第 50 卷 第 3 期 2001 年 3 月
1000-3290/2001/50(03)/0422-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 50, No. 3, March, 2001

用格子 Boltzmann 方法模拟高雷诺数下的热空腔黏性流*

吕晓阳
(华南师范大学行政学院,广州 510631)
李华兵
(桂林电子工业学院基础部,桂林 541004)
(2000 年 9 月 22 日收到)

对 13 速六方格子 Bhatnagar-Gross-Krook 模型进行改进,适当地选取弛豫时间 τ 和 k,使得热流体的切黏滞系数 μ 与热导系数 λ 只与内能有关,流体的 Prandtl 数可调. 用该模型模拟了高雷诺数下的各种边界空腔流.

关键词:格子 Boltzmann 方法, Bhatnagar-Gross-Krook 模型, Prandtl 数, 空腔流
PACC:0540,0357

1 引 言

格子 Boltzmann(LB)方法已成功地用于对等温流体的模拟研究[1-3]. 该方法在热流体领域的应用也得到了较广泛的重视[4-6],但在大多数热流体模型中,Prandtl 数都取为 0.5. Prandtl 数是表征热传导的贡献与黏性的贡献相对重要性的量度,因此 Prandtl 数为定值的模型不能模拟许多实际的热流体. 文献[7]在平衡分布函数中引入了参数 σ,使得 Prandtl 数可连续改变,但在热流矢量中却产生一个非物理项,为此,必须限制参数的取值,从而只许 Prandtl 数在小范围内变化. 文献[8]通过在碰撞矩阵中引进一个不为零的可变参数 θ 而引入多弛豫,也得到了 Prandtl 数任意可选的 LB 模型,但同时增加了碰撞项的复杂程度. 文献[9]采用单弛豫 Bhatnagar-Gross-Krook(BGK)模型,在导出 Fourier 热传导定律时引入一个 k,通过调节该参数,可获得不同值的 Prandtl 热流体.

本文在文献[9]的基础上,对 13 速六方格子 BGK 模型加以改进,使得该模型具有单弛豫时间的简单性,Prandtl 数可调及输运系数只与内能有关,进一步扩展该模型的应用范围.

2 13 速六方格子 BGK 模型的改进

模型如图 1 所示. 单粒子密度分布函数 $f_{p\alpha}(\boldsymbol{r},t)$满足单弛豫演化方程

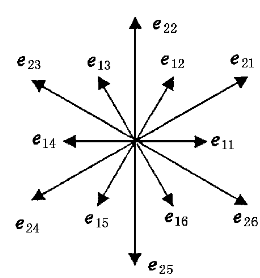


图 1 13 速六方格子

$$f_{p\alpha}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{e}_{p\alpha},t+1)-f_{p\alpha}(\boldsymbol{r},t)$$
$$=-\frac{1}{\tau}\left(f_{p\alpha}(\boldsymbol{r},t)-f_{p\alpha}^{eq}(\boldsymbol{r},t)\right),\qquad(1)$$

式中 $p=0,1,2$ 表示速度大小为 $0,1,\sqrt{3}$, $\alpha=1,2,3,4,5,6$ 表示速度方向,约定 $p=0$, $\alpha=0$ 时 $\boldsymbol{e}_{00}=0$, τ 为弛豫时间. 粒子密度、动量密度和能量密度按下式计算:

* 国家自然科学基金(批准号:19762001)及广西壮族自治区自然科学基金(批准号:20007017)资助的课题.

$$\rho = \sum_{p\alpha} f_{p\alpha}, \rho \boldsymbol{u} = \sum_{p\alpha} f_{p\alpha} \boldsymbol{e}_{p\alpha}, \rho\varepsilon = \frac{1}{2}\sum f_{p\alpha}(\boldsymbol{e}_{p\alpha} - \boldsymbol{u})^2. \tag{2}$$

