第 50 卷 第 3 期 2001 年 3 月
1000-3290/2001/50(03)/0390-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 50, No. 3, March, 2001

相对论性转动变质量系统的 Lie 对称性与守恒量

方建会 赵嵩卿

(石油大学应用物理系,东营 257061)

(2000 年 7 月 16 日收到;2000 年 8 月 25 日收到修改稿)

给出相对论性转动变质量系统的 d 'Alembert 原理和运动微分方程. 利用运动微分方程在无限小变换下的不变性,建立相对论性转动变质量系统的 Lie 对称确定方程,得到结构方程和守恒量. 并举例说明结果的应用.

关键词:相对论,转动,变质量,Lie 对称

PACC:0330

1 引 言

1918 年 Noether 揭示了力学系统的对称性与守恒量之间的密切联系[1]. 从此,关于对称性与守恒量的研究一直是数学、物理学、力学等领域的重要课题. 寻求系统守恒量的近代方法是 Noether 方法和 Lie 方法. 近 10 多年来,在 Noether 对称性理论和 Lie 对称性理论研究方面取得了一系列成果[2—10]. 随着科学和技术和进步,越来越多的实验现象与高速转动问题有关,而在高速转动情况下需要考虑相对论效应. 本文将 Lie 对称方法应用到高速转动的变质量系统,研究相对论性转动变质量系统的 Lie 对称性确定方程、结构方程和守恒量. 并举例说明结果的应用.

2 系统的 d 'Alembert 原理

研究 N 个质点组成的力学系统. 设 t 时刻静止质量为 m_{oi} 的质点以角速度 ω_i 绕 oz 轴转动,质点到轴的距离为 r_i. 其经典转动惯量为 $I_{oi}=r_i^2 m_{oi}$,另一静止质量为 Δm_{oi} 的微元质量以角速度 Ω_i 绕 oz 轴转动,该微元质量的经典转动惯量为 $\Delta I_{oi}=r_i^2\Delta m_{oi}$,在 t 时刻后的 Δt 时间内两者合并,则系统的相对论性基本动力学方程为[11,12]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_i\omega_i)-\frac{\dot{I}_{oi}\omega_i}{\sqrt{1-\omega_i^2/\Gamma_i^2}}=M_i+M_i'+M_i^* \quad (i=1,2,\cdots,N), \tag{1}$$

其中 $I_i=\dfrac{I_{oi}}{\sqrt{1-\omega_i^2/\Gamma_i^2}}$ 为相对论性转动惯量,$\Gamma_i=\sqrt{\dfrac{E_{oi}}{I_{oi}}}=\dfrac{c}{r_i}$(其中 $E_{oi}=m_{oi}c^2$)为极限角速度[13]. $M_i^*=\dot{I}_{oi}\left(\dfrac{\Omega_i}{\sqrt{1-\Omega_i^2/\Gamma_i^2}}-\dfrac{\omega_i}{\sqrt{1-\omega_i^2/\Gamma_i^2}}\right)$ 为相对论性反推力矩[12]. M_i 和 M_i' 分别为主动力的力矩和约束力的力矩.

在理想约束条件下,以 $\delta\theta_i$ 乘以(1)式并对 i 求和,得

$$\sum_{i=1}^{N}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_i\omega_i)+\frac{\dot{I}_{oi}\omega_i}{\sqrt{1-\omega_i^2/\Gamma_i^2}}+M_i+M_i^*\right]\delta\theta_i=0. \tag{2}$$

设系统的位形有 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 确定,则第 i 个质点的角坐标为

$$\theta_i=\theta_i(q_s,t) \quad (i=1,2,\cdots,N;\ s=1,2,\cdots,n), \tag{3}$$

于是有

$$\delta\theta_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\theta_i}{\partial q_s}\delta q_s. \tag{4}$$

将(4)式代入(2)式,得

$$\sum_{s=1}^{n}\left[-\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_i\omega_i)\frac{\partial\theta_i}{\partial q_s}+G_s+g_s\right]\delta q_s=0, \tag{5}$$

其中

$$G_s=\sum_{i=1}^{N}M_i\frac{\partial\theta_i}{\partial q_s},$$

$$g_s=\sum_{i=1}^{N}\left(M_i^*+\frac{\dot{I}_{oi}\omega_i}{\sqrt{1-\omega_i^2/\Gamma_i^2}}\right)\frac{\partial\theta_i}{\partial q_s}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\dot{I}_{oi}\Omega_i}{\sqrt{1-\Omega_i^2/\Gamma_i^2}} \frac{\partial \theta_i}{\partial q_s}.$$

