第 50 卷 第 3 期 2001 年 3 月
1000-3290/2001/50(03)/0572-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 50, No. 3, March, 2001

评 论

对于“包含在连续谱量子体系中的决定论性”一文的讨论

梁方豪
(山东大学数学系，济南 250100)
(1999 年 9 月 13 日收到；2000 年 7 月 13 日收到修改稿)

对于具有连续能谱的单粒子量子体系，“包含在连续谱量子体系中的决定论性”一文用所谓“双波函数”来描述处于能量本征态的粒子系综中各粒子的量子行为，并且在所谓的“等价定理”中称：双波函数描述在经典极限下将化为经典力学描述.然而，此描述所给出的系综力学量观测值统计分布的预言与通常量子力学不相容；并且，该文对其“等价定理”的证明是不正确的，这个“定理”实际上不成立.

关键词：连续能谱量子体系，双波函数，经典极限
PACC：0365

1 引 言

八十年代末，黄湘友提出了一个用“双波函数”描述单个粒子状态的所谓“非统计量子力学”[1,2]，又简称“双波理论”(记作 DWT).至今十几年中，已有 40 余篇论文依照 DWT 的基本假设讨论了各种各样的具体量子体系(例如文献[3—13]).然而，DWT 的正确性存在问题，本文将以文献[3]对连续能谱量子体系的双波描述为例，来说明问题的严重性.

刘全慧的“包含在连续谱量子体系中的决定论性”一文(即文献[3])完全仿照文献[1]，对连续能谱量子体系提出了如下的 DWT 基本假设：设粒子在势场 $V(x)$ 中，由定态薛定谔方程已得出此体系的能量本征值 E 组成连续谱 $(-\infty, +\infty)$，相应的能量本征函数集合

$$\{\psi_E(x) \mid E \in (-\infty, +\infty)\} \tag{1}$$

已归一化为 δ 函数(即 $\int \psi_E^*(x)\psi_{E'}(x)\mathrm{d}x = \delta(E - E')$)，DWT 认为波函数 $\psi_{E_0}(x)\exp[-\mathrm{i}E_0 t/\hbar]$ 描述的是处于能量本征态 $|E_0\rangle$ 的粒子系综，而对于系综中的单个粒子则要用含有参数 t_0 的如下两个波函数联合起来描述其状态：

$$\psi_{E_0}(x,t) = \psi_{E_0}(x)\exp[-\mathrm{i}E_0(t-t_0)/\hbar], \tag{2}$$

$$\varphi(x,t) = \int \psi_E(x,t)\mathrm{d}E, \tag{3}$$

其中 t_0 的不同取值相应于系综中的不同粒子，并且 t_0 以等概率取 $(-\infty, +\infty)$ 中的各值(即呈均匀分布)；DWT 认为，若我们对上述粒子测量任一力学量 f 的值，将会得到如下确定的值：

$$\langle f\rangle_{E_0} = \mathrm{Re}\int \varphi^*(x,t)\hat{f}\,\psi_{E_0}(x,t)\mathrm{d}x, \tag{4}$$

其中 $\hat{f}$ 是在薛定谔表象下力学量 f 所相应的厄米算符.

然而，文献[3]的双波描述不能正确地反映微观粒子的量子行为，并且文献[3]关于双波描述的经典极限的定理和证明是错误的.

本文的论证，需要引用文献[3]中的一具体例子，该例子叙述如下：均匀场 $V(x) = -Fx$ 中的单粒子体系具有能量谱 $(-\infty, +\infty)$，而

$$\psi_E(x) = \alpha(2\pi\sqrt{F})^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\exp[\mathrm{i}(u^3/3 - \alpha xu - \alpha Eu/F)] \tag{5}$$

