第 50 卷 第 4 期 2001 年 4 月
1000-3290/2001/50(04)/0577-09
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.50, No.4, April, 2001


# 具有物理背景的高维 Painlevé 可积模型*

阮航宇[1)2)] 陈一新[2)]

[1)](宁波大学物理系, 宁波 315211)[†]

[2)](浙江大学近代物理中心, 杭州 310027)

(2000 年 2 月 2 日收到; 2000 年 8 月 4 日收到修改稿)

提出了一种求解任意维数非线性模型的"Möbious"变换下不变的渐进展开方法,并可同时获得许多新的与原模型有着相同维数的 Painlevé 可积模型. 取(2+1)维 KdV-Burgers(KdVB)方程和 Kadomtsev-Petviashvili(KP)方程为具体例子,获得了一些新的具有 Painlevé 性质的高维"Möbious"变换下不变的方程及原模型的近似解. 在某些特殊情况下,某些近似解可以成为精确解.

关键词: 高维可积模型, "Möbious"不变, 近似方法

PACC: 0220, 0230

## 1 引 言

1+1 维和 2+1 维中的可积模型已被许多数学家和物理学家进行了透彻的研究,并且被广泛应用于自然科学的许多领域. 如凝聚态物理[1], 流体力学[2], 等离子体物理[3], 光学[4], 通讯[5], 化学和生物学[6]. 然而除了自对偶的"2+2"维 Yang-Mills 场方程[7], 至今还未发现真正有意义的 $n+1$ 维($n\geqslant 3$)非平凡的非线性可积模型. 由于实际的物理空间是 3+1 维的,许多物理学家和数学家长期以来一直在试图寻找某些非平凡的 3+1 维可积模型[8-10]. 但进展不大.

最近,楼森岳提出了一些寻找在某些特殊条件下非平凡高维可积模型的可能方向. 如依据所有已知的 2+1 维可积模型拥有一个共同的广义 Virasoro 类型对称代数[11], 提出了在拥有广义 Virasoro 对称代数意义下得到某些可积模型的普遍方法[12]. 使用与对称限制有关的内部参数,得到了一些与原方程相同维数或更高维数的可积模型[13]. 依据从 1+1 维和 2+1 维可积模型对称约化得到的常微分方程总是可以被归并到 Riccati 方程和 Painlevé Ⅰ-Ⅵ型方程[14], 楼森岳提出了所有的高维可积模型可以看作是一小组可积常微分方程变形结果. 并从 Riccati 方程 $\phi_t=\phi^2$ 出发,经过简单形变得到了 1+1 维和 2+1 维 sinh-Gordon 方程和 Mikhcilov-Dodd-Bullough(MDB)方程[15]. 根据所有的 1+1 维和 2+1 维可积模型都拥有"Möbious"不变的 Schwartz 形式,楼森岳认为从"Möbious"不变性出发也许是获得高维可积模型的最方便的形式之一[16]. 他将"Möbious"不变性与推广的 Painlevé 分析方法结合在一起. 从低维模型得到了许多高维 Painlevé 可积模型[17,18].

楼森岳在寻求高维可积模型方向上做了不少开创性工作. 但也存在着一些急待解决的重要问题. 其中之一就是从推广的 Painlevé 分析获得的高维 Painlevé 可积模型的物理含义是什么? 它们能否描述真实的非线性物理现象? 我们知道大部分 1+1 维和 2+1 维可积模型是从相同维数或更高维数的实际物理模型中忽略某些不很重要的因素得到的. 这就给了我们一个很好的启示, 3+1 维可积模型也许能够从实际的 3+1 维模型中经过合理的近似得到. 我们认为将"Möbious"不变理论与推广的 Painlevé 分析方法结合起来用于实际的物理问题应该是寻找具有物理背景高维可积模型的可能途径之一.

本文将"Möbious"变换下不变的 Painlevé 分析

* 国家自然科学基金(批准号: 19875041), 浙江省自然科学基金(批准号: 100033), 教育部中青年骨干教师专项基金(批准号: C0001), 宁波博士基金(批准号: 0011016)资助的课题.

† 通讯地址.

