativistic Birkhoffian dynamics of rotational system are studied. It is proved that the holonomic conserved and holonomic non-conserved rotational relativistic systems can all belong to the rotational relativistic Birkhoffian system.

Keywords: rotational system, relativisty, Birkhoffian dynamics, variational principle
PACC: 0316, 0412

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19972010), and the Natural Science Foundation of Henan Province, China (Grant Nos. 984053100 and 998040080).