第 50 卷 第 3 期 2001 年 3 月
1000-3290/2001/50(03)/0411-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 50, No. 3, March, 2001

爱因斯坦引力场 Arnowitt-Deser-Misner 约束方程的两种推导方法*

李久利 吴亚波†
(辽宁师范大学物理系,大连 116029)
(2000 年 7 月 2 日收到)

给出两种不同方法,分别导出爱因斯坦引力理论中著名的 Arnowitt-Deser-Misner(ADM)约束方程.其一是在具有洛伦兹号差的时空中,构造一个单参数引力场作用量,由此导出单参数 ADM 约束方程.该参数取某特定值时对应的就是熟知的 ADM 约束方程.其二是将二重复函数理论运用于爱因斯坦引力场的哈密顿形式表述中,得到引力场 ADM 约束的二重化形式,从而也能将通常的 ADM 约束作为其特殊情况包含其中.此外,这两种方法还能统一地表述具有不同时空号差(洛伦兹号差和欧几里得号差)的洛伦兹引力理论和欧几里得引力理论.

关键词:Arnowitt-Deser-Misner 约束方程,哈密顿表述,时空号差,引力场作用量
PACC:0420,0240

1 引 言

众所周知,爱因斯坦广义相对论是最简洁优美的理论之一,而场方程则是广义相对论的一个重要内容[1,2].广义相对论的发展,在很大程度上取决于引力场方程的严格解和它们的物理解释.因此,爱因斯坦场方程的表述始终是人们关注的热点.

然而,爱因斯坦场方程在哈密顿形式表述下,化为如下形式[3]:

$$-\sqrt{q}\,{}^{(3)}R+\frac{1}{\sqrt{q}}\left(\tilde{p}^{ab}\tilde{p}_{ab}-\frac{1}{2}\tilde{p}^{2}\right)=0,$$
$$D_b\tilde{p}^{ab}=0 \tag{1}$$

和

$$\dot{q}_{ab}=\frac{2N}{\sqrt{q}}\left(\tilde{p}_{ab}-\frac{1}{2}q_{ab}\tilde{p}+2D_{(a}N_{b)}\right),$$
$$\begin{aligned}\dot{\tilde{p}}^{ab}=-\frac{\delta H_G}{\delta q_{ab}}&=\sqrt{q}N\left({}^{(3)}R^{ab}+\frac{1}{2}q^{ab}\,{}^{(3)}R\right)\\&+\frac{N}{2\sqrt{q}}q^{ab}\left(\tilde{p}_{cd}\tilde{p}^{cd}-\frac{1}{2}\tilde{p}^{2}\right)\\&-\frac{2N}{\sqrt{q}}\left(\tilde{p}^{ac}\tilde{p}_{c}^{b}-\frac{1}{2}\tilde{p}\tilde{p}^{ab}\right)+\sqrt{q}\,(D^aD^bN\\&-q^{ab}D^cD_cN)+D_c(N^c\tilde{p}^{ab})-2\tilde{p}^{c}({}^{a}D_cN^{b}),\end{aligned} \tag{2}$$

其中方程(1)就是以三维度规 q_{ab} 及其共轭动量 $\tilde{p}^{ab}$ 为场变量的著名的 Arnowitt-Deser-Misner(ADM)约束方程[4],而方程(2)则是反映动力学变量随时间变化的演化方程.

关于 ADM 约束方程的研究,已取得了很多成果.在此研究领域中的若干成果中,Barbero[5] 在具有欧几里得(Euclidean)号差的时空(即度规号差为欧几里得号差(+1,+1,+1,+1))中,构造了一个依赖于两个实参数的引力场作用量,在哈密顿表述下,给出含有两个参数的引力场约束方程,并且通过调整两个参数的取值,得到了著名的 ADM 约束[4].于是提出如下问题:能否建立一个新的引力理论,即构造出一个新的引力场作用量,它只含有一个参数,当该参数取某特定值时对应的约束方程恰是 ADM 约束?本文对此问题给出了肯定的回答.

我们发现,如果在具有洛伦兹号差的时空(即度规号差为洛伦兹号差(−1,+1,+1,+1))中,构造一个新的单参数引力场作用量,不仅能通过调整参数值导出熟知的 ADM 约束方程,还能利用该参数控制时空号差,与 Barbero 的方法[5]相比,该方法不仅引入的参数少,而且形式简洁.

另一方面,二重复函数理论[6]已经广泛地应用于物理学的各个领域,并已经取得若干成果[7,8].本

* 国家自然科学基金(批准号:19475005)及辽宁省教育厅高等学校科研基金(批准号:20041012)资助的课题.
†E-mail:wyb@mail.dlptt.ln.cn

文将它运用于爱因斯坦引力场中,将四维时空二重化,从而得到 ADM 约束的二重化形式,并能将欧几里得引力理论和洛伦兹引力理论统一起来.

