第 50 卷 第 3 期 2001 年 3 月
1000-3290/2001/50(03)/0402-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50,No.3,March,2001

广义五阶 KdV 方程的孤波解与孤子解*

李志斌†

(华东师范大学计算机科学技术系,上海 200062)

潘素起

(兰州大学计算机科学系,兰州 730000)

(2000 年 3 月 10 日收到)

利用求解非线性代数方程组的吴文俊特征列方法,借助计算机代数系统获得了一类较广泛的五阶非线性演化方程的孤波解和孤子解,修正和完善了已知的结论.

关键词:五阶 KdV 方程,孤波,孤子解

PACC:0340K,0220

1 引 言

非线性代数方程组的吴文俊特征列方法是处理非线性问题的有效工具[1]. 我们曾就吴方法在数学物理方程领域的应用作过一些有益的尝试[2]. 最近文献[3]讨论了如下的一类前人曾广泛研究过的五阶非线性演化方程:

$$U_t + aUU_{xxx} + bU_xU_{xx} + cU^2U_x + U_{xxxxx} = 0, \tag{1}$$

其中 a,b,c 为非零实常数,获得了一些结果. 本文将吴方法应用于方程(1),较为系统地获得了方程(1)的准确孤波解和孤子解(包括振荡孤波),同时给出了方程(1)拥有这些解时系数所应满足的充分条件,修正和完善了前人的结论.

在文献中,当(a,b,c)为(30,60,270),(20,40,120)和(10,20,30)时,方程(1)称作(标准的)五阶 KdV 方程[4]. 它们具有以下性质:1)可以用反散射方法求解,因而有 n-孤子;2)拥有Bäcklund变换,由此可生成 n 孤子梯队;3)拥有无穷多多项式守恒率. 当(a,b,c)为(30,30,180),(5,5,5)和(−15,−15,45)时,方程(1)称作Sawada-Kotera方程[5,6],它们尽管不具有上述性质,但确实有多孤子解. 当(a,b,c)为(30,75,180)和(10,25,20)时,方程(1)称作 Kaup-Kupershmit 方程[7,8],在一个适当的Miura 变换下它可化作 Sawada-Kotera 方程.

为方便起见,称方程(1)为广义五阶 KdV 方程,因为它包含标准的五阶 KdV 方程以及其他一些有物理背景的演化方程.

2 广义五阶 KdV 方程的孤波解与孤子解

作变换 $U = u/a$,方程(1)可简化为

$$u_t + uu_{xxx} + \alpha u_xu_{xx} + \beta u^2u_x + u_{xxxxx} = 0, \tag{2}$$

其中 $\alpha = b/a, \beta = c/a^2$. 类似于文献[9]的方法,引进非线性变换

$$u(x,t) = q + p[\ln(f(x,t))]_{xx}, \qquad p \neq 0. \tag{3}$$

变换(3)式,将方程(2)化作关于未知函数 $f(x,t)$ 的齐次微分方程. 利用齐次性,寻求齐次方程如下形式的解:

$$f(x,t) = 1 + \exp(\xi + \xi_0), \quad \xi = kx - wt \tag{4}$$

和

$$f(x,t) = r + \exp(\xi + \xi_0) + \exp(2(\xi + \xi_0)), \quad \xi = kx - wt, \tag{5}$$

以及

$$f(x,t) = 1 + \exp(\xi_1 + \xi_{10}) + \exp(\xi_2 + \xi_{20})$$

* 国家重点基础研究发展规划(批准号:G1998030600)及上海市自然科学基金(批准号:ZD14012)资助的课题.

†E-amil:lizb@cs.ecnu.edu.cn

$$+ s\exp(\xi_1 + \xi_2 + \xi_{10} + \xi_{20}),$$

$$\xi_i = k_i x - w_i t, \quad i = 1,2 \tag{6}$$

等等，可将齐次方程化作关于待定参数 p,q,r,k，w 和 α,β，以及 p,q,s,k_1,k_2,w_1,w_2 和 α,β 的超定代数方程组. 在完成了微分方程代数化后，便可利用吴方法在计算机代数系统上进行计算，从而获得方程(2) 的孤波解和孤子解. 所获结论总结如下：

(A)若 α,β 满足条件

$$(\alpha + 2)^2 - 40\beta \geqslant 0, \tag{7}$$

则方程(2)有孤波解

$$u = \lambda k^2 \left\{1 - 3\mathrm{sech}^2 \frac{k}{2}\left[x + \left(\frac{3}{2} + \frac{\alpha}{2}\lambda\right)k^4 t + \xi_0\right]\right\}, \tag{8}$$

其中 λ 满足二次方程

$$2\beta\lambda^2 + (\alpha + 2)\lambda + 5 = 0, \tag{9}$$

k,ξ_0 为任意常数.

