第 50 卷 第 3 期 2001 年 3 月
1000-3290/2001/50(03)/0406-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 50, No. 3, March, 2001


# 第一类 Pöschl-Teller 势的非线性代数结构*

倪致祥

(阜阳师范学院物理系,阜阳 236032;徐州师范大学物理系,徐州 221009)

(2000 年 6 月 15 日收到;2000 年 8 月 24 日收到修改稿)

在形变李代数理论的基础上,利用哈密顿算符和自然算符,构造出第一类 Pöschl-Teller 势的非线性谱生成代数. 该非线性代数能够完全确定势场的能量本征态集合和本征值谱,在适当的非线性算符变换下可以化为谐振子代数,显示了该系统具有新的对称性.

关键词:Pöschl-Teller 势, 自然算符, 非线性谱生成代数

PACC:0365, 0210

## 1 引 言

对称性的研究在现代物理学中具有极其重要的意义. 对称性不仅能够帮助人们求得物理问题的解,也可以帮助人们去寻求新的运动规律[1,2]. 作为研究连续对称性的重要工具,李群(或相应的线性李代数)越来越受到物理学工作者的重视.

然而,没有任何理由认为连续对称性的研究工具只能局限于线性李代数[3]. 近年来,以 $q$ 形变李代数(量子群)为特例的一般非线性李代数引起了人们的广泛兴趣[4—7]. 非线性李代数可以看成线性李代数的某种形变或扩展,它们很可能与量子理论中尚未被认识到的某些深层对称性有关,例如非线性有限 W-对称性[8]. 在典型的量子势场中应用非线性李代数方法可能有助于揭示系统的某些潜在对称性[9—13]. 最近我们发现,从第一类 Pöschl-Teller 势场(下面简称 Pöschl-Teller 势)中运动粒子的自然变量出发,可以很自然地得到一个非线性李代数结构. 利用推广的 Cartan 分解将该李代数化为正则形式后,与零根对应的基算符为哈密顿算符,与非零根对应的基算符为能量阶梯算符. 该代数完全确定了势场的能量本征态集合和本征值谱的通项公式,可以看成是 Pöschl-Teller 势场的非线性谱生成代数. 通过适当的非线性算符变换,该非线性谱生成代数可以化为谐振子代数,显示了该系统所具有的新的对称性.

## 2 Pöschl-Teller 势的自然算符及其所生成的代数

作为物理学中的一个重要模型,Pöschl-Teller 势在原子、分子物理学和核物理学等领域有广泛的应用[14]. 它是量子力学中少数几个严格可解势之一,其具体形式可表示为

$$V(x) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\left[\frac{\mu(\mu-1)}{\sin^2(kx)} + \frac{\nu(\nu-1)}{\cos^2(kx)}\right],$$
$$\mu,\nu > 1, \quad x \in \left(0,\frac{\pi}{2k}\right). \tag{1}$$

由上式容易推出该势场在 $\tan kx = [\mu(\mu-1)/\nu(\nu-1)]^{1/4}$ 处具有唯一极小值 $V_{\min} = [\sqrt{\mu(\mu-1)} + \sqrt{\nu(\nu-1)}]^2\varepsilon$, 其中 $\varepsilon = \hbar^2k^2/2(m)$ 可看作 Pöschl-Teller 势的特征能量.

按 Nieto 和 Simmons 的观点[15],一维势场中运动的粒子存在两个自然的经典运动变量,自然坐标 $X_c = X_c(x)$ 和自然动量 $P_c = m\dot{X}_c = X_c' \cdot p$,它们满足的运动方程与经典谐振子的普通坐标 $x$ 和普通动量 $p$ 的形式相同,即

$$X_c = A\sin\omega_c t,$$
$$P_c = m\omega_c A\cos\omega_c t, \tag{2}$$

其中 $\omega_c$ 可称为自然运动的角频率,$A$ 为自然运动的振幅. 与经典谐振子不同的是,在一般情况下,$\omega_c$ 和 $A$ 都可能是粒子能量的函数. 利用(2)式和 Pöschl-Teller 势场中粒子的普通变量 $x, p$ 所满足的哈密顿

* 安徽省自然科学基金(批准号:99047217)和安徽省教育委员会自然科学基金(批准号:99JL0160)资助的课题.