为了讨论方便,这里简要介绍二重复函数理论(详细内容参阅文献[6]).

设 J 为二重纯虚单位,$J=\mathrm{i}$ 为普通(椭圆)复数单位,满足 $\mathrm{i}^2=-1$;$J=\epsilon$ 为双曲复数单位,满足 $\epsilon^2=1$,且 $\epsilon\neq1$. $Z_{(J)}=a_{(J)}+Jb_{(J)}$ 则被称为二重复数,其中 $a_{(J)}$ 和 $b_{(J)}$ 都是二重实数. 当 $J=\mathrm{i}$ 时,$Z_{(J=C)}=Z_C=a_C+\mathrm{i}b_C$ 为复数(或称椭圆复数);$J=\epsilon$ 时,$Z_{(J=\epsilon)}=Z_H=a_H+\epsilon b_H$ 为双曲复数. 与普通复数不同,所有的双曲复数 $a_H+\epsilon b_H$(a_H,b_H 为实数)只构成一个交换环,而不是域.

2 单参数 ADM 约束方程

为了用一种新的方法导出爱因斯坦引力场的 ADM 约束方程,这里首先构造一个单参数引力场作用量,形式如下:

$$S[g_{ab};\alpha]=\int_M \mathrm{d}^4x\sqrt{g}\,[2\alpha^2G^{ab}+(1-\alpha^2)R^{ab}]\,\eta_a\eta_b,\tag{3}$$

其中 α 为引入的一个参数,G^{ab} 为爱因斯坦张量 $\left(G^{ab}=R^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}R\right)$,$R^{ab}$ 为黎曼曲率张量($R^{ab}=R^{acb}_{c}$),$\eta_a=\frac{\partial_a\Phi}{(g^{bc}\partial_b\Phi\partial_c\Phi)^{1/2}}$,而 Φ 为一个固定的标量函数,它是 R 方向单调递增的,可以解释为外时间变量[5].

其次,按照哈密顿表述的通常步骤[9],需对作用量(3)式进行 3+1 分解. 设四维时空流形为 $M=\Sigma\times R$,并且存在一个时间函数,使得 $t=$ 常数的超曲面 Σ_t 同构于 Σ. 引入一个指向将来的向量场 t^a,使其满足 $t^a(dt)_a=1$. 在流形上,引入的是具有洛伦兹号差(-1,$+1$,$+1$,$+1$)的度规张量 g_{ab},并且定义单位协变正交变量 n_a 为

$$n_a=\frac{\partial_a t}{(g^{bc}\partial_b t\partial_c t)^{1/2}},$$

且满足

$$n^a=g^{ab}n_b,\quad n^an_a=-1.\tag{4}$$

至此可以定义三维度规 q_{ab},时间流逝函数 N 及转移矢量 N^a 如下:

$$q_{ab}:=q_a^mq_b^ng_{mn}=g_{ab}+n_an_b\qquad(q_a^b=\delta_a^b+n_an^b),$$
$$N:=-n^at^bg_{ab},\quad N^a:=q_b^at^b,\tag{5}$$

其中 q_b^a 为一个 $t=$ 常数超曲面上的投影算符. 通过这些量可以写出 $t^a=Nn^a+N^a$,它们之间满足关系式

$$N^an_a=0,q_{ab}n^b=0.\tag{6}$$

在 3+1 分解过程中,需定义一个对称张量,即外曲率 K_{ab} 为

$$K_{ab}=q_a^cq_b^d\nabla_cn_d=q_a^c\nabla_cn_b,\tag{7}$$

它满足 $K_{ab}n^b=0$ 和 $q_a^bK_{bc}=K_{ac}$. 此外,还需用到如下几个重要的恒等式:

$$G_{ab}n^an^b=\frac{1}{2}({}^{(3)}R-K_{ab}K^{ab}+K^2),$$
$$R_{ab}n^an^b=-K_{ab}K^{ab}+K^2+\nabla_b(n^a\nabla_an^b-n^b\nabla_an^a),$$
$$\dot{q}_{ab}=\pounds_{\bar{t}}\,q_{ab}=2NK_{ab}+2D_{(a}N_{b)}.\tag{8}$$

经过复杂的运算,可将作用量(3)式 3+1 分解后变成

$$S[g_{ab};\alpha]=\int_R\mathrm{d}\Phi\int_\Sigma\mathrm{d}^3x\sqrt{q}N[\alpha^{2\,(3)}R+(K^2-K_{ab}K^{ab})].\tag{9}$$

由此,可以直接给出 Lagrangian 量如下:

$$L=\int_\Sigma\mathrm{d}^3x\sqrt{q}N[\alpha^{2\,(3)}R+(K^2-K_{ab}K^{ab})],\tag{10}$$

其中 q 和 K 分别为 q_{ab} 和 K_{ab} 的行列式,${}^{(3)}R$ 为类空超曲面 Σ 上的曲率张量.