设局域平衡分布函数具有如下形式:

$$f_{p\alpha}^{eq} = A_p + B_p \boldsymbol{e}_{p\alpha}\cdot\boldsymbol{u} + C_p u^2 + D_p(\boldsymbol{e}_{p\alpha}\cdot u)^2 + E_p(\boldsymbol{e}_{p\alpha}\cdot\boldsymbol{u})^3 + F_p \boldsymbol{e}_{p\alpha}\cdot\boldsymbol{u}^3 + O(\boldsymbol{u}^4), \tag{3}$$

式中各系数的求解及流体的宏观连续方程、动量与能量方程的推导,用到 Chapman-Enskog 多尺度展开技术、质量、动量守恒及伽利略不变性. 在由热流矢量 $\boldsymbol{q}^{(1)}$ 表达式确定 Fourier 热传导定律 $\boldsymbol{q}^{(1)} = -\lambda\nabla\varepsilon$ 过程中,得到

$$A_2 = \frac{1}{18}\rho\varepsilon(4\varepsilon - 1) + f(\varepsilon), \tag{4}$$

$$\lambda = \left(\tau - \frac{1}{2}\right)(2\rho\varepsilon + 9f'(\varepsilon)) \tag{5}$$

及

$$A_1 = \frac{1}{6}\rho\varepsilon(3 - 4\varepsilon) - 3f(\varepsilon),$$

$$A_0 = \rho - \frac{8}{3}\rho\varepsilon(1 - \varepsilon) + 12f(\varepsilon). \tag{6}$$

(3)式中其他几个系数分别为

$$B_1 = \frac{1}{2}\rho\left(1 - \frac{4}{3}\varepsilon\right), \quad B_2 = \frac{1}{18}\rho(4\varepsilon - 1),$$

$$C_0 = \frac{4}{3}\rho(2\varepsilon - 1), \quad C_1 = \frac{1}{3}\rho\left(\varepsilon - \frac{3}{4}\right),$$

$$C_2 = \frac{1}{18}\rho\left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon\right), \quad D_1 = \rho(1 - 2\varepsilon),$$

$$D_2 = \frac{1}{27}\rho(6\varepsilon - 1), \quad E_1 = -\frac{2}{9}\rho,$$

$$E_2 = \frac{2}{81}\rho, \quad F_1 = F_2 = 0. \tag{7}$$

同时可导出文献[9]中的流体本构方程、Navier-Stokes 方程和热传导方程. 流体的有效压力为 $p = \rho\varepsilon$,切黏滞系数 μ、热传导系数 λ 分别为

$$\mu = \rho\varepsilon\left(\tau - \frac{1}{2}\right),$$

$$\lambda = (2\rho\varepsilon + 9f'(\varepsilon))\left(\tau - \frac{1}{2}\right), \tag{8}$$

热流体的 Prandtl 数定义为

$$Pr = \frac{\mu}{\lambda}. \tag{9}$$

自由函数 $f(\varepsilon)$ 的选取将从两个方面影响模型的性能,一是改变静止粒子数与运动粒子数的相对比例,二是使得导热系数可调整,从而改变流体的 Prandtl 数.

文献[9]中取 $f(\varepsilon) = k\varepsilon$,并对 k 的意义作了较详细的论述,文献[10]利用此模型在 64×64 格子上模拟了雷诺数 $Re = 3000$ 的空腔流. 本文取 $f(\varepsilon) = k\varepsilon^2$. 令 $\tau = \mu_0/\rho + 1/2$,得 $\mu = \mu_0\varepsilon$,μ_0 为常数,即只要在每一步演化过程中,不同格子的碰撞选取不同的弛豫时间,就可以得到与流体密度无关,只与能量成正比的黏滞系数. 而由热导系数 λ 的表达式,可得

$$\lambda = (2\rho + 18k)\varepsilon(\tau - 1/2) = \lambda_0\varepsilon,$$

式中 $\lambda_0 = 2\mu_0(1 + 9k/\rho)$,对于密度变化很小的流体,由于 k 是与密度无关的常数,因此,形式上热传导系数与能量成正比,这与传统的 Maxwell 分子理论一致[11].