在一般情况下 $m_{oi} = m_{oi}(q_s, \dot{q}_s, t)$[14]，于是 $I_{oi} = I_{oi}(q_s, \dot{q}_s, t)$. 类似于文献[15]，我们构造转动变质量系统的相对论性广义动能函数

$$T_r^* = \sum_{i=1}^{N} I_{oi}\Gamma_i^2 (1 - \sqrt{1-\omega_i^2/\Gamma_i^2}), \tag{6}$$

则有

$$\frac{\partial T_r^*}{\partial q_s} = \sum_{i=1}^{N} I_i \omega_i \frac{\partial \omega_i}{\partial q_s} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial I_{oi}}{\partial q_s}\Gamma_i^2 \left(1 - \sqrt{1-\omega_i^2/\Gamma_i^2}\right), \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r^*}{\partial \dot{q}_s} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_i\omega_i)\frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{i=1}^{N} I_i\omega_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial I_{oi}}{\partial \dot{q}_s}\Gamma_i^2\left(1 - \sqrt{1-\omega_i^2/\Gamma_i^2}\right)\right]. \tag{8}$$

容易证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \theta_i}{\partial q_i} = \frac{\partial \omega_i}{\partial q_s}, \qquad \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial \theta_i}{\partial q_s}. \tag{9}$$

(8)式减去(7)式，并注意到(9)式，得

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_i\omega_i)\frac{\partial \theta_i}{\partial q_s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r^*}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T_r^*}{\partial q_s} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial I_{oi}}{\partial q_s}\Gamma_i^2\left(1-\sqrt{1-\omega_i^2/\Gamma_i^2}\right) - \sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial I_{oi}}{\partial \dot{q}_s}\Gamma_i^2\left(1-\sqrt{1-\omega_i^2/\Gamma_i^2}\right)\right]. \tag{10}$$

将(10)式代入(5)式，得相对论性转动变质量系统 d'Alembert 原理的 Lagrange 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r^*}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial T_r^*}{\partial q_s} + G_s + G_s^*\right]\delta q_s = 0, \tag{11}$$

其中 $G_s^* = g_s - \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial I_{oi}}{\partial q_s}\Gamma_i^2\left(1-\sqrt{1-\omega_i^2/\Gamma_i^2}\right) + \sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial I_{oi}}{\partial \dot{q}_s}\Gamma_i^2\left(1-\sqrt{1-\omega_i^2/\Gamma_i^2}\right)\right].$

3　系统的运动微分方程

设系统只受到 k 个完整约束，选取 $n = 3N - k$ 个广义坐标 $q_s(s = 1,2,\cdots,n)$，则各 δq_s 彼此独立. 由(11)式可得到相对论性转动变质量系统的 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r^*}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T_r^*}{\partial q_s} = G_s + G_s^* \qquad (s = 1,2,\cdots,n). \tag{12}$$

将广义力 G_s 分为有势的 $Q_s' = -\frac{\partial V}{\partial q_s}$ 和非有势的 Q_s'' 两部分，有 $G_s = -\frac{\partial V}{\partial q_s} + G_s''$，则(12)式可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_r^*}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L_r^*}{\partial q_s} = G_s'' + G_s^* \qquad (s = 1,2,\cdots,n), \tag{13}$$

其中 $L_r^* = T_r^* - V$ 为转动变质量系统的相对论性广义 Lagrange 函数.

将方程(13)展开，可求出所有的广义加速度[9,16]，记作

$$\ddot{q}_s = h_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s = 1,2,\cdots,n). \tag{14}$$

4　系统的确定方程

取无限小单参数群变换

$$t^* = t + \Delta t, \quad q_s^* = q_s + \Delta q_s, \tag{15}$$

在一级近似下，其展开式为

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}), \quad q_s^* = q_s + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}), \tag{16}$$

其中 ε 为小参数，ξ_0，ξ_s 为无限小单参数群变换的生成元. 取无限小变换的生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{17}$$

它的一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \sum_{s=1}^{n}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{18}$$