最后,为了得到相应的哈密顿量,则必须进行勒让德(Legendre)变换,根据 q_{ab} 的共轭动量 $\tilde{p}^{ab}$ 和哈密顿量 H 的定义

$$\tilde{p}^{ab}=\frac{\delta L}{\delta\dot{q}_{ab}},H=\tilde{p}^{ab}\dot{q}_{ab}-L_G.\tag{11}$$

经过冗长的计算,可导出哈密顿量为

$$H=\int_\Sigma\mathrm{d}^3x\left\{N\left[-\alpha^2\sqrt{q}\,{}^{(3)}R+\frac{1}{\sqrt{q}}\left(\frac{1}{2}\tilde{p}^2-\tilde{p}^{ab}\tilde{p}_{ab}\right)\right]-2N_aD_b\tilde{p}^{ab}\right\},\tag{12}$$

其中

$$\tilde{p}^{ab}=\sqrt{q}(Kq^{ab}-K^{ab}).\tag{13}$$

根据 Dirac 约束代数理论[10]可知,相应的约束方程为

$$-\alpha^2\sqrt{q}\,{}^{(3)}R+\frac{1}{\sqrt{q}}\left(\frac{1}{2}\tilde{p}^2-\tilde{p}^{ab}\tilde{p}_{ab}\right)=0,$$
$$D_b\tilde{p}^{ab}=0,\tag{14}$$

或写为

$$\alpha^2\sqrt{q}\,{}^{(3)}R+\frac{1}{\sqrt{q}}\left(\tilde{p}^{ab}\tilde{p}_{ab}-\frac{1}{2}\tilde{p}^2\right)=0,$$

$$D_b\tilde{p}^{ab} = 0. \tag{15}$$

这就是与引力场作用量(3)式对应的单参数 ADM 约束方程.

由方程(15)不难看出,当 $\alpha = i$ 时,方程(15)变成为

$$-\sqrt{q}\,{}^{(3)}R + \frac{1}{\sqrt{q}}\left(\tilde{p}^{ab}\tilde{p}_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{p}^2\right) = 0,$$
$$D_b\tilde{p}^{ab} = 0. \tag{16}$$

这就是著名的 ADM 约束方程[4],对应的时空度规具有洛伦兹号差 ;但当 $\alpha = \epsilon$ 时,方程(15)变为

$$\sqrt{q}\,{}^{(3)}R + \frac{1}{\sqrt{q}}\left(\tilde{p}^{ab}\tilde{p}_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{p}^2\right) = 0,$$
$$D_b\tilde{p}^{ab} = 0, \tag{17}$$

它是时空度规具有欧几里得号差下的 ADM 约束,这恰好与 Barbero 方法给出的结果[5]一致.

3 二重 ADM 约束方程

下面将二重复函数理论[6]运用于引力场中,将四维时空流形二重化,进而将爱因斯坦 – 希尔伯特(Einstein-Hilbert)作用量 $S_{\mathrm{EH}}[g_{ab}] = \int_M \sqrt{-g}R$ 二重化. 由此不仅能导出 ADM 约束方程,还能实现欧几里得引力理论和洛伦兹引力理论的统一表述.

在二重化的四维时空流形 $M(J)$ 中,度规张量 $g_{ab}(J)$ 可表示为[8]

$$g_{ab}(J) = \begin{pmatrix} N_iN^i + J^2N^2 & N_i \\ N_k & q_{ik} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

其逆矩阵为

$$g^{ab}(J) = \begin{pmatrix} \dfrac{J^2}{N^2} & -\dfrac{J^2N^i}{N^2} \\ -\dfrac{J^2N^k}{N^2} & q^{ik} + \dfrac{J^2N^iN^k}{N^2} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

其中 J 为二重纯虚单位. 当 $J = \mathrm{i}$ 时,$g_{ab}(J) = g_{ab}(L)$ 为洛伦兹时空中的四维度规 ;当 $J = \epsilon$ 时,$g_{ab}(J) = g_{ab}(E)$ 是欧几里得时空中的四维度规.