方程，不难得到该势场中自然坐标与普通坐标之间所满足的关系式

$$X_c' = \frac{\mathrm{d}X_c}{\mathrm{d}x} = \frac{P_c}{p} = \omega_c\sqrt{\frac{m(A^2 - X_c^2)}{2(E - V(x))}}, \quad (3)$$

其中 $E = p^2/(2m) + V(x)$ 为粒子能量．定义 $a = [\mu(\mu-1) + \nu(\nu-1)]\varepsilon$，$b = [\mu(\mu-1) - \nu(\nu-1)]\varepsilon$，则(3) 式可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}X_c}{\sqrt{A^2 - X_c^2}} = \omega_c\sqrt{\frac{m/2}{E - 2a\csc^2(2kx) - 2b\cos(2kx)\csc^2(2kx)}}\mathrm{d}x$$

$$= \omega_c\sqrt{\frac{m}{8k^2E}}\frac{\mathrm{d}\cos(2kx)}{\sqrt{1 - 2a/E + b^2/E^2 - (\cos 2kx + b/E)^2}}.$$

在推导中已选取 $\sqrt{\sin^2(2kx)} = -\sin(2kx)$．为了简单起见，取自然振幅 $A = \frac{1}{2k}\sqrt{1 - 2a/E + b^2/E^2}$，将上式与(3) 式比较，可以推出该势场中的自然频率为 $\omega_c = \sqrt{8k^2E/m}$，而自然变量为

$$X_c = \frac{1}{2k}[\cos(2kx) + b/E],$$

$$P_c = -\sin(2kx)\cdot p. \quad (4)$$

由(2)式可以看出，自然变量 $X_c$，$P_c$ 与能量$E$ 之间的关系为

$$m^2\omega_c^2X_c^2 + P_c^2 = m^2\omega_c^2A^2. \quad (5)$$

在 Pöschl-Teller 势场情况下，上式成为

$$8mEk^2X_c^2 + P_c^2 = 2m(E - 2a + b^2/E), \quad (6)$$

这可以看成自然变量所满足的约束条件．

应用 Wey1 规则[16]对自然变量的表达式(4)进行量子化，得到对应的自然坐标算符 $X$ 和自然动量算符$P$，它们的表达式为

$$X = \frac{1}{2k}[\cos(2kx) + b/H],$$

$$P = -\frac{1}{2}\{\sin 2kx, p\} = \mathrm{i}\hbar\sin 2kx\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \mathrm{i}\hbar k\cos 2kx. \quad (7)$$

由上式可进一步推出量子化的约束条件为

$$2m(2kX - b/H)^2(H - 9\varepsilon) + 4m\left(b + \frac{2\varepsilon}{\mathrm{i}\hbar k}P\right)(2kX - b/H) + P^2 = 2m(H - 2a - 6\varepsilon), \quad (8)$$

其中

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x) \quad (9)$$

为 Pöschl-Teller 势场的哈密顿算符．

由(7)和(9)式，不难得到如下的对易关系：

$$[H, X] = -(\mathrm{i}\hbar/m)P,$$

$$[H, P] = 8\mathrm{i}\hbar k^2X(H - \varepsilon) + 8\varepsilon P + 4\mathrm{i}\hbar k\varepsilon b/H,$$

$$[X, P] = \mathrm{i}\hbar\left[1 - (kX - b/H)^2 + \frac{\mathrm{i}b}{4\hbar k}\left(\frac{1}{H}P - P\frac{1}{H}\right)\right], \quad (10)$$

其中等号左边为对易式，右边出现了二次项和分式，这表明 Pöschl-Teller 势场存在一个自然的非线性李代数结构，它由自然算符 $X$，$P$ 和哈密顿算符$H$ 共同生成．如果(10) 式等号右边是线性的，它就成为线性的单李代数 $A_1$，因此从数学的角度看，本文得到的非线性李代数可以看成是单李代数 $A_1$ 的非线性扩张，或者是非线性 $A_1$ 李代数．