(其中 $\alpha = (2mF/\hbar^2)^{1/3}$)是相应于能量值 E 的本征函数(见文献[14]§24)，其集合已归一化为 δ 函数，由(5)式按(2)和(3)式得双波函数如下：

$$\psi_{E_0}(x,t) = \alpha(2\pi\sqrt{F})^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\exp\{[u^3/3 - \alpha xu - \alpha E_0 u/F] - \mathrm{i}E_0(t-t_0)/\hbar\}, \tag{6}$$

$$\varphi(x,t) = \sqrt{F}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v\exp[\mathrm{i}(v^3/3 - \alpha xv)]$$

$$\cdot\,\delta(v + F(t - t_0)/\alpha\hbar) \tag{7}$$

(见文献[3]附录二). 文献[3]第三节由本文(6)和(7)式按照(4)式算出了下列各式：

$$\langle x\rangle_{E_0} = F(t - t_0)^2/2m - E_0/F, \tag{8}$$

$$\langle x^2\rangle_{E_0} = \langle x\rangle^2_{E_0}, \tag{9}$$

$$\langle x^3\rangle_{E_0} = \langle x\rangle^3_{E_0} - \hbar^2/mF, \tag{10}$$

$$\langle x^n\rangle_{E_0} = \langle x\rangle^n_{E_0} + O(\hbar^2) \quad (n = 2,3,4,\cdots). \tag{11}$$

2　文献[3]所给出的力学量平均值关系式是错误的

文献[3]的(5)式给出了如下力学量平均值关系式：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\langle f\rangle_{E_0}\mathrm{d}t_0 = \int \mathrm{d}x\psi^*_{E_0}(x)\,\hat{f}\psi_{E_0}(x). \tag{12}$$

对于 E_0 非零的情况,如果把$\hat{f}$取为能量算符,代入(12)式等号左边显然得 E_0(参看文献[3]中(8)式),而代入(12)式等号右边显然得 $\pm\infty$,因此(12)式不成立. 然而,(12)式是文献[3]的两个主要结论(见文献[3]的引言)之一,它被解释为"双波描述所预言的系综力学量平均值与通常量子力学相同".

3　双波描述所给出的系综力学量观测值统计分布的预言与通常量子力学不相容

考察上面第 1 节引自文献[3]的那个具体例子,由(8)式知粒子完全与经典质点一样作匀加速运动,再由 t_0 取均匀分布的假设可知此粒子系综的位置观测值的统计分布

$$\rho(x) \propto (x + E_0/F)^{-1/2}. \tag{13}$$

然而,由通常量子力学知

$$\rho(x) \propto |\psi_{E_0}(x)|^2. \tag{14}$$

由(5)式知,此(14)式所示的统计分布具有波节结构(见文献[14]的§24 及附录§b),它与(13)式很不相同. 双波描述所给出的系综力学量观测值统计分布的预言与通常量子力学很不相同,这是从许多双波描述的论文中都不难看到的情况.

DWT 预言力学量观测值的公式(4)很类似于通常量子力学的力学量平均值公式,其中被积函数中的 $\psi_{E_0}(x,t)$ 本来蕴涵着各力学量的观测值统计分布的信息,对坐标积分后这些信息几乎都丧失了,引入参数 t_0 把 t 换成 $t - t_0$ 只相当于作时间平移,以 t_0 在$(-\infty,+\infty)$中取均匀分布显然是恢复不出这些复杂的统计分布信息的,最明显的是位置统计分布信息被积分破坏得面目全非[15].

众所周知,通常量子力学的主要功能就是通过波函数来预言各力学量观测值的统计分布(平均值只是从中提取的极少量信息),所作出的预言已被实验充分证实(至今未发现相违的事例), DWT 对粒子系综的力学量观测值统计分布的预言与通常量子力学不相容,这意味着 DWT 对系综中单个微观粒子量子行为的描述是不正确的.