由(9)式,Prandtl 数为

$$Pr = \frac{\rho}{2\rho + 18k}\begin{cases} > \dfrac{1}{2} & -\rho/9 < k < 0, \\ = \dfrac{1}{2} & k = 0, \\ < \dfrac{1}{2} & k > 0. \end{cases} \tag{10}$$

影响静止粒子与运动粒子相对比例的三个系数分别为

$$A_0 = \rho - \frac{8}{3}\rho\varepsilon(1 - \varepsilon) + 12k\varepsilon^2,$$

$$A_1 = \frac{1}{6}\rho\varepsilon(3 - 4\varepsilon) - 3k\varepsilon^2,$$

$$A_2 = \frac{1}{18}\rho\varepsilon(4\varepsilon - 1) + k\varepsilon^2. \tag{11}$$

在演化过程中,为使流场静止时粒子的密度分布有意义,要求 $A_0>0$,$A_1>0$,$A_2>0$,即对初始能量的限制为 $1/4<\varepsilon<3/4$. 因此与文献[9]相比,本文 $f(\varepsilon)$ 的选取,使参数 k 对 A_0,A_1,A_2 的作用强度有所降低. 根据静止粒子数应满足 $A_0<\rho$ 条件及(10)式,得到参数 k 的取值范围为

$$-\frac{\rho}{9} < k < \frac{\rho}{9}\cdot\frac{2(1 - \varepsilon)}{\varepsilon}. \tag{12}$$

3 空腔流的模拟

3.1 边界条件

采用六方格子模拟矩形空腔流时,水平边界为直线,垂直边界为锯齿形,因此,水平方向把边界定义在链上,垂直方向把边界定义在格点上,边界上的

格点与流体内格点一样经历碰撞与传输两个过程. 边界点在 $t+1$ 时刻的分布函数 f' 与 t 时刻已经历过碰撞的分布函数 f 的关系为：

对于下边界，分布函数 f'_0，f'_{11}，f'_{14}，f'_{15}，f'_{16}，f'_{24}，f'_{25}，f'_{26} 可由本层或第一层或第二层格点相同方向的分布函数确定；其他几个方向的分布函数，由简单无滑反射条件确定为 $f'_{12}=f_{15}$，$f'_{13}=f_{16}$，$f'_{21}=f_{24}$，$f'_{22}=f_{25}$，$f'_{23}=f_{26}$.

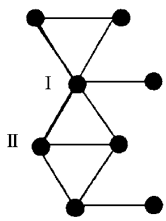


图 2　垂直左边界格子

对于垂直左边界，边界格点分为Ⅰ与Ⅱ两种情况，如图 2 所示，在边界格点Ⅰ上，由无滑反射条件确定的分布函数为 $f'_{11}=f_{14}$，$f'_{21}=f_{24}$，$f'_{26}=f_{23}$. 在边界格点Ⅱ上，由无滑反射条件确定的分布函数为 $f'_{11}=f_{14}$，$f'_{12}=f_{15}$，$f'_{16}=f_{13}$，$f'_{21}=f_{24}$，$f'_{22}=f_{25}$，$f'_{25}=f_{22}$，$f'_{26}=f_{23}$.

对上边界和垂直右边界作同样的处理.

为使边界格点保持恒温与恒速，在进行下一步碰撞前，边界格点强制施加局域平衡条件：

$$f''_{p\alpha}=f'^{eq}_{p\alpha}(\rho_B,\varepsilon_B,u_B),\tag{13}$$

式中 $\rho_B=\sum f'_{p\alpha}$，ε_B 为边界温度，u_B 为边界速度，对于空腔流，垂直左右边界的 $u_B=0$. $f''_{p\alpha}$ 即为边界格点下一步参加碰撞的分布函数，由它将边界影响扩展到整个流场.

3.2　边界类型

根据空腔上下边界速度大小和方向，存在三种类型的边界，如图 3 所示.