于是可将二重四维时空 $M(J)$ 的引力场作用量表示成

$$S_{\mathrm{EH}}[g_{ab}(J)] = \int_{M(J)} \sqrt{-g(J)}\,R(J). \tag{20}$$

为了对二重化的作用量 $S_{\mathrm{EH}}[g_{ab}(J)]$ 进行 3 + 1 分解,首先引入单位正交协变量

$$n_a(J) = \frac{\partial_a t}{(g^{bc}(J)\partial_b t\,\partial_c t)^{1/2}},$$

其满足

$$n^a(J) = g^{ab}(J)n_b(J),\ n^a(J)n_a(J) = J^2. \tag{21}$$

此时对应的三维度规 q_{ab},时间流逝函数 $N(J)$ 及转移矢量 $N^a(J)$ 分别为

$$q_{ab} := g_{ab}(J) - J^2n_a(J)n_b(J)$$
$$(q_a^b = \delta_a^b - J^2n_a(J)n^b(J)),$$
$$N(J) := J^2n^a(J)n^b(J)g_{ab},$$
$$N^a(J) := q_a^b(J)t^b. \tag{22}$$

然后,将二重作用量 $S_{\mathrm{EH}}[g_{ab}(J)]$ 进一步写成

$$S_{\mathrm{EH}}[g_{ab}(J)] = \int \mathrm{d}t\int_\Sigma \mathrm{d}^3x\,\sqrt{q}N(J)R(J). \tag{23}$$

利用 Gauss-Codazzi 关系式[3]:

$${}^{(3)}R_{abc}^d = q_a^eq_b^fq_c^gq_h^d\,{}^{(4)}R_{efg}^h + K_{ac}K_b^d - K_{bc}K_a^d,$$
$$D_aK_b^a - D_bK_a^a = R_{ac}q_b^an^c, \tag{24}$$

其中 ${}^{(3)}R_{abc}^d$ 为类空超曲面 Σ 上的三维曲率张量,而 D_a 为 Σ 上的三维协变导数,满足 $D_cq_{ab} = 0$. 经过复杂的计算,可得如下关系式:

$$R(J) = -J^2\,{}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2$$
$$+ 2\nabla_b(n^a\nabla_an^b - n^b\nabla_an^a). \tag{25}$$

将(25)式代入二重化作用量 $S_{\mathrm{EH}}[g_{ab}(J)]$,并忽略表面积分项,可得到 3 + 1 分解形式如下:

$$S_{\mathrm{EH}}[g_{ab}(J);J] = \int \mathrm{d}t\int_\Sigma \mathrm{d}^3x\,\sqrt{q}N(-J^2\,{}^{(3)}R$$
$$+ K_{ab}K^{ab} - K^2). \tag{26}$$

同理,根据哈密顿量的定义式(11),能给出相应的哈密顿量如下:

$$H_{\mathrm{EH}}(J) = \int_\Sigma \mathrm{d}^3x\,\Big\{N\Big[J^2\,{}^{(3)}R + \tilde{p}^{ab}_{(\mathrm{EH})}\tilde{p}_{ab(\mathrm{EH})}$$
$$- \frac{1}{2}\tilde{p}^2_{(\mathrm{EH})}\Big] - 2N_aD_b\tilde{p}^{ab}_{(\mathrm{EH})}\Big\}, \tag{27}$$

其中

$$\tilde{p}^{ab}_{(\mathrm{EH})} = \sqrt{q}(K^{ab} - Kq^{ab}). \tag{28}$$

根据 Dirac 约束分析理论[10],可自然得到其相应的约束方程为

$$J^2\sqrt{q}\,{}^{(3)}R + \frac{1}{\sqrt{q}}\left(\tilde{p}^{ab}_{(\mathrm{EH})}\tilde{p}_{ab(\mathrm{EH})} - \frac{1}{2}\tilde{p}^2_{(\mathrm{EH})}\right) = 0,$$
$$D_b\tilde{p}^{ab}_{(\mathrm{EH})} = 0. \tag{29}$$

这就是二重化的 ADM 约束方程. 当 $J = \mathrm{i}$ 和 ϵ 时,(29)式分别对应洛伦兹引力理论和欧几里得引力理论的约束方程(16)和(17). 可见,将二重复函数理论运用于四维引力场中,不仅能导出爱因斯坦理论中具有洛伦兹号差的 ADM 约束方程,而且还能统一

地描述洛伦兹引力理论和欧几里得引力理论.