4　文献[3]所说的"等价定理"实际上不成立

文献[3]的另一个主要结论是所谓"等价定理",它是文献[3]的中心议题. 文献[3]的引言中说:"我们将证明一个数学定理. 由于该定理给出一个全新的量子力学与经典力学间的对应关系,姑且称为等价定理. 该定理如下:当一连续谱量子体系具有某一确定能量 E_0 时,力学量 f 随时间的演化$\langle f\rangle_{E_0}$在极限

$$\hbar \to 0,\ 能量\ E_0 = 经典能量\ E_0 \tag{15}$$

下将精确地服从牛顿力学". 这里$\langle f\rangle_{E_0}$由(1)—(4)式给出(或见文献[3]的(2)—(4)式). 如果要证明这个定理至少要证明如下命题:在特定的极限(15)之下,力学量 x^n 的"观测值"$\langle x^n\rangle_{E_0}$恰等于力学量 x 的"观测值"$\langle x\rangle_{E_0}$的 n 次方. 为说明所述命题和定理成立,文献[3]从本文(1)—(4)式"推证"出如下结论：

$$\langle x^n\rangle_{E_0} = \langle x\rangle^n_{E_0} + O(\hbar^2) \quad n = 2,3,4,\cdots \tag{16}$$

(见文献[3]的(10)式),这里的 $O(\hbar^2)$当 $\hbar\to 0$ 时是与 $\hbar^2$ 同阶的无穷小. (16)式的证明过程见文献[3]的附录一.

然而,文献[3]附录一对(16)式的证明是错误的,"等价定理"实际上不成立. 对此,我们举反例说明之:把(5)式等号右边乘以相因子 $\exp(\mathrm{i}\beta E^2)$($\beta$ 是任一实常数),得到

$$\psi_{E,\beta}(x) = \alpha(2\pi\sqrt{F})^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\exp[\mathrm{i}(u^3/3 - \alpha xu - \alpha Eu/F) + \mathrm{i}\beta E^2], \tag{17}$$

它仍是体系相应于能量值 E 的本征函数,并且这些

本征函数的集合仍是 δ 函数归一化的. 既然该本征函数集合符合"等价定理"关于(1)式的条件,当然可以由它按(2)和(3)式作成双波函数,不妨记如此作成的双波函数为 $\psi_{E_0,\beta}(x,t)$ 与 $\varphi_\beta(x,t)$,并且把由此双波函数按(4)式算出的"力学量 f 的观测值"记作 $\langle f\rangle_{E_0,\beta}$. 我们已在本文附录 A 中算得 $[x]_{E_0,\beta}=\int \mathrm{d}x\varphi_\beta^*(x,t)x\psi_{E_0,\beta}(x,t)$ 与 $\langle x\rangle_{E_0,\beta}$ 以及 $\langle x^2\rangle_{E_0,\beta}$ 为如下结果:

$$[x]_{E_0,\beta}=F(t-t_0-2E_0\beta\hbar)^2/2m - E_0/F+\mathrm{i}(F\beta\hbar^2/m), \tag{18}$$

$$\langle x\rangle_{E_0,\beta}=F(t-t_0-2E_0\beta\hbar)^2/2m - E_0/F, \tag{19}$$

$$\langle x^2\rangle_{E_0,\beta}=\langle x\rangle^2_{E_0,\beta}+(F/m)^2(-3\beta^2\hbar^4). \tag{20}$$

它们分别为附录 A 的(A·4)和(A·5)式以及(A·8)式. 若取 $\beta=\gamma/\hbar^3$, γ 是任一非零实常数,则由(18)—(20)式得到

$$[x]_{E_0,\beta}=\langle x\rangle_{E_0,\beta}+\mathrm{i}(F\gamma\hbar^{-1}/m), \tag{21}$$

$$\langle x^2\rangle_{E_0,\beta}=\langle x\rangle^2_{E_0,\beta}+(F/m)^2(-3\gamma^2\hbar^{-2}). \tag{22}$$

由(21)式立即可以发现,文献[3]附录一对(16)式的证明从一开始就错了,那里所依据的那个(A.3)式:

$$[f]_{E_0}=\int\varphi^*(x,t)\hat{f}\psi_{E_0}(x,t)\mathrm{d}x =\langle f\rangle_{E_0}+\mathrm{i}O(\hbar^{2k+1})\quad k=0,1,2,\cdots, \tag{23}$$