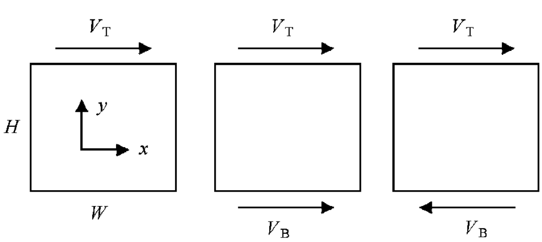


图 3　三种边界类型

空腔的边界温度 ε_B 可选择高于、等于或低于腔内的初始温度 ε_0. 雷诺数定义为

$$Re=\frac{\rho V'H'}{\mu}\cdot\frac{H}{W},\quad H'=\frac{\sqrt{3}}{2}H,\tag{14}$$

式中 H 为空腔高度，W 为空腔宽度，对第一种边界，$V'=|V_T|$，对第二、三种边界，$V'=(|V_T|+|V_B|)/2$，V_T 和 V_B 分别为上边界和下边界速度.

3.3　模拟结果

图 4 为空腔格子大小为 128×128，参数选取为 $\rho=0.26$，$Re=10000$，$k=-0.15$，$Pr=1.04$，$V_T=0.05$，$V_B=0$，开始温度、边界温度均为 0.5，运行 15 万步得到的稳定的流场图. 图 5 为相应的温度分布和压强分布图. 图 6(a)—(c)为相同参数，格子大小为 64×128，$Re=20000$，运行 30 万步后得到的稳定流场图.

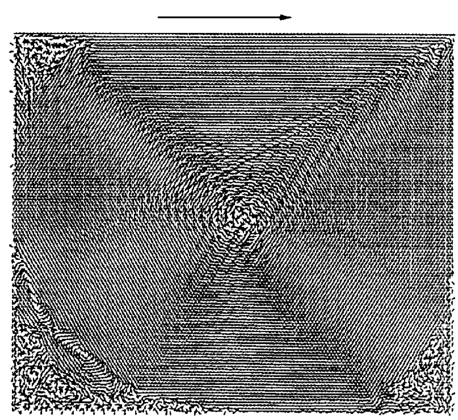


图 4　空腔格子为 128×128 流场图

4　讨　论

本文的模型中，参数 k 的引入使得局域平衡分布函数的系数 A_p 不再与密度成正比[12]，这是与文献[7]最大的差别，而可模拟的热流体范围有很大的扩展，在某些 k 值下，雷诺数达到很高的值仍可以得到稳定的流场分布. 但是随着 k 的增加，热流体的稳定性受到很大的影响. 表 1 列出由(12)式确定的在 k 值变化范围为 -0.288—0.578 内，得到稳定热流体的最大雷诺数的变化情况，同时还列出相应的静止粒子所占比例数.

由表 1 可以看到，k 接近 $-\rho/9$ 或 $\rho/9\times2(1-\varepsilon)/\varepsilon$ 时，要得到稳定的热流体，雷诺数必须取得很