二次扩展

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \sum_{s=1}^{n}(\ddot{\xi}_s - 2\ddot{q}_s\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\ddot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}. \tag{19}$$

根据微分方程不变性的判据，在变换(16)式下运动微分方程(14)的不变性由下式表示：

$$X^{(2)}(\ddot{q}_s - h_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})) = 0. \tag{20}$$

展开(20)式可得

$$\ddot{\xi}_s - \dot{q}_s\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0 h_s = X^{(1)}(h_s). \tag{21}$$

方程(21)就是无限小变换(16)式下生成元 ξ_0，ξ_s 应满足的微分方程，称为确定方程. 如果 ξ_0，ξ_s 满足确定方程(21)，则相应的变换就是相对论性转动变质

量完整系统的Lie对称变换.

5 系统的结构方程和守恒量

定理 对于满足确定方程(21)的无限小变换生成元 ξ_0, ξ_s，如果存在满足方程

$$X^{(1)}(L_r^*) + L_r^*\dot{\xi}_0 + \sum_{s=1}^{n}(G_s'' + G_s^*) \cdot (\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{P} = 0 \tag{22}$$

的函数 $P = P(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$，则相对论性转动变质量完整系统存在对应于 Lie 对称的守恒量

$$I = L_r^*\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\frac{\partial L_r^*}{\partial \dot{q}_s} + P = \mathrm{const}. \tag{23}$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \dot{L}_r^*\xi_0 + L_r^*\dot{\xi}_0 \\ &+ \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r^*}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \ddot{q}_s\xi_0 - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) \\ &+ \sum_{s=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_r^*}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) - X^{(1)}(L_r^*) \\ &- L_r^*\dot{\xi}_0 - \sum_{s=1}^{n}(G_s'' + G_s^*)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) \\ &= \sum_{s=1}^{n}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_r^*}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L_r^*}{\partial q_s} - G_s'' - G_s^*\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

方程(22)称为相对论性转动变质量完整系统 Lie 对称的结构方程. 由结构方程可求得 $\dot{P}$，进而可求得系统的规范函数 P 和守恒量 I.

6 算 例

设转动系统的相对论性 Lagrange 函数

$$L_r^* = K\mathrm{e}^{-\alpha t}\Gamma^2\left(1 - \sqrt{1 - (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)/\Gamma^2}\right) - V \quad (K, \alpha \text{ 为常数}), \tag{24}$$

所受非势广义力为 $G_\theta'' = \dot{\theta}, G_\varphi'' = \dot{\varphi}$，势能 V 为常数，$\Omega = 0$，研究系统的 Lie 对称与守恒量.

取 θ, φ 为广义坐标，方程(13)给出

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{\dot{\theta}}{K\mathrm{e}^{-\alpha t}}(1 - (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)/\Gamma^2)^{3/2} \\ &\quad + \alpha\dot{\theta}(1 - (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)/\Gamma^2) = h_1, \\ \ddot{\varphi} &= \frac{\dot{\varphi}}{K\mathrm{e}^{-\alpha t}}(1 - (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)/\Gamma^2)^{3/2} \\ &\quad + \alpha\dot{\varphi}(1 - (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)/\Gamma^2) = h_2.\end{aligned} \tag{25}$$

确定方程(21)给出

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}_1 - \dot{\theta}\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0 h_1 &= X^{(1)}(h_1), \\ \ddot{\xi}_2 - \dot{\varphi}\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0 h_2 &= X^{(1)}(h_2).\end{aligned} \tag{26}$$

方程(26)有如下解：

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = c_1, \quad \xi_2 = 0, \tag{27}$$

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = c_2, \tag{28}$$

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = c_1, \quad \xi_2 = c_2. \tag{29}$$

对以上生成元，由结构方程(22)可得规范函数

$$P_1 = -c_1\theta, \tag{30}$$

$$P_2 = -c_2\varphi, \tag{31}$$

$$P_3 = -(c_1\theta + c_2\varphi). \tag{32}$$

由(23)式得系统的守恒量为

$$I_1 = K\mathrm{e}^{-\alpha t}\frac{c_1\dot{\theta}}{\sqrt{1 - (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)/\Gamma^2}} - c_1\theta = \mathrm{const}, \tag{33}$$

$$I_2 = K\mathrm{e}^{-\alpha t}\frac{c_2\dot{\varphi}}{\sqrt{1 - (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)/\Gamma^2}} - c_2\varphi = \mathrm{const}, \tag{34}$$

$$I_3 = K\mathrm{e}^{-\alpha t}\frac{c_1\dot{\theta} + c_2\dot{\varphi}}{\sqrt{1 - (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)/\Gamma^2}} - (c_1\theta + c_2\varphi) = \mathrm{const}. \tag{35}$$

