

混沌系统的注入反馈控制与动态控制方法研究

颜森林 伍仕宝 逢焕刚 孙小菡 张明德

(东南大学电子工程系, 南京 210096)

(2000 年 6 月 17 日收到, 2000 年 8 月 25 日收到修改稿)

提出了注入反馈控制混沌的方法, 把蔡氏电路混沌系统控制到指定的平衡态和希望的振荡周期轨道上, 通过改变控制参数, 研究了几个典型物理状态变化现象, 丰富了蔡氏电路混沌系统的应用方法.

关键词: 混沌, 平衡态, 极限环

PACC: 0545

1 引 言

非线性现象广泛存在于现实世界中, 在一定条件下, 非线性将导致混沌. 混沌现象表面上呈现无规律特性, 但其背后隐藏着有序的本质特点也逐渐被人们所发现^[1]. 许多混沌系统对模拟现实世界的不可预测现象非常有用. 近年来, 混沌现象在保密通信中显示了良好的应用前景. 但是混沌现象在许多情况下也有其不稳定的因素, 人们总是期望找到一些方法来控制混沌, 使其实现对混沌系统中某个不稳定周期轨道的稳定控制或使其保持在某个希望的平衡态上^[2]. 90 年代 OGY^[3]方法提出后, 混沌控制方法迅速发展, 以后, 相继提出了自适应控制方法、非线性反馈方法, 并实现了对 Lorenz 系统的控制^[4, 5]. 由于蔡氏电路混沌系统^[6, 7]在保密通信中的广泛应用, 所以本文以蔡氏电路混沌系统为例, 提出注入反馈控制蔡氏电路混沌的方法, 使其保持在某个指定的平衡态上, 或希望的振荡周期上. 不需要改变系统的参数, 就可使该混沌系统变为多用途系统. 同时, 本文通过改变控制参数, 提出了动态控制混沌的思想方法, 研究了混沌状态转换的特点, 发现了一些有趣的物理状态变化现象.

2 注入反馈下的蔡氏电路混沌系统

蔡氏电路混沌系统由下式描述^[6]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a[y - x - h(x)], \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{dz}{dt} = -By,$$

其中 $h(x) = m_1 x + (m_0 - m_1) [|x+1| - |x-1|] / 2$ 为分段函数, a, B, m_0, m_1 为系统的参数, $a = 10.0, B = 14.87, m_0 = -1.27, m_1 = -0.68$. 数值研究表明该系统处于混沌状态. 现对(1)式中第 2 等式等号右边加入控制函数 $-kx + E(t)$, k 为反馈控制参数, $E(t)$ 为注入的稳定外场, 于是得到一个受控制的蔡氏电路系统:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a[y - x - h(x)], \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z - kx + E, \\ \frac{dz}{dt} &= -By. \end{aligned} \quad (2)$$

当 $x > 1$ 时, 方程(2)的平衡点为 $O_1\left(\frac{m_1 - m_0}{1 + m_1}, 0, \frac{m_1 - m_0}{1 + m_1}(k - 1) - E\right)$; 当 $x < -1$ 时, 方程(2)的平衡点为 $O_2\left(-\frac{m_1 - m_0}{1 + m_1}, 0, -\frac{m_1 - m_0}{1 + m_1}(k - 1) - E\right)$; 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, 方程(2)的平衡点为 $O_3(0, 0, -E)$. 分别在方程(2)的平衡点 O_1, O_2 和 O_3 上作线性变换, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= a[Y - (1 + m)X], \\ \frac{dY}{dt} &= (1 - k)X - Y + Z, \end{aligned} \quad (3)$$

其中当 $x > 1$ 或 $x < -1$ 时, $X = x \pm (m_0 - m_1) / (1 + m_1), Y = y, Z = z \pm (m_0 - m_1) / (k - 1) / (1 + m_1)$