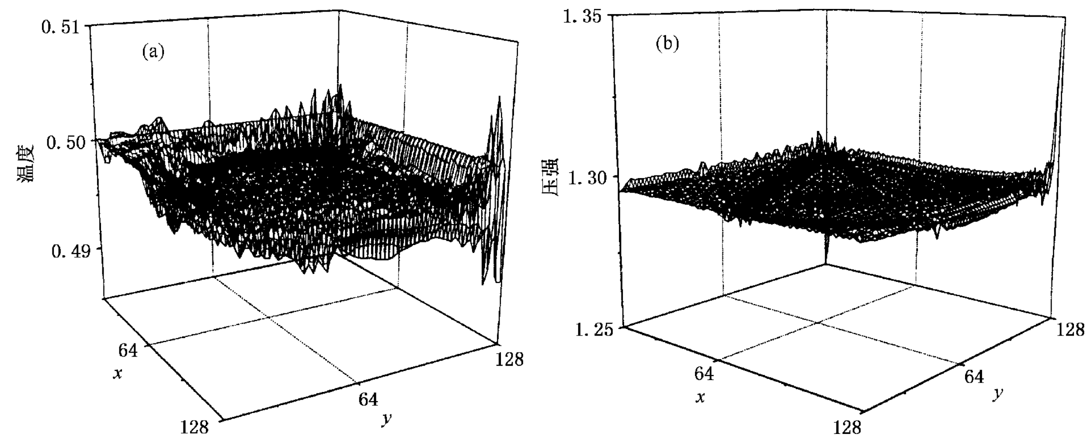
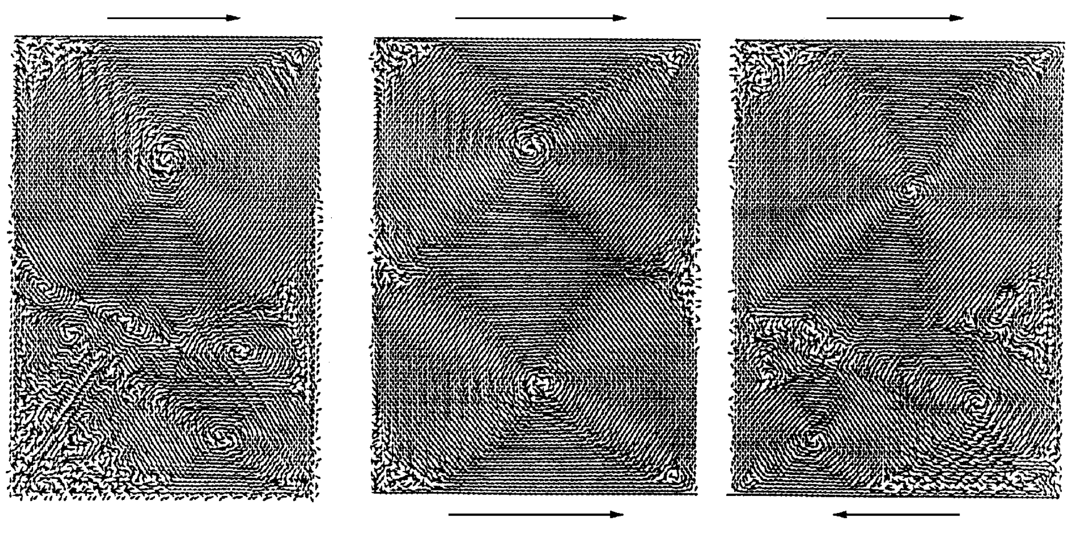


图 5　空腔格子为 128×128 运行 15 万步的温度分布(a)和压强分布(b)图



(a) $V_T = 0.05$, $V_B = 0$　　(b) $V_T = V_B = 0.05$　　(c) $V_T = 0.05$, $V_B = -0.05$

图 6　空腔格子为 64×128 运行 30 万步的流场图

表 1　空腔格子大小为 256×256, $\rho = 2.6$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_B = 0.5$, $V_T = 0.05$

k	−0.28	−0.27	−0.26	−0.25	−0.2	−0.18	−0.17	−0.16	−0.15	−0.14
Pr	16.25	7.65	5.0	3.71	1.63	1.33	1.22	1.12	1.04	0.97
$(A_\theta/\rho) \times 100$	1.0	2.2	3.3	4.5	10.3	12.6	13.7	14.8	16.0	17.2
Re	0	20	288	320	680	1240	2400	12800	28000	24000

k	−0.13	−0.12	−0.11	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Pr	0.91	0.86	0.81	0.77	0.5	0.37	0.29	0.25	0.21	0.18
$(A_\theta/\rho) \times 100$	18.3	19.5	20.6	21.8	33.3	44.9	56.4	67.9	79.5	91.0
Re	12000	4880	2480	1320	128	84	14	6	5.2	3.2

低，尤其在 $-\rho/9$ 附近，还必须减小边界流速，即降低流体的马赫数，才能模拟稳定的热流体，而在 $Pr=1$ 附近，模拟高雷诺数下的热流体较成功，这说明雷诺数与马赫数都对热流体的行为产生影响.