4 结 论

1. 单参数 ADM 约束方程与二重化 ADM 约束方程的内在联系

在洛伦兹和欧几里得时空中,尽管度规张量 g_{ab} 的形式并不相同,但经过 3+1 分解后,三维度规 q_{ab} 却完全相同,即 $q_{ab}(L)=q_{ab}(E)$. 考虑到 q_{ab} 的这一性质以及(13)式中 $\tilde{p}^{ab}$ 和(28)式中 $\tilde{p}^{ab}_{(EH)}$ 之间所满足的关系:$\tilde{p}^{ab}=-\tilde{p}^{ab}_{(EH)}$,可以确定,当 $\alpha=J$ 时,单参数哈密顿量(12)式和二重化哈密顿量(27)式满足 $H(\alpha=J)=-H_{EH}(J)$,更重要的是它们对应的 ADM 约束方程(15)和(29)形式完全相同. 这是本文的一个重要结论. 进一步分析,不难发现,这种一致性的根源在于

$$S[g_{ab};\alpha=J]=-S_{EH}[g_{ab}(J)].$$

2. 单参数引力场作用量的局限性

在单参数引力场作用量中,若 α 取任意实数和纯虚数,则单参数 ADM 约束方程(15)对应 Barbero 的双参数 ADM 约束方程的一个特殊情况. 为了与 Barbero 的双参数作用量 $S[g_{ab};\alpha,\beta]=\int_M d^4x\sqrt{g}[\alpha G^{ab}+\beta R^{ab}]\eta_a\eta_b$ 作比较,把本文中单参数作用量(3)式改写成如下形式:

$$S[g_{ab};\alpha]=\int_M d^4x\sqrt{g}[AG^{ab}+BR^{ab}]\eta_a\eta_b,$$

其中 $A=2\alpha^2$,$B=1-\alpha^2$. 不难看出,这两个系数 A 和 B 满足如下关系:$A+2B=2$. 这表明 α 的取值受到一定的限制,从而说明该作用量与 Barbero 的双参数作用量相比,具有一定的局限性.

虽然本文用两种不同的方法,给出单参数 ADM 约束方程(15)和二重化 ADM 约束方程(29),并由此分别导出著名的 ADM 约束方程(1),但在 $\alpha=J$ 的特定条件下,两个方程具有相同的形式.

[1] M. Carmeli, Classical Field: General Relativity and Gauge Theory (Wiley, New York, 1992).

[2] Y. Q. Wang, Z. M. Tang, The Theory and Effects of Gravitation (Hu'nan Science and Technology Press, Changsha, 1990) (in Chinese) [王永久、唐智明,引力理论和引力效应(湖南科学技术出版社,长沙,1990)].

[3] J. D. Romano, *Gen. Rel. Grav.*, **25** (1993), 795.

[4] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, in Gravitation: An Introduction to Current Research, edited by L. Witten (Wiley, New York, 1962).

[5] J. F. Barbero, *Phys. Rev.*, **D54** (1996), 1492.

[6] Z. Z. Zhong, *J. Math. Phys.*, **26** (1985), 2589.

[7] Y. B. Wu, Y. X. Gui, *Gen. Rel. Grav.*, **31** (1999), 165.

[8] Y. B. Wu, *Int. J. Theor. Phys.*, **25** (1995), 2171; **37** (1998), 2127.

[9] R. M. Wald, General Relativity (University of Chicaga Press, Chicago, 1984).

[10] P. A. M. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics (Belfer Grduate School of Science Yeshiva University, New York, 1984).

TWO DIFFERENT METHODS OF DERIVING ARNOWITT-DESER-MISNER CONSTRAINT EQUATIONS FOR EINSTEIN'S GRAVITATIONAL FIELDS*

LI JIU-LI WU YA-BO†

(*Department of Physics*, *Liaoning Teachers University*, *Dalian* 116029, *China*)

(Received 2 July 2000)

ABSTRACT

In this paper, two different methods are given, by which the famous Arnowitt-Deser-Misner (ADM) constraint equations for Einstein's gravitational fields can be derived. One method is to construct an action of gravitational fields with a parameter in the specetimes of Lorentzian sgnature. Thus, ADM constraints with a parameter can be obtained and the familiar ADM constraint equations can be naturally derived by adjusting the value of this parameter. The other is to apply the double complex function theory to gravitational fields in Hamiltonian formulation. Hence, the double constraints can be obtained, in which the well-known ADM constraint equations are included as a special case. In addition, the Lorentzian and Euclidean gravitational theory can be expressed in a unified way by use of these two different methods.

Keywords: Arnowitt-Deser-Misner constraint equations, Hamilton formulation, spacetime signature, action of gravitational fields

PACC: 0420, 0240

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19475005), and the Science Foundation of Educational Department of Liaoning Province, China (Grant No. 20041012).

† E-mail: zwyb@mail.dlptt.ln.cn