方法用于实际的高维非线性物理问题，寻找一些可以作为实际物理问题近似的高维 Painlevé 可积模型. 为了使这种方法表述得更清楚，我们取 2+1 维 KdVB 方程[19]和 3+1 维 KP 方程[20]为具体例子作了详细介绍.

## 2 一般理论

对于一个给定的 $n+1$ 维 $N$ 阶的偏微分方程

$$F\left(x_0\equiv t, x_1, x_2, \cdots, x_n, u, u_{x_i}, u_{x_ix_j}, \cdots, u_{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_N}}\right)=0, \tag{1}$$

式中 $F$ 是场 $u$ 及其导数的多项式函数. 将(1)式的解在奇性流形 $\phi$ 附近展开，

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j\phi^{j+\alpha}, \tag{2}$$

$\alpha$ 是一个负整数. 将(2)式代入(1)式，可以获得一个决定展开系数 $u_j$ 的递推关系

$$G(j)u_j = f_j\left(x_i, \phi_{x_i}, \phi_{x_{i_1}x_{i_2}}, \cdots, u_1, u_2, \cdots, u_{j-1}\right)\equiv f_j, \tag{3}$$

式中 $G(j)$ 是 $j$ 的一个多项式函数. 如果 $G(j)=(j+1)(j-j_1)(j-j_2)\cdots(j-j_{N-1})$，且 $j_1, j_2, \cdots, j_{N-1}$ 都是正整数，并且共振条件

$$f_{j_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, N-1) \tag{4}$$

被确定满足，则方程(1)拥有 Painlevé 性质. 即使方程(1)是非可积的，从方程(3)仍能获得(1)式特殊解的递推公式. 这里，我们希望在递推公式(3)的帮助下，得到(1)式的一些近似解以及与(1)式相应的可积模型. 由于展开式(2)只在 $\phi$ 是小量时有效，我们忽略那些比 $\phi^{M+\alpha}$ 更高的项，且由 $u_M=0$ 来确定 $\phi$. 也就是说截断展开

$$u = \sum_{j=1}^{M} u_j\phi^{j+\alpha}, \quad u_M = 0 \tag{5}$$

能够被作为(1)式展开到 $\phi^{M+\alpha}$ 的一个近似解. 显然，$M$ 越大，解(5)式的精度越高. 在(5)式中的展开系数 $u_j$ 可由(1)式得到. 把方程(5)代入(1)式，可以获得 $\phi$ 级数形式的方程

$$\phi^{-K}\left[\sum_{j=1}^{M} F_j\phi^j + O(\phi^{M+1})\right] = 0, \tag{6}$$

式中 $K$ 由偏微分方程(1)的领头项决定，$F_j(j=0,1,2,\cdots,M)$ 是 $u_j(j=0,1,2,\cdots,M)$ 和 $\phi$ 的导数及 $u_j$ 的导数的多项式函数. 从 $F_j=0(j=0,1,2,\cdots,M)$ 解出的 $u_j$ 与(3)式给出的形式相同. 我们知道展开系数 $u_j$ 是 $\phi$，$\phi$ 的导数，$J\leqslant N-1$ 个任意函数 $u_{j_1}, u_{j_2}, \cdots, u_{j_{N-1}}$ 的函数. 如果原来的偏微分方程(1)具有 Painlevé 性质，任意函数 $u_j$ 的个数等于 $N-1$，否则 $J<N-1$. 所以若 $J=N-1$，并且 $M>j_{N-1}$，

$$u_M = 0 \tag{7}$$

是一个 $\phi$ 和任意函数 $u_{j_1}, u_{j_2}, \cdots, u_{j_{N-1}}$ 的一个方程. 方程(7)的解决定了(5)式的具体形式，这种形式可以作为方程(1)在忽略 $\phi^{M+1}$ 次以上项后的近似解(参看方程(6)). 一般来说，$N$ 阶偏微分方程的普遍解允许包含 $N$ 个任意函数. 由于任意函数由(7)式确定，我们的近似解只包含 $N-1$ 个任意函数. 若取 $M<j_{N-1}$，则近似解中含有的任意函数将会更少.