## 3　非线性李代数的正则形式

单李代数的基本性质可由其正则形式充分反映，而其正则形式可以通过 Cartan 分解得到．为了便于研究上节得到的非线性李代数的性质，应设法对它进行 Cartan 分解，把它化为正则形式[17]．由于上述李代数是非线性的，已经不能采用线性李代数的 Cartan 分解方法，然而如果把该李代数看成是建立在一个由哈密顿算符 $H$ 生成的算子域 $F$ 上，则(10) 式前两个对易式对自然算符 $X$ 和 $P$ 都是线性的，从数学的角度看，可以把线性李代数 的 Cartan 分解方法推广到 $F$ 域．由于算子域 $F$ 由哈密顿算符 $H$ 生成，显然 $H$ 应当取为 Cartan 子代数的基，与零根相对应．另外两个与非零根对应的基算符可由本征方程

$$ad(H)L = [H, L] = L\lambda \quad (11)$$

得到．与经典 Cartan 分解不同的是，在这里根 $\lambda$ 不再是一个实数或复数，而是一个算子域 $F$ 上的算符．基算符 $L$ 可以由自然算符$X$，$P$ 和恒等算符$I$ 线性组合而成，即

$$L = X\cdot C_1 + P\cdot C_2 + I\cdot C_3, \quad (12)$$

其中组合系数 $C_1$,$C_2$ 和 $C_3$ 都应在 $F$ 域上,即都应为 $H$ 的函数.

将(12)式代入(11)式,可以得到一个 $F$ 域上的线性方程组

$$\begin{bmatrix} 0 & 8\mathrm{i}\hbar k^2(H-\varepsilon) & 0 \\ -\mathrm{i}\hbar/m & 8\varepsilon & 0 \\ 0 & 4\mathrm{i}\hbar k\varepsilon b/H & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

推导中已考虑到根 $\lambda$ 与系数 $C_i$ 都在 $F$ 域上,可以相互对易这一性质. 上述方程组的非零解条件为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 8\mathrm{i}\hbar k^2(H-\varepsilon) & 0 \\ -\mathrm{i}\hbar/m & 8\varepsilon-\lambda & 0 \\ 0 & 4\mathrm{i}\hbar k\varepsilon b/H & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

解此久期方程,即可得到三个本征值,分别为

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_\pm = 4\varepsilon \pm 4\sqrt{\varepsilon H}. \tag{15}$$

上述本征值组成了非线性李代数(10)式的根系.

设与非零根 $\lambda_\pm$ 对应的基分别为 $L_\pm$,则有

$$[H, L_\pm] = 4L_\pm\left(\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon H}\right). \tag{16}$$

上式可以化为

$$HL_\pm = L_\pm\left(H + 4\varepsilon \pm 4\sqrt{\varepsilon H}\right). \tag{17}$$

由此可以推出

$$f(H)L_\pm = L_\pm f\left(H + 4\varepsilon \pm 4\sqrt{\varepsilon H}\right), \tag{18}$$

其中 $f(z)$ 为一个在原点解析的任意函数. 作为特例,有

$$\left(H + 4\varepsilon + 4\sqrt{\varepsilon H}\right)L_- = L_- H. \tag{19}$$

对上式等号两边取厄米共轭,立即得到

$$H(L_-)^+ = (L_-)^+\left(H + 4\varepsilon + 4\sqrt{\varepsilon H}\right), \tag{20}$$

推导中已经利用了 $H$ 为厄米算符,即 $H^+ = H$ 这一性质. (20)式等价于

$$[H, (L_-)^+] = (L_-)^+\lambda_+. \tag{21}$$

这表明 $(L_-)^+$ 也是对应于本征值 $\lambda_+$ 的本征矢,它与 $L_+$ 至多只差一个 $F$ 域上的右系数. 不失一般性,下面取 $L_+ = (L_-)^+$.