上面提到的所有方程均满足条件(7)式，因此它们有解((8)式).

(B)若 α,β 满足条件

$$\alpha - 10\beta + 1 = 0, \tag{10}$$

则方程(2)有孤波解

$$u = - 5k^2 \left\{1 - 3\mathrm{sech}^2 \frac{k}{2}\left[x + \left(\frac{3}{2} - \frac{5\alpha}{2}\right)k^4 t + \xi_0\right]\right\} \tag{11}$$

和

$$u = q + \frac{3k^2}{2\beta}\mathrm{sech}^2 \frac{k}{2}\left[x - (k^4 + qk^2 + \beta q^2)t + \xi_0\right], \tag{12}$$

其中 q,k,ξ_0 为任意常数.

五阶 KdV 方程和 Sawada-Kotera 方程满足条件(10)式.

(C)若 α,β 满足条件

$$\alpha = 5/2, \quad \beta = 1/5, \tag{13}$$

则方程(2)有孤波解

$$u = q + 30k^2 \frac{2r + \sqrt{r}\cosh\xi}{(1 + 2\sqrt{r}\cosh\xi)^2},$$

$$\xi = k\left[x - (k^4 + qk^2 + \beta q^2)t\right] + \xi_0 - \ln\sqrt{r}, \tag{14}$$

其中

$$r = \frac{1}{16}\,\frac{5k^2 + 4q}{5k^2 + q}, \tag{15}$$

q,k,ξ_0 为任意常数.

Kaup-Kupershmi 方程满足条件(13)式. (14)式是一个新解，特别取 $q = 0$，(14) 式就是文献[8]中(3) 式给出的孤波解. (注意文献[8] 中的解有一个数值错误.)

(D)若 α,β 满足条件

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3/10, \tag{16}$$

则(12)式为方程(2)的单孤子解，相应的双孤子解为

$$u = q + \frac{6}{\beta}(\ln f)_{xx},$$

$$f = 1 + \exp\xi_1 + \exp\xi_2 + s\exp(\xi_1 + \xi_2), \tag{17}$$

$$\xi_i = k_i\left[x - (k_i^4 + qk_i^2 + \beta q^2)t\right] + \xi_{i0}, \quad i = 1,2,$$

其中

$$s = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}, \tag{18}$$

$q,k_1,k_2,\xi_{10},\xi_{20}$ 为任意常数.

五阶 KdV 方程满足条件(16)式. 当 $q = 0$ 时，(12)，(17)以及(18)式正是众所周知的五阶 KdV 方程的 1-孤子和 2-孤子.

(E)若 α,β 满足条件

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1/5, \tag{19}$$

则(12)式为方程(2)的单孤子解，相应的双孤子解为(17)式，但不同于(18)式，

$$s = \frac{(k_1 - k_2)^2\left(k_1^2 - k_2k_1 + k_2^2 + \frac{3}{5}q\right)}{(k_1 + k_2)^2\left(k_1^2 + k_2k_1 + k_2^2 + \frac{3}{5}q\right)}, \tag{20}$$

$q,k_1,k_2,\xi_{10},\xi_{20}$ 为任意常数.

Sawada-Kotera 方程满足条件(19)式. 取 $q = 0$，由(12)，(17) 以及(20) 式可以导出文献[5] 中所给出的在 $\xi = \pm\infty$ 处为零的单、双孤子.

以上准确解在计算机代数系统 MAPLE 上均已得到验证. 从结论(C)，(D)和(E)可以看出方程(2)系数的变化会对解产生相当大的影响.

3　Sawada-Kotera 方程的振荡孤波

从 Sawada-Kotera 方程

$$u_t + uu_{xxx} + u_x u_{xx} + \frac{1}{5}u^2 u_x + u_{5x} = 0 \tag{21}$$

的双孤子解(17)和(20)式出发，可以构造其振荡孤波解. 事实上，若将 k_1 和 k_2 取作共轭复数，使得 $k_1 = k_2^* = \gamma + \mathrm{i}\delta$，则 $w_1 = k_1^5 + qk_1^2 + q^2k_1/5$ 和 $w_2 = k_1^5 + qk_1^2 + q^2k_1/5$ 也可写作复共轭 $w_1 = w_2^* = \lambda + \mathrm{i}\mu$. 定义

$$\xi_1 = \xi_2^* = \phi + \mathrm{i}\psi,$$

$$\phi = \gamma x - \lambda t + \phi_0, \quad \psi = \delta x - \mu t + \psi_0, \tag{22}$$

其中 ϕ_0 和 ψ_0 分别为 ξ_{10} 及其共轭复数 ξ_{20} 的实部和虚部.