另外，高雷诺数下模拟出的流场与低雷诺数有较大差别. 首先，高雷诺数下要达到稳定的流场需要运行更多的时间步数；其次，流场分布也有较大不同. 在图 7 中，取 $Re=2000$，$k=-0.13$，运行 2 万步后流场就完全稳定下来，与图 6(a)相比较差异明显，可见，高雷诺数导致多尺度涡旋的形成.

在文献[9]中，Prandtl 数与流体的密度和温度有关，本文中 Prandtl 数与流体的密度有关，即都不是与状态参数无关的常数，关于这一问题的解决还需要进一步的探讨.

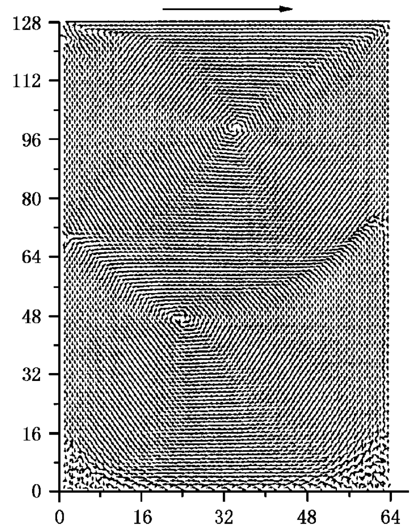


图 7 空腔格子为 64×128 运行 5 万步的流场图 $V_T=0.05$，$V_B=0$，$Re=2000$

[1] Y. H. Qian, D. d'Humieres, P. Lallemand, *Euro. Phys. Lett.*, **17**(1992), 479.

[2] H. Chen, S. Chen, W. H. Matthaeus, *Phys. Rev.*, **A45**(1992), 5339.

[3] H. P. Fang, Z. F. Lin, R. B. Tao, *Chin. Phys. Lett.*, **14**(1997), 912.

[4] F. J. Alexander, S. Chen, J. D. Sterling, *Phys. Rev.*, **E47**(1993), R2249.

[5] Y. Chen, H. Ohashi, M. Akiyama, *J. Stat. Phys.*, **81**(1/2)(1995), 71.

[6] G. He, K. H. Zhao, *Commun. Theor. Phys.*, **29**(1998), 623.

[7] Y. Chen, H. Ohashi, M. Akiyama, *Phys. Fluids*, **7**(1995), 2280.

[8] M. Soe, G. Vahala *et al.*, *Phys. Rev.*, **E57**(1998), 4227.

[9] H. B. Li *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **49**(2000), 392(in Chinese)[李华兵等，物理学报，**49**(2000), 392].

[10] R. H. Chen *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **49**(2000), 631(in Chinese)[陈若航等，物理学报，**49**(2000), 631].

[11] L. C. Woods, An Introduction to the Kinetic Theory of Gasses and Plasma(Oxford University Press, Oxford, 1993).

[12] Y. Chen, H. Ohashi, M. Akiyama, *Phys. Rev.*, **E50**(1994), 2776.

SIMULATION OF THERMAL VISCOUS CAVITY FLOW IN HIGH REYNOLD NUMBER BY THE LATTICE BOLTZMANN METHOD*

LÜ XIAO-YANG

(*Public Administration Institute*, *South China Normal University*, *Guangzhou* 510631, *China*)

LI HUA-BING

(*Basic Department*, *Guilin Electronic Industry Institute*, *Guilin* 541004, *China*)

(Received 22 September 2000)

ABSTRACT

A modification to the 13-speed lattice Bhatnagar-Gross-Krook model is presented. The single relaxation time τ and the free parameter k are suitably chosen so that the transport coefficients become energy-dependent only and the Prandtl number is tunable. Simulations for various boundary cavities under high Reynold number are presented with the model.

Keywords: lattice Boltzmann method, Bhatnagar-Gross-Krook model, Prandtl number, cavity flow

PACC: 0540, 0357

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19762001), and the Natural Science Foundation of Guangxi Zhuang Autonomous Region, China (Grant No. 20007017).