+E, $m = m_1$; 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $X = x, Y = y, Z = z + E, m = m_0$. 方程(3)的本征方程为

$$\lambda^3 + \lambda^2 b_1 + \lambda b_2 + b_3 = 0, \quad (4)$$

其中 $b_1 = 1 + a(m + 1), b_2 = a(m + k) + B, b_3 = Ba(1 + m)$. 由霍尔维茨条件, 全部本征值具有负实部的充要条件为

$$b_1 > 0, b_2 > 0, b_3 > 0, b_1 \times b_2 - b_3 > 0, \quad (5)$$

则方程(3)的零解是全局渐近稳定的. 适当选取参数 k 使其满足霍尔维茨条件(5), 那么方程(2)系统将趋于平衡点 O_1 或 O_2 或 O_3 上. 由于 m_0 和 m_1 为系统的参数, k 和 E 为控制参数, 因此平衡点 O_1, O_2 和 O_3 上就是指定的平衡态. 这样就实现了对方程(1)系统的状态控制. 如果选取参数 $k =$

$\frac{B(1+m)}{a(1+m)+1} - \frac{B}{a} - m$, 并使其满足下列条件:

$$b_1 > 0, b_2 > 0, b_1 \times b_2 - b_3 = 0, \quad (6)$$

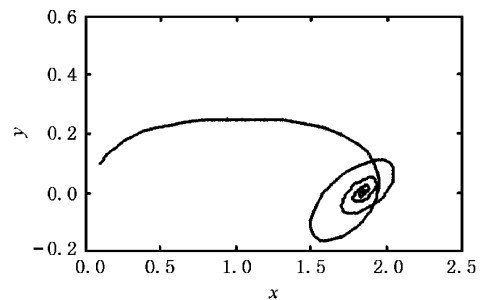
方程(3)的本征值有一负的实根和一对零实部的共轭复根, 那么方程(2)系统将出现稳定的极限环, 其振荡周期为 $2\pi(b_2)^{-1/2}$. 这样就实现了对方程(1)系统的振荡周期控制. 必须指出, 初值将影响系统的吸引域、极限环的位置和平衡点. 如果控制参数和注入外场发生变化, 那么系统的本征值和平衡态也要发生变化, 系统状态也必然随之作相应的变化和调整, 这项研究在 3.3 节给出.

3 数值研究结果

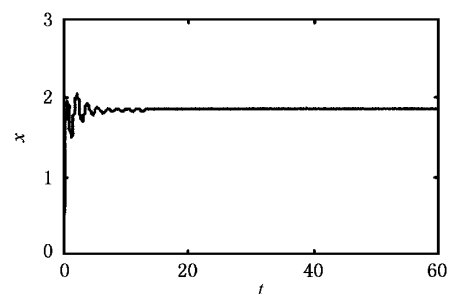
3.1 控制到指定的平衡态上

当 $x > 1$ 或 $x < -1, k = 1, E = 1, m = m_1$ 时, $b_1 = 4.2 > 0, b_2 = 18.07 > 0, b_3 = 47.584 > 0, b_1 \times b_2 - b_3 = 28.31 > 0$, 即满足霍尔维茨条件(5), 本征值 λ 为 $(-3.2, -0.5 \pm 3.8236j)$, 方程(3)的零解是全局渐近稳定的; 当 $-1 \leq x \leq 1, k = 1, E = 1, m = m_0$ 时, $b_1 = -1.7 < 0, b_2 = 12.17 > 0, b_3 = -40.149 < 0, b_1 \times b_2 - b_3 = 19.46 > 0$, 即不满足霍尔维茨条件(5) 本征值 λ 为 $(2.7, -0.5 \pm 3.8236j)$, 方程(3)的零解是不稳定的. 必须指出, 由 $b_1 = 1 + a(m + 1)$ 可知, 当 $m = m_0 = -1.27$ 时, 方程(3)在任何条件下其平衡态 O_3 都是不稳定的. 但是, 一旦当 x 变化到 $x > 1$ 和 $x < -1$ 时, 方程(2)系统将进入全局渐近稳定状态, 系统状态最终被“吸引”到稳定的平衡态 O_1 或 O_2 上. 由此可知, 方程(2)系统将最终趋向于指定的平衡态 O_1 或 O_2 上, 数值模拟结果如图 1