实际上不成立,它与严格算出的(21)式相矛盾. 特别是,(22)式等号最右边的项为 $O(1/\hbar^2)$,并非(16)式等号最右边的项 $O(\hbar^2)$,即(16)式实际不成立;又(22)式当 $\hbar\to0$ 时其中的 $O(1/\hbar^2)\to\infty$,这意味着:在极限(15)下,力学量 x^2 的"观测值" $\langle x^2\rangle_{E_0,\beta}$ 远不等于力学量 x 的"观测值" $\langle x\rangle_{E_0,\beta}$ 的 2 次方,此种情况与牛顿力学尖锐矛盾,更谈不上"力学量 f 随时间的演化 $\langle f\rangle_{E_0,\beta}$ 精确地服从牛顿力学". 正如文献[3]所说,"等价定理"是一个条件和结论都非常明确的数学定理. 从它的条件能否推出它的结论实际是一个数学问题. 由(17)式作成的双波函数符合"等价定理"的条件,然而所算得的结果不符合"等价定理"的结论,这说明"等价定理"实际上是不成立的. 事实上,集合(1)中诸能量本征函数的相对相位的选取有无限多个可能,从而所作出的双波函数有无限多个花样,从这些双波函数所作出的力学量观测值预言往往很不相同,我们根本就不能指望它们在极限过程(15)下有满足牛顿力学的同一极限. 换言之,不给出集合(1)中诸能量本征函数相对相位应如何选取的一般规则,是作不出"双波描述在特定极限(15)下将化为经典力学描述"这样的一般性结论的.

从另一方面说,上述相对相位的选取规则问题又用不着去解决,因为由本文第 3 节的论述可以看出,即使给出了选取规则使经典极限问题得到了解决,该理论的预言仍然不可能与通常量子力学相容,它仍然不是一个正确描述量子行为的量子理论.

附录 A 均匀场中单粒子体系的双波计算

对于均匀场 $V(x)=-Fx$ 中的单粒子体系,由能量本征函数(17)式按(2)和(3)式所作成的双波函数为

$$\psi_{E_0,\beta}(x,t)=(\alpha/2\pi\sqrt{F})^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\exp\{[u^3/3-\alpha xu - \alpha E_0u/F]-\mathrm{i}E_0(t-t_0)/\hbar+\mathrm{i}\beta E_0^2\},$$

$$\varphi_\beta(x,t)=\int\mathrm{d}E\psi_{E,\beta}(x,t).$$

根据广义函数理论中积分号交换的规则,由上面的双波函数可知

$$\begin{aligned}[x^n]_{E_0,\beta}&=\int\mathrm{d}x\varphi_\beta^*(x,t)x^n\psi_{E_0,\beta}(x,t)\\ &=(\alpha^2/4\pi^2F)\int\mathrm{d}E\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v\left\{\int\mathrm{d}x\exp[\mathrm{i}(-\alpha xu+\alpha xv)]x^n\right\}\\ &\quad\cdot\exp[\mathrm{i}(u^3/3-v^3/3-\alpha E_0u/F+\alpha Ev/F)]\\ &\quad\cdot\exp\{[-(E_0-E)(t-t_0)/\hbar+\beta(E_0^2-E^2)]\}.\end{aligned} \tag{A.1}$$

(A.1)式等号右边大括号内的积分为

$$\int\mathrm{d}x\exp[\mathrm{i}(-\alpha xu+\alpha xv)]x^n =\int\mathrm{d}x\frac{1}{(\mathrm{i}\alpha)^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}v^n}\exp[\mathrm{i}(-\alpha xu+\alpha xv)]=\frac{2\pi}{(\mathrm{i}\alpha)^n\alpha}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}v^n}\delta(v-u),$$