由(13)式不难解出系数 $C_1$,$C_2$ 和 $C_3$,代入(12)式,即可得到本征矢(基算符)$L_-$ 的具体形式为

$$L_- = \left[-\frac{1}{2}kX\lambda_+/\varepsilon + P/(\mathrm{i}\hbar k) + 4\varepsilon b/(\lambda_- H)\right]D, \tag{22}$$

其中可调参量 $D$ 为域 $F$ 上的任意非零元素. 为了使 $L_-$ 的表达式较简明且保持无量纲,取 $D = \lambda_-/(8\varepsilon)$,此时上式成为

$$L_- = kX(H/\varepsilon - 1) + \frac{1}{2}P\left(1 - \sqrt{H/\varepsilon}\right)/(\mathrm{i}\hbar k) + \frac{1}{2}b/H. \tag{23}$$

利用(16)—(19)式,容易验证

$$[H, L_+L_-] = 0. \tag{24}$$

这表明 $L_+L_-$ 只能是 $F$ 域上的一个元素,即

$$L_+L_- = h(H). \tag{25}$$

函数 $h(x)$ 的具体形式可以按下面的方法确定:设 $|E\rangle$ 为哈密顿算符 $H$ 的本征态,显然有关系式 $h(E) = \langle E|h(H)|E\rangle = \langle E|L_+L_-|E\rangle$. 由表达式(23)可求出

$$h(E) = \frac{y}{4(y-2)}\left[(y^2 + 2y - 2a/\varepsilon)(y+1)^2 + b^2/\varepsilon^2\right]. \tag{26}$$

为了方便,在上式等号右边引入了一个新的无量纲参数 $y = \sqrt{E/\varepsilon}$,推导中用到了量子化的约束条件(8)式、对易式(10)和关系 $L_+ = (L_-)^+$.

由(19)和(25)式可以得到

$$L_-L_+ = h\left(H + 4\varepsilon + 4\sqrt{\varepsilon H}\right). \tag{27}$$

(25)和(27)式确定了 $L_-$ 与 $L_+$ 的对易关系为

$$[L_-, L_+] = h\left(H + 4\varepsilon + 4\sqrt{\varepsilon H}\right) - h(H). \tag{28}$$

在上面得到的结果中,(16)和(28)式构成了标准基下 Pöschl-Teller 势非线性李代数的正则形式. 与文献[18]中的结果相比较,上节中得到的是一个非线性 $su(2)$ 李代数,其 Casimir 算符为

$$C = L_-L_+ - h\left(H + 4\varepsilon + 4\sqrt{\varepsilon H}\right) = 0. \tag{29}$$

## 4 非线性李代数的意义和应用

上节已经得到了 Pöschl-Teller 势的非线性李代数的正则形式,为了考察其物理意义,下面研究它与该势场中粒子的能量本征值和本征态之间的关系. 设该势场中束缚态能量本征值为 $E_n$,对应的本征态为 $|n\rangle$,$n = 0,1,2\cdots$. 为了方便,假定 $0 < E_0 < E_1 < E_2 < \cdots$,由(17)式容易推出

$$HL_\pm|n\rangle = \left(\sqrt{E_n} \pm 2\sqrt{\varepsilon}\right)^2 L_\pm|n\rangle. \tag{30}$$

这表明基算符 $L_\pm$ 分别为能量的上升和下降算符. 一般情况下,只要 $L_\pm|n\rangle$ 不是零矢量,就是哈密顿算符的本征态,即

$$L_\pm|n\rangle = C_\pm(n)|n \pm 1\rangle. \tag{31}$$

对(31)式等号两边同时取模,即可求出比例系数

$$|C_-(n)|^2 = h(E_n),$$

$$|C_+(n)|^2 = h\left(\left(\sqrt{E_n} + 2\sqrt{\varepsilon}\right)^2\right). \tag{32}$$