所示, 系统经过一段时间后, 最终趋向于指定的平衡态 $O_1(1.8438, 0, -1)$ 上. 这样就实现了对方程(1)系统的指定状态控制. 可以看到在图 1(a)中, 系统从起点 $(0.1, 0.1, 0.1)$ 以螺旋状态轨迹顺时针方向环绕进入平衡点 O_1 的吸引域, 最终变化到稳定平衡点 $(1.8438, 0, -1)$ 上. 它的变化时间可以从图 1(b)中看到, 在 10s 内, 系统约振荡 6 次后, 就趋于稳定平衡态. 而每一螺旋的时间都是相等的, 它和螺旋的轴半径无关. 即螺旋变化一圈的周期约为 1.7s, 和本征值计算出的振荡周期一致. 也数值模拟了当初值为 $(-0.56, 0.1, 0.1)$ 和 $k = 1, E = 1$ 时, 系统从起点 $(-0.56, 0.1, 0.1)$ 以螺旋状态轨迹顺时针方向环绕开始进入平衡点 O_2 的吸引域, 最终变化到稳定平衡点 $(-1.8438, 0, -1)$ 上的现象. 可知初值将影响系统的吸引域和平衡点. 图 2 为 $k = 0.5, E = 0.5$ 时的系统状态控制图. 其本征值为 $(-3.9947, -0.1273 \pm 3.4708j)$. 图 2(a)为系统从起点 $(0.1, 0.1, 0.1)$ 以螺旋状态轨迹顺时针方向环绕最终变化到平衡点 $(1.8438, 0, -1.4219)$ 的相空间变化轨迹, 由于 k 取值较图 1 的值小, 所以控制到平衡态的时间也相对较长. 比较两个本征值(或比较图 2 和图 1)就可以看到, 图 2 弛豫时间是图 1 的 $0.5/0.1273 \approx 4$ 倍以上. 因此, 控制参数也是控制状态时间变化的参数.