若原始的偏微分方程(1)是不可积的，那么 $J<N-1$，这意味着(3)式中 $N-1-J$ 个共振条件不满足，并且引入了关于 $J$ 个任意函数和 $\phi$ 的 $N-1-J$ 个附加条件. 在这种情况下，通过求解关于 $J$ 个任意函数和 $\phi$ 的 $N-1-J$ 个附加条件，仍可获得(1)式的某些近似解.

值得指出的是在将(5)式代入(1)式后，可以发现在我们的近似解中存在着一种特殊选择

$$u_0 = u_1 = \cdots = u_{-\alpha-1} = 0,$$

意味着这种选择相应的近似解在流形 $\phi=0$ 附近是解析的. 对于这种情况，我们总能够选择 $u_{-\alpha}$，$u_{-\alpha+1}, \cdots, u_{-\alpha+N-1}$ 为任意常数，由递推公式确定其他系数，而(1)式的近似解具有以下形式：

$$u = \sum_{j=0}^{\alpha+M} u_{-\alpha+j}\phi^j, \qquad u_M = 0.$$

最后值得指出的是，如果我们希望获得(1)式具有更高精度的特殊解，可以通过以下两种形式来固定任意函数：

(a)通过(3)式，$J$ 个任意函数由 $u_{M+1}=u_{M+2}\cdots=u_{M+J}=0$ 来确定，使得(6)式精确到 $\phi^{M+J}$ 项，有关的近似解精确到 $\phi^{M+J+\alpha}$ 项.

(b) $J$ 个任意函数可以从(6)式中合适地确定下来，使得截断展开(5)式成为原始偏微分方程(1)的一个精确解. 详见后面的例子.

由于可积模型存在着许多令人感兴趣的性质，我们希望方程(7)是可积的，至少在某些特殊意义下是可积的. 据了解，所有已知的 Painlevé 可积模型拥有"Möbious"不变的变形形式. 因此若(7)式在"Möbious"变换下不变，他也许是一个 Painlevé 可积模型. 由于奇性流形 $\phi$ 的任意性，有可能使得(7)式成为"Möbious"变换下不变的方程. 实际上，在 1+1

维情况下,Conte 已经把展开函数 $\phi$ 取为 $\xi=\left(\frac{\phi_x}{\phi}-\frac{\phi_{xx}}{2\phi_x}\right)^{-1}$,使得展开系数在"Möbious"变换下不变[21]. 类似地,我们可以把展开函数 $\phi$ 换为

$$\xi=\left(\frac{\phi_{x_n}}{\phi}-\frac{\phi_{x_nx_n}}{2\phi_{x_n}}\right)^{-1}, \tag{8}$$

式中 $x_n$ 表示变量($x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$)中的任何一个,而相应的近似展开(5)式应为

$$u=\sum_{j=0}^{M} u_j'\xi^{j+\alpha}. \tag{9}$$

从方程(8),不难证明下式:

$$\xi_{xi}=P_i-P_{ix_n}\xi+\frac{1}{2}(P_iS+P_{ix_nx_n})\xi^2$$
$$i=0,1,2,\cdots,n \tag{10}$$

成立,其中函数

$$P_i\equiv\frac{\phi_{x_i}}{\phi_{x_n}},$$

$$S\equiv\frac{\phi_{x_nx_nx_n}}{\phi_{x_n}}-\frac{3}{2}\left(\frac{\phi_{x_nx_n}}{\phi_{x_n}}\right)^2\equiv\{\phi,x_n\} \tag{11}$$

都是"Möbious"变换下不变的. 换句话说,$P_i$ 和 $S$ 在 Möbious 变换

$$\phi\to\frac{a+b\phi}{c+d\phi},\quad ad\neq bc \tag{12}$$

下是不变的. 由于展开式(9)中的系数 $u_j'$ 是 $P_i$,$S$ 和任意函数 $\{u_{j_1}', u_{j_2}', \cdots, u_{j_{N-1}}'\}$ 的函数,因而是"Möbious"变换下不变的. 因此与截断展开系数 $u_n'$ 有关的方程

$$u_M'=0 \tag{13}$$

是"Möbious"变换下不变的. 方程(13)是否是在 Painlevé 意义下可积,可用通常的或"Möbious"变换下不变的 Painlevé 分析做进一步的研究.

按照文献[16]中的观点,"Möbious"不变方程(13)可能是 Painlevé 可积的. 若(13)式