由(30)式不难看出

$$E_{n\pm1} = E_n + 4\varepsilon \pm 4\sqrt{\varepsilon E_n}. \tag{33}$$

上式给出了能量本征值谱的递推公式,由此可推出能级的通项公式为

$$E_n = E_0 + 4n\sqrt{\varepsilon E_0} + 4\varepsilon n^2. \tag{34}$$

当 $n = 0$ 时,$|0\rangle$ 为基态,故应有 $L_-|0\rangle = 0$,即

$$\langle 0|L_+L_-|0\rangle = h(E_0) = h(y_0^2\varepsilon) = 0. \tag{35}$$

借助(26)式,不难求出方程(35)有 5 个根,它们分别为

$$y_0 = 0,\quad \mu+\nu,\quad \mu+\nu-2,$$
$$\mu-\nu+1,\quad -\mu+\nu-1,$$

只有其中的正根 $y_0 = \mu+\nu$ 满足物理要求 $E_0 \geqslant V_{\min}$. 由此得到基态能量为

$$E_0 = \varepsilon y_0^2 = \varepsilon(\mu+\nu)^2. \tag{36}$$

将(36)式代入(34)式,得到能谱公式为

$$E_n = \varepsilon(\mu+\nu+2n)^2. \tag{37}$$

由(26),(31),(32)和(37)式,可推出

$$L_-|n\rangle = \sqrt{\frac{n(2n+2\mu-1)(2n+2\nu-1)(n+\mu+\nu-1)(2n+\mu+\nu)}{2n+\mu+\nu-2}}\,|n-1\rangle,$$

$$L_+|n\rangle = \sqrt{\frac{(n+1)(2n+2\mu+1)(2n+2\nu+1)(n+\mu+\nu)(2n+\mu+\nu+2)}{2n+\mu+\nu}}\,|n+1\rangle. \tag{38}$$

由递推公式(38)可以得到本征态的通项公式为

$$|n\rangle = \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{\mu+\nu}{n!(\mu+\nu)_n\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_n\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_n(\mu+\nu+2n)}}\,(L_+)^n|0\rangle, \tag{39}$$

其中符号 $(x)_n = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$,而基态 $|0\rangle$ 满足方程

$$L_-|0\rangle = 0. \tag{40}$$

由上式容易推出坐标表象中的基态波函数为

$$\psi_0(x) = \langle x|0\rangle = \sqrt{\frac{2k\Gamma(\mu+\nu+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}}\sin^\mu(kx)\cos^\nu(kx), \tag{41}$$

与其他方法得到的结果完全一致[19].

上面的推导充分说明了由自然算符和哈密顿算符所生成的非线性李代数(10)式是对应势场的一个谱生成代数,其正则形式中与零根对应的基为哈密顿算符,与非零根对应的基为能量阶梯算符,它们都有明显的重要物理意义.

## 5　讨论与结论

为了讨论本文所得到的非线性李代数与物理学工作者熟悉的线性李代数的关系,对前者的正则形式进行如下的非线性变换:

$$L_0 = \frac{1}{2}\sqrt{H/\varepsilon}, \tag{42}$$

在此变换下,(16)和(28)式成为

$$[L_0, L_\pm] = \pm L_\pm,$$
$$[L_-, L_+] = f(L_0+1) - f(L_0). \tag{43}$$

上面第二式中出现的新函数的定义为 $f(y) = h(4y^2\varepsilon)$,由定义容易证明 $f(L_0) = h(H)$,$f(L_0+1) = h\left(H + 4\sqrt{\varepsilon H} + 4\varepsilon\right)$,不难看出(43)式为非线性振子代数的标准形式[6].

为了进一步简化所得结果,定义一组新的基算符

$$J_0 = L_0,\quad J_- = L_-\sqrt{\frac{L_0}{f(L_0)}},\quad (J_+ = (J_-)^+, \tag{44}$$

则(43)式可以用新的基算符表示为

$$[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm,$$
$$[J_-, L_+] = 1. \tag{45}$$

上式恰好是标准形式的谐振子代数. Pöschl-Teller 势的非线性谱生成代数与谐振子代数的相互变换性表明了量子系统可能隐含着一种尚未为人们所熟悉的更深层次的对称性.