把此式代入(A.1)式,并完成对 v 的积分得到

$$\begin{aligned}[x^n]_{E_0,\beta}&=\frac{\alpha}{2\pi F(\mathrm{i}\alpha)^n}\int\mathrm{d}E\exp\{[(E-E_0)(t-t_0)/\hbar - \beta(E^2-E_0^2)]\}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u(-1)^n\left\{\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}v^n}\exp[\mathrm{i}(u^3/3 - v^3/3-\alpha E_0u/F+\alpha Ev/F)]\right\}_{v=u}.\end{aligned} \tag{A.2}$$

由(A.2)式取 $n=1$ 得到

$$\begin{aligned}[x]_{E_0,\beta}&=(1/2\pi F)\int\mathrm{d}E\exp\{[(E-E_0)(t-t_0)/\hbar-\beta(E^2-E_0^2)]\}\\ &\quad\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\exp[\mathrm{i}\alpha(E-E_0)u/F](u^2-\alpha E/F)\\ &=(1/2)\pi F)\int\mathrm{d}E\exp\{[(E-E_0)(t-t_0)/\hbar-\beta(E^2-E_0^2)]\}\\ &\quad\cdot\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\frac{1}{(\mathrm{i}\alpha/F)^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}E^2}\exp[\mathrm{i}\alpha(E-E_0)u/F] - 2\pi\delta(\alpha(E-E_0)/F)(\alpha E/F)\right\}\\ &=(1/2\pi F)\int\mathrm{d}E\exp\{[(E-E_0)(t-t_0)/\hbar-\beta(E^2-E_0^2)]\}\end{aligned}$$

$$\cdot\left\{-\frac{2\pi F^3}{\alpha^3}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}E^2}\delta(E-E_0)-2\pi E\delta(E-E_0)\right\}$$
$$=\left(-\frac{F^2}{\alpha^3}\right)\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}E^2}\exp\{[(E-E_0)(t-t_0)/\hbar-\beta(E^2-E_0^2)]\}\right\}_{E=E_0}-E_0/F, \quad (A.3)$$

把 $\alpha=(2mF/\hbar^2)^{1/3}$ 代入(A.3)式,化简得到

$$[x]_{E_0,\beta}=F(t-t_0-2E_0\beta\hbar)^2/2m-E_0/F+\mathrm{i}(F\beta\hbar^2/m). \quad (A.4)$$

由(4)式立即可知

$$\langle x\rangle_{E_0,\beta}=\mathrm{Re}[x]_{E_0,\beta}=F(t-t_0-2E_0\beta\hbar)^2/2m-E_0/F. \quad (A.5)$$

由(A.2)式取 $n=2$,用与上面相同的方法可算得到

$$\begin{aligned}[x^2]_{E_0,\beta}=&[F(t-t_0-2E_0\beta\hbar)^2/2m]^2\\&-2[F(t-t_0-2E_0\beta\hbar)^2/2m](E_0/F)\\&+(E_0/F)^2+(F/m)^2(-3\beta^2\hbar^4)\\&+\mathrm{i}\{[F(t-t_0-2E_0\beta\hbar)^2/2m](F/m)(6\beta\hbar^2)\\&+(t-t_0-4E_0\beta\hbar)\hbar/m\};\end{aligned} \quad (A.6)$$

$$\begin{aligned}\langle x^2\rangle_{E_0,\beta}=&[F(t-t_0-2E_0\beta\hbar)^2/2m]^2\\&-2[F(t-t_0-2E_0\beta\hbar)^2/2m](E_0/F)\\&+(E_0/F)^2+(F/m)^2(-3\beta^2\hbar^4).\end{aligned} \quad (A.7)$$

由(A.7)及(A.5)式立即可知

$$\langle x^2\rangle_{E_0,\beta}=\langle x\rangle^2_{E_0,\beta}+(F/m)^2(-3\beta^2\hbar^4). \quad (A.8)$$

用同法还可算出 $\langle x^n\rangle_{E_0,\beta}$,$\langle p^n\rangle_{E_0,\beta}$($\forall n\in N$)等.