7 结 论

本文结果具有普遍意义，对相对论情况和经典情况，变质量系统和常质量系统都适应. 当 m_{oi} 为常量时，本文结果化为相对论性转动常质量系统的结果. 当 $\omega_i \ll \Gamma_i, \Omega_i \ll \Gamma_i$ 时，本文结果化为经典转动变质量系统的结果. 当 m_{oi} 为常量，且 $\omega_i \ll \Gamma_i, \Omega_i \ll \Gamma_i$ 时，本文结果化为经典转动常质量系统的结果.

[1] A. E. Noether, *Mathematisch-Physicalishe Klase*, **2**(1918), 235.

[2] Z. P. Li, *Acta Physica Sinica*, **30**(1981), 1659 (in Chinese) [李子平，物理学报，**30**(1981)，1659].

[3] D. Liu, *Acta Mechanics Sinica*, **21**(1989), 75 (in Chinese) [刘端,力学学报,**21**(1989),75].

[4] D. Liu, *Science in China*, **A20**(1990), 1189 (in Chinese) [刘端,中国科学,**A20**(1990),1189].

[5] F. X. Mei, *Science in China*, **A23**(1993), 709 (in Chinese) [梅凤翔,中国科学,**A23**(1993),709].

[6] Y. Y. Zhao, F. X. Mei, *Advances in Mechanics*, **23**(1993), 360 (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔,力学进展,**23**(1993),360].

[7] J. L. Fu *et al*., *J. Beijing Institute of Technology*, **7**(1998), 215.

[8] F. X. Mei, *Applied Mathematics and Mechanics*, **20**(1999), 629.

[9] F. X. Mei, Application of Lie Group and Lie Algebra to the System of Constrain Mechanics (Science Press, Beijing, 1999) (in Chinese) [梅凤翔,李群和李代数对约束力学系统的应用(科学出版社,北京,1999)].

[10] J. H. Fang, *Applied Mathematics and Mechanics*, **21**(2000), 755 (in Chinese) [方建会,应用数学和力学,**21**(2000),755].

[11] J. H. Fang, *Acta Physics Sinica*, **48**(1999), 1389 (in Chinese) [方建会,物理学报,**48**(1999),1389].

[12] J. H. Fang, *Acta Physics Sinica*, **49**(2000), 1028 (in Chinese) [方建会,物理学报,**49**(2000),1028].

[13] M. Carmeli, *Foundations of Physics*, **15**(1985), 889.

[14] F. X. Mei, D. Liu, Y. Luo, Advanced Analytical Mechanics (Beijing Institute of Technology Press, Beijing, 1993), p. 335 (in Chinese) [梅凤翔、刘　端、罗　勇,高等分析力学(北京理工大学出版社,北京,1993),第 335 页].

[15] S. K. Luo, *Applied Mathematics and Mechanics*, **19**(1998), 43 (in Chinese) [罗绍凯,应用数学和力学,**19**(1998),43].

[16] F. X. Mei, R. C. Shi, Y. F. Zhang, H. B. Wu, Dynamics of Birkhoff System (Beijing Institute of Technology Press, Beijing, 1996) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬,Birkhoff 系统动力学(北京理工大学出版社,北京,1996)].

LIE SYMMETRIES AND CONSERED QUANTITIES OF RELATIVISTIC ROTATIONAL VARIABLE MASS SYSTEM

FANG JIAN-HUI　ZHAO SONG-QING

(*Department of Applied Physics*, *University of Petroleum*, *Dongying*　257061, *China*)

(Received 16 July 2000; revised manuscript received 25 August 2000)

ABSTRACT

The d'Alembert principle and the differential equations of motion of relativistic rotational variable mass system are given. By using the invariance of the differential equations under the infinitesimal transformations, the determining equations of the Lie symmetries of relativistic rotational variable mass system are built, and the structure equation and the conserved quantities of the Lie symmetries are obtained. An example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: relativity, rotation, variable mass, Lie symmetries

PACC: 0330