总之,本文由 Pöschl-Teller 势的哈密顿算符和自然算符生成了该势场的一个非线性谱生成代数. 通过推广的 Cartan 分解,可以把它化为正则形式. 在该代数的正则形式中与零根对应的基为哈密顿算符,与正负根对应的基分别为能量的上升、下降算符. 非线性谱生成代数给出了一种全新的描述与处理量子系统的方案,在它的基础上很容易得出该势场中粒子的能量本征值和本征态等重要信息. 它与

谐振子代数之间的变换关系揭示了量子系统中新的对称性的存在，这种新的对称性与量子力学中的超过称性也许有某种潜在的联系[20].


[1] B. G. Wybourne, Classical Groups for Physicists (John Wiley, New York, 1974) p. 207.

[2] Q. Z. Han, H. Z. Sun, Group Theory (Peking University Press, Beijing, 1987), p. 225 (in Chinese) [韩其智、孙洪洲，群论(北京大学出版社，北京，1987)，第 225 页].

[3] J. Beckers, Y. Brihaye, N. Debergh, *J. Phys.*, **A32** (1999), 2791.

[4] M. Rocek, *Phys. Lett.*, **B255** (1991), 554.

[5] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, P. Kolokotronis, *J. Phys.*, **A26** (1993), L871.

[6] F. Pan, *J. Math. Phys.*, **35** (1994), 5065.

[7] A. Jannussis, A. Leodaris, R. Mignani, *Phys. Lett.*, **A197** (1995), 187.

[8] J. De Boer, F. Harmsze, T. Tjin, *Phys. Rep.*, **272** (1996), 139.

[9] C. Bonatsos, C. Daskaloyannis, *Chem. Phys. Lett.*, **203** (1993), 105.

[10] Z. X. Ni, *Phys. Lett.*, **A235** (1997), 313.

[11] J. L. Chen, Y. Liu, M. L. Ge, *J. Phys.*, **A31** (1998), 6473.

[12] C. Quesne, *J. Phys.*, **A32** (1999), 6705.

[13] Z. X. Ni, *Acta Physica Sinica* (*Overseas Edition*), **8** (1999), 8.

[14] G. Pöschl, E. Teller, *Z. Phys.*, **83** (1933), 143.

[15] M. M. Nieto, L. M. Simmons, Jr., *Phys. Rev.*, **D20** (1979), 1332.

[16] T. D. Lee, Particle Physics and Introduction to Field Theory (Harwood, London, 1981), p. 474.

[17] Z. X. Ni, *High Energy Physics and Nuclear Physics*, **23** (1999), 289 (in Chinese) [倪致祥，高能物理与核物理，**23** (1999), 289].

[18] C. Delbecq, C. Quesne, *J. Phys.*, **A26** (1993), L127.

[19] O. L. de Lange, R. E. Raab, Operator Methods in Quantum Mechanics (Clarendon Press, Oxford, 1991), p. 71.

[20] T. Ma, Z. X. Ni, *Acta Physics Sinica*, **48** (1999), 987 (in Chinese) [马 涛、倪致祥，物理学报，**48** (1999), 987].


# LINEAR ALGEBRAIC CONSTRUCTION FOR FIRST PÖSCHL-TELLER POTENTI


NI ZHI-XIANG

(*Department of Physics, Fuyang Teachers College, Fuyang* 236032, *China*;

*Department of Physics, Xuzhou Normal University, Xuzhou* 221009, *China*)


(Received 15 June 2000; revised manuscript received 24 August 2000)


ABSTRACT

Based on the theory of deformed Lie algebra, we construct a nonlinear spectrum-generating algebra for the first Pöschl-Teller potential by use of the Hamiltonian and the natural operators. This nonlinear algebra can determine the energy spectrum and the complete set of eigenfunctions, and can be converted into the harmonic oscillator algebra through a nonlinear transformation, which shows there is a new symmetry in the system.



**Keywords**: Pöschl-Teller potential, natural operators, nonlinear spectrum-generating algebra

**PACC**: 0365, 0210

* Project supported by the Natural Science Foundation of Anhui Province, China (Grant No. 99047217), and the Natural Science Foundation of Education Commission of Anhui Province, China (Grant No. 99JL0160).