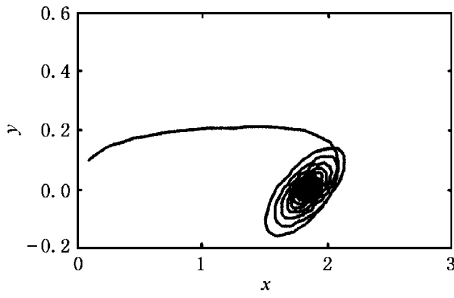


(a) 到平衡点 $(1.8438, 0, -1)$ 的相空间轨迹

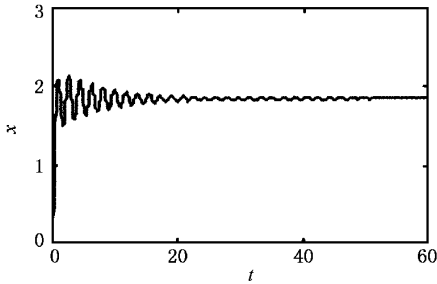


(b) 到平衡态的控制时间

图 1 混沌状态的控制 $k = 1, E = 1$

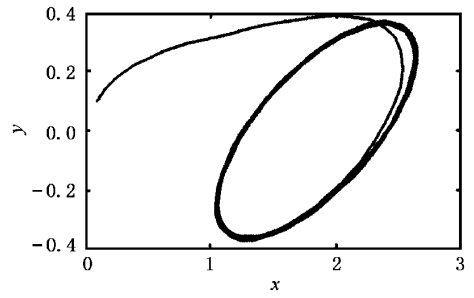


(a) 到平衡点(1.8438, 0, -1.4219)的相空间轨迹

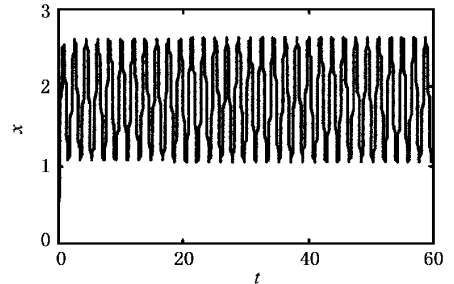


(b) 到平衡态的控制时间

图2 混沌状态的控制 $k=0.5, E=0.5$



(a) 系统控制到极限环上的相空间轨迹



(b) 系统控制到极限环上的时变轨迹

图3 系统控制到稳定的极限环上

3.2 控制到指定的振荡周期上

当 $k=0.32595328, E=1, m=m_1$ 时, $b_1=4.2 > 0, b_2=11.3295238 > 0, b_1 \times b_2 - b_3=0$, 满足条件(6)本征值 λ 为 $(-4.2, 0 \pm 3.3659j)$, 方程(3)系统将出现稳定的极限环. 当 $m=m_0$ 时, $b_1=-1.7 < 0, b_2=5.4296 > 0, b_1 \times b_2 - b_3=30.9287$, 不满足条件(6), 本征值 λ 为 $(3.4699, -0.8849 \pm 3.2845j)$, 方程(3)的零解是不稳定的. 由此可见, 方程(2)系统将出现稳定的极限环, 其振荡周期为 $2\pi(b_2)^{-1/2}$. 数值模拟结果如图3所示, 系统经过一段时间后, 最终稳定在极限环上. 图3中取 $k=0.32595328, E=1$, 从图3(a)可以看到, 系统从起点 $(0.1, 0.1, 0.1)$ 出发, 经过一个大的弧线轨迹顺时针方向环绕稳定到以 $(1.8438, 0, -2.2428)$ 为中心的极限环上, 其环绕振荡还不到1次. 从图3(b)可以看到弛豫时间不到2s, 也可以从本征值上精确计算出来. 如果初值为 $(-0.56, 0.1, 0.1)$, 那么系统将稳定到以 $(-1.8438, 0, 0.2428)$ 为中心的极限环上. 可知初值将影响系统的吸引域和极限环的位置.

3.3 混沌状态变化的动态控制

图4到图12为几种典型的物理状态变化的数值模拟结果. 它们都是在30—40s时将控制参数 k

作调整变化(E 值全取1), 从而动态控制系统状态的变化.

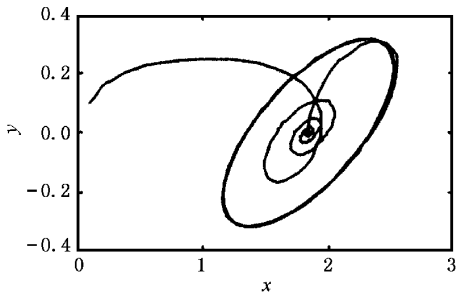
图4为 $k=1$ 变到 $k=0.32595238$ 时, 稳定态被变化控制到稳定的极限环上. 图4(a)为系统首先从起点 $(0.1, 0.1, 0.1)$ 螺旋变化到平衡点 $(1.8438, 0, -1)$, 并稳定在该点上. 由于在30s时 k 突然从1变化到0.32595238, 强迫系统进入稳定的极限环上, 并最终稳定在该环上. 但其极限环轴半径明显比图3(a)的极限环轴半径小, 从图4(b)可以看到稳定态快速地稳定在极限环上, 弛豫时间约为2s.

图5为 $k=0.1$ 变化到 $k=0.32595238$ 时, 混沌态被控制到稳定的极限环上. 图5(a)为混沌双涡旋吸引子被控制到稳定的极限环上相空间的变化轨迹. 在30s时 k 突然从0.1变化到0.32595238时, 系统由混沌态进入稳定的以 $(-1.8438, 0, 0.2428)$ 为中心的极限环上, 并稳定在该环上. 从图5(b)可知, 系统仅振荡一次, 混沌态就快速地稳定在极限环上, 控制弛豫时间约为2s. 图6为在40s时 k 突然从0.1变化到0.32595238时, 系统由混沌态进入以 $(1.8438, 0, -2.2428)$ 为中心的稳定的极限环上, 并最终稳定在该环上. 由此可知, 在不同时间(在不同的混沌吸引子上)将会把混沌态控制到不同的极限环上.

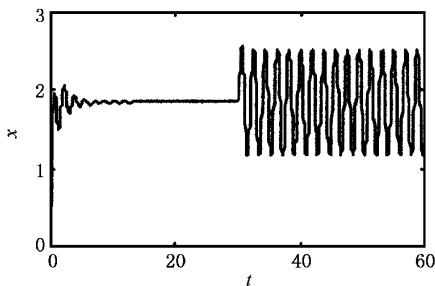
图7为 $k=0.1$ 变化到 $k=1$ 时, 混沌态被控制

到指定的平衡态上. 图 7(a) 为混沌双涡旋吸引子被控制到平衡态上的相空间变化轨迹. 在 30s 时 k 突然从 0.1 变化到 1, 系统由混沌态被“吸引”进入渐近稳定态上. 由图 7(b) 知, 控制弛豫时间约为 12s. 系统振荡 6—7 次, 混沌态最终稳定在平衡态 $(-1.8438, 0, -1)$ 上. 图 8 为在 40s 时 k 突然从 0.1 变化到 1 时, 系统由混沌态进入平衡态 $(1.8438, 0, -1)$ 上, 并最终稳定在该态上. 由此可知, 在不同时间(在不同的混沌吸引子上)将会把混沌态控制到不同的平衡态上.

图 9 为 $k = 0.32595238$ 变化到 $k = 1$ 时, 将稳定的极限环状态变化控制到指定的平衡态上. 图 9(a) 为把稳定的极限环状态变化控制到指定的稳定平衡态上的相空间变化轨迹. 在 30s 时系统从极限环轨道上被直接“吸入”进入渐近稳定状态, 最终趋向于指定的平衡态 $(1.8438, 0, -1)$ 上. 由图 9(b) 知, 控制弛豫时间约为 5s. 图 10 为在 40s 时系统从极限环轨道上跳出, 但最终还是进入渐近稳定状态趋向于指定的平衡态 $(1.8438, 0, -1)$ 上. 由图 10(b) 知, 控制弛豫时间约为 7s.



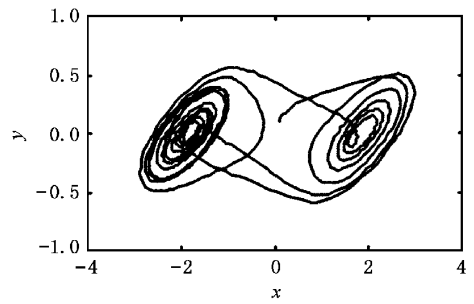
(a) 稳定态变化到极限环上的相空间轨迹



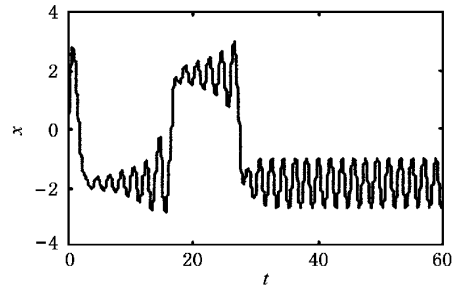
(b) 稳定态变化到极限环上的时变轨迹

图 4 稳定态变化到稳定的极限环上

图 11 为混沌态到混沌态的转换变化. 在 30s 时 k 从 0.2 转换到 0.02, 混沌态弛豫一段时间进入另一个混沌态. 图 12 亦为混沌态到混沌态的转换变化. 它是在 40s 时 k 从 0.2 转换到 0.02, 混沌态弛

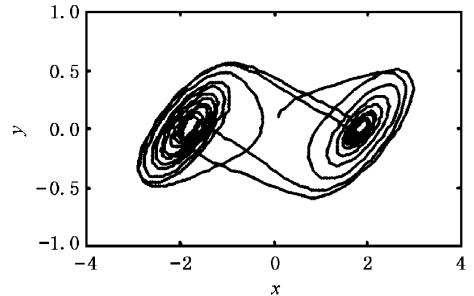


(a) 混沌态变化到极限环上的相空间轨迹

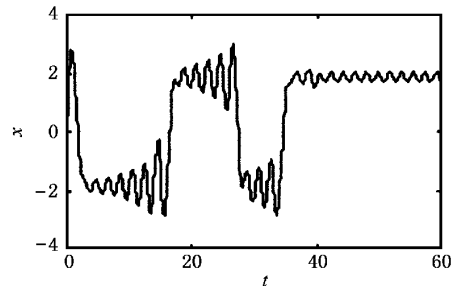


(b) 混沌态变化到极限环上的时变轨迹

图 5 混沌态变化到稳定的极限环上



(a) 混沌态变化到另一个稳定极限环上的相空间轨迹

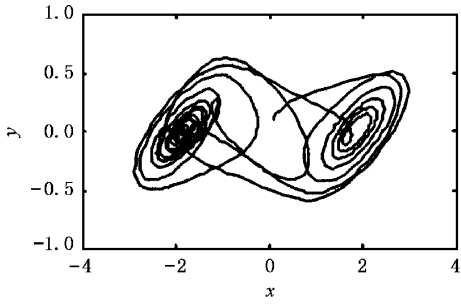


(b) 混沌态变化到另一个稳定极限环上的时变轨迹

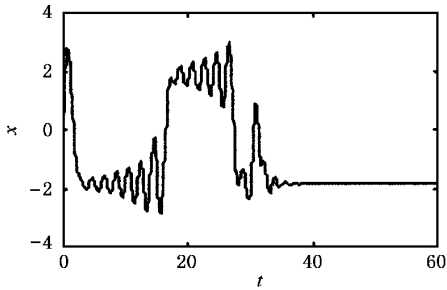
图 6 混沌态在不同时间变化到另一个稳定的极限环上

豫一段时间进入另一个混沌态. 比较图 11 和图 12 可知混沌态在被变化控制以后, 它们的相空间轨迹和时变轨迹完全不一样.

事实上, 控制参数和注入外场可以在较大的范围实时调节变化, 使蔡氏电路混沌系统以适应不同应用的需要.

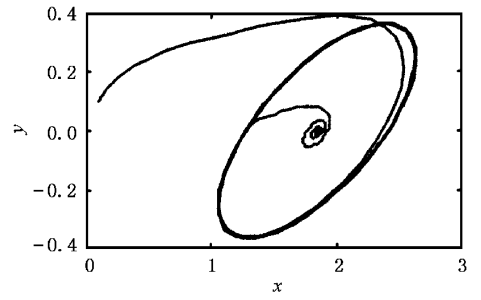


(a)混沌态变化到稳定态上的相空间轨迹

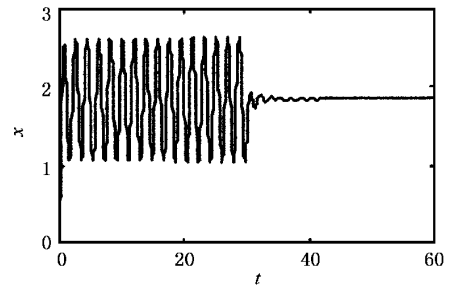


(b)混沌态变化到稳定态上的时变轨迹

图7 混沌态变化到稳定态上

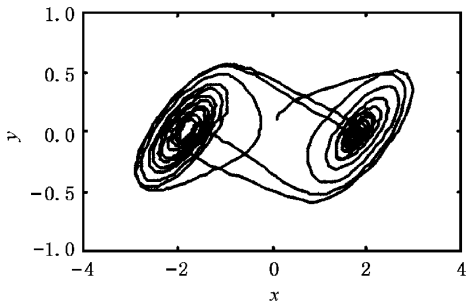


(a)极限环变化到稳定态上的相空间轨迹

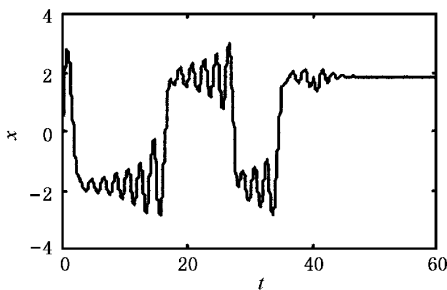


(b)极限环变化到稳定态上的时变轨迹

图9 极限环变化到稳定态上

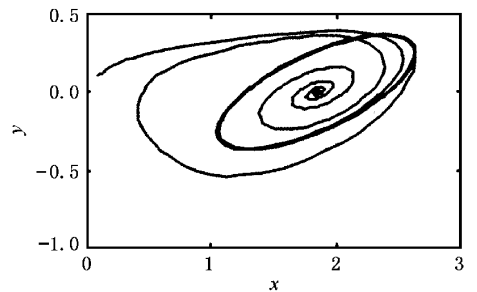


(a)混沌态变化到另一个稳定态上的相空间轨迹

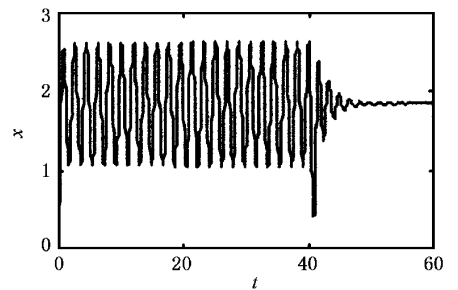


(b)混沌态变化到另一个稳定态上的时变轨迹

图8 混沌态在不同时间变化到另一个稳定态上

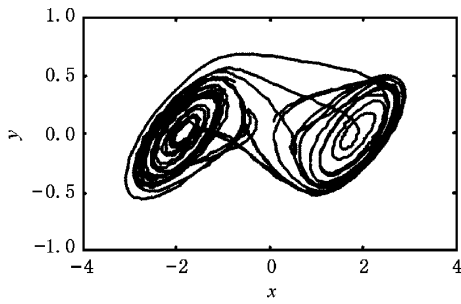


(a)极限环在不同时间变化到稳定态上的相空间轨迹

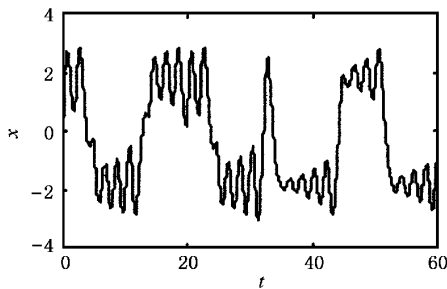


(b)极限环在不同时间变化到稳定态上的时变轨迹

图10 极限环在不同时间变化到稳定态上

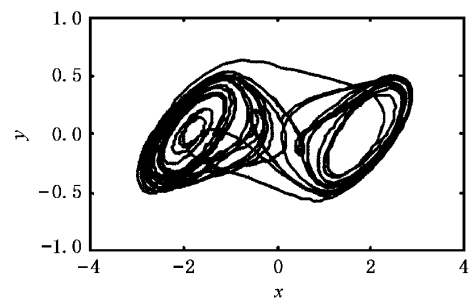


(a)混沌态变化到混沌态上的相空间轨迹

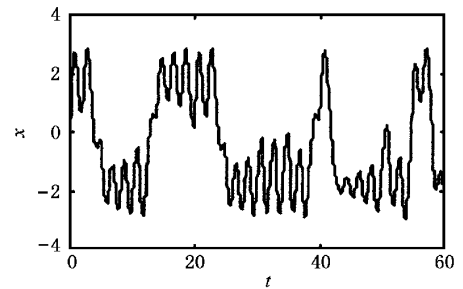


(b)混沌态变化到混沌态上的时变轨迹

图 11 混沌态变化控制



(a)混沌态在不同时间变化上的相空间轨迹



(b)混沌态在不同时间变化上的时变轨迹

图 12 混沌态在不同时间上的变化控制

4 结 论

本文提出的注入反馈控制混沌的方法,可以有效地控制蔡氏电路混沌系统.这个方法简单实用方便,不需要改变系统的参数和结构,就可以使系统趋

向于指定的平衡态和希望的振荡周期上.选取不同的控制参数和注入外场,就可以知道所要控制的结果.这一点对该系统的实际应用很有价值.同时,通过改变控制参数,研究了混沌状态转换变化的动态特点,其物理现象还有待于进一步的研究.

- [1] B. L. Hao, *Chaos II* (World Scientific, Singapore, 1990).
- [2] J. Gonzalez, R. Femat, *JEEE Trans. Circuits Syst. I*, **46** (1999), 1139.
- [3] E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990), 1196.