[1] X.Y. Huang, *Scientia Sinica* (*Ser*. A), **XXXI**(1988), 1141 [黄湘友,中国科学(A 辑),(3)(1988),313].

[2] X. Y. Huang, New Ponderation on Quantum Mechanics (Sichuan Science and Technology Press, Chengdu, 1989) (in Chinese) [黄湘友,量子力学新探(四川科学技术出版社,成都,1989)].

[3] Q.H. Liu, *Acta Physica Sinica*, **41**(1992), 697 (in Chinese) [刘全慧,物理学报,**41**(1992),697].

[4] Q.H. Liu, F.B. Wang, *Acta Physica Sinica*, **40**(1991), 1562 (in Chinese) [刘全慧、王发伯,物理学报,**40**(1991),1562].

[5] X.Y. Huang, Q. H. Liu, X. Tian, Z. P. Qiu, *Acta Physica Sinica*, **42**(1993), 180 (in Chinese) [黄湘友、刘全慧、田旭、裘忠平,物理学报,**42**(1993),180].

[6] Q.H. Liu, *Acta Physica Sinica*, **42**(1993), 522 (in Chinese) [刘全慧,物理学报,**42**(1993),522].

[7] X. Y. Huang, X. Tian, C. L. Hu, *Acta Physica Sinica*, **43**(1994), 1913 (in Chinese) [黄湘友、田 旭、胡城立,物理学报,**43**(1994),1913].

[8] K.Z. Lin, *Acta Physica Sinica*, **45**(1996), 360 (in Chinese) [林琨智,物理学报,**45**(1996),360].

[9] X.Y. Huang, *Acta Physica Sinica*, **45**(1996), 729 (in Chinese) [黄湘友,物理学报,**45**(1996),729].

[10] C.Y. Chen, Y.W. Liu, *Acta Physica Sinica*, **47**(1998), 536 (in Chinese) [陈昌远、刘友文,物理学报,**47**(1998),536].

[11] X.Y. Huang *et al*., *Acta Physica Sinica*, **48**(1999), 566 (in Chinese) [黄湘友等,物理学报,**48**(1999),566].

[12] Q.X. Wu, *Acta Physica Sinica*, **49**(2000), 190 (in Chinese) [吴奇学,物理学报,**49**(2000),190].

[13] C.J. Huang, J. F. Li, H. Y. He, *Acta Physica Sinica*, **49**(2000), 819 (in Chinese) [黄春佳、厉江帆、贺慧勇,物理学报,**49**(2000),819].

[14] L. Landau, E. Lifshiz, Quantum Mechanics (Pergamon Press, New York, 1974).

[15] F.H. Liang, *Science in China* (*Ser*. A), **30**(2000), 475 (in Chinese) [梁方豪,中国科学(A 辑),**30**(2000),475].

A DISCUSSION ABOUT THE PAPER" DETERMINISTIC PROPERTIES CONTAINER IN QUANTUM SYSTEMS WITH CONTINUOUS SPECTRUM "

LIANG FANG-HAO
(*Department of Mathematics*, *Shandong University*, *Jinan* 250100, *China*)
(Received 13 September 1999; revised manuscript received 13 July 2000)

ABSTRACT

For a single particle system with continuous energy spectrum, the paper " Deterministic Properties Contained in Quantum Systems with Continuous Spectrum "uses the" double wave functions "to describe the quantum behavior of each particle in the ensemble staying in an energy eigenstate. And the" equivalence theorem "in the paper points out that the double wave description will become the classical mechanics description in the classical limit. However, the statistical distribution of results of measurement of a physical quantity predicted by the double wave description for the ensemble is very different from that predicted by the usual quantum mechanics. And the proof given in the paper for the" equivalence theorem "is incorrect. Actually, this theorem is not true.

Keywords: quantum system with continuous energy spectrum, double wave functions, classical limit
PACC: 0365