在这些定义下,由(17)和(20)式,可导出

$$u = q + 30\frac{\sqrt{s}\,(\gamma^2-\delta^2)\cos\psi\cosh\phi' + 2\sqrt{s}\gamma\delta\sin\psi\sinh\phi' + (s\gamma^2-\delta^2)}{(\cos\psi + \sqrt{s}\cosh\phi')^2}, \tag{23}$$

其中 $\phi' = \phi + \ln\sqrt{s}$,容易看出 s 变为

$$s = \frac{\delta^2\left(3\delta^2 - \gamma^2 - \frac{3}{5}q\right)}{\gamma^2\left(3\gamma^2 - \delta^2 + \frac{3}{5}q\right)}. \tag{24}$$

若 $s < 1$,则(23)式对不同的 x,t 有奇异点,为在(23)式中获得振荡孤波,必须有 $s > 1$,即参数 γ,δ 以及 q 应满足条件

$$5\left(\frac{1}{3}\delta^2 - \gamma^2\right) < q < 5(\delta^2 - \gamma^2). \tag{25}$$

这样就有结论:对满足(25)式的任意实数 γ,δ 和 q,Sawada-Kotera 方程(21)有形为(23)式的振荡孤波解,其中 ϕ,ψ 和 s 分别由(22)和(24)式给出,

$$\lambda = \gamma^5 - 10\gamma^3\delta^2 + 5\gamma\delta^4 + q\gamma^3 - 3q\gamma\delta^2 + \frac{1}{5}q^2\gamma,$$

$$\mu = \delta^5 - 10\gamma^2\delta^3 + 5\gamma^4\delta - q\delta^3 + 3q\gamma^2\delta + \frac{1}{5}q^2\delta. \tag{26}$$

特别取 $q = 0$,(23)式就是文献[6]中(5.3a)式所给出的解,在这种情况下(25)式可表述为

$$-1 < \frac{\gamma}{\delta} < -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{\gamma}{\delta} < 1. \tag{27}$$

(注意文献[6]中的(5.5a)式有一个错误,因此(5.6b)式也不正确.)

同样的做法对五阶 KdV 方程行不通,因此五阶 KdV 方程不可能有这种形式的振荡孤波解.

[1] H. Shi, Introduction to Mathematics-Mechanization (Hunan Education Press, Changsha, 1998) (in Chinese) [石 赫,数学机械化引论(湖南教育出版社,长沙,1998)].

[2] Z. B. Li *et al.*, *Acta Mathematica Scientia*, **17** (1997), 81 (in Chinese) [李志斌等,数学物理学报,**17** (1997), 81].

[3] B. Z. Xu *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **47** (1998), 1946 (in Chinese) [徐炳振等,物理学报,**47** (1998), 1946].

[4] P. D. Lax, *Commun. Pure Appl. Math.*, **21** (1968), 467.

[5] K. Sawada, T. Kortera, *Prog. Theor. Phys.*, **51** (1974), 1355.

[6] P. J. Caudrey, R. K. Dodd, J. D. Gibbon, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A351** (1976), 407.

[7] D. J. Kaup, *Stud. Appl. Math.*, **62** (1980), 189.

[8] R. Cont, M. Musette, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **25** (1992), 5609.

[9] Z. B. Li, M. L. Wang, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **26** (1993), 6027.

EXACT SOLITARY WAVE AND SOLITON SOLUTIONS OF THE GENERALIZED FIFTH ORDER KdV EQUATION*

LI ZHI-BIN
(*Department of Computer Science*, *East China Normal University*, *Shanghai* 200062, *China*)
PAN SU-QI
(*Department of Computer Science*, *Lanzhou University*, *Lanzhou* 730000, *China*)
(Received 10 March 2000)

ABSTRACT

With the aid of Wu Wen-jun characteristic-set method in nonlinear algebraic equations-solving, and using the symbolic manipulation system, the exact solitary wave and soliton solutions to a class of fifth-order nonlinear evolution equation with general coefficients are obtained, which modifies and perfects the known results.

Keywords: fifth order KdV equation, solitary wave, solitary soliton
PACC: 0340K, 0220

* Project supported by the State Key Program of Basic Research of China (Grant No. G1998030600), and the Natural Science Foundation of Shanghai, China (Grant No. ZD14012).