- [4] J. Z. Yu, N. Su, T. L. Vincent, *Acta Physica Sinica*, **47** (1998), 397 [in Chinese] 余建祖、苏楠、T. L. Vincent 物理学报 **47** (1998), 397]

- [5] G. N. Tang, X. S. Luo, L. J. Kong, *Acta Physica Sinica*, **49** (2000), 30 [in Chinese] 唐国宁、罗晓曙、孔令江, 物理学报, **49** (2000), 30]
- [6] C. W. Wu et al., *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **3** (1993), 1619.
- [7] G. P. Jiang, S. P. Wang, *Acta Electronica Sinica*, **28** (2000), 67 [in Chinese] 蒋国平、王锁萍, 电子学报, **28** (2000), 67]

STUDIES ON INJECTED-FEEDBACK AND DYNAMIC CONTROLS OF CHAOTIC SYSTEMS

YAN SEN-LIN WU SHI-BAO PANG HUAN-GANG SUN XIAO-HAN ZHANG MING-DE

(*Department of Electronic Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China*)

(Received 17 June 2000 ; revised manuscript received 25 August 2000)

ABSTRACT

A method of injected-feedback control of chaotic systems in Chai 's circuits is put forward. By the method, the chaotic systems can be controlled in predetermined equilibrium states and the vibrational cyclical trajectories. With the change of control parameters, typical variation of physical state is studied to extend the applications of Chai 's circuits chaotic systems in Chai 's circuits.

Keywords : chaos , equilibrium states , limit cycles

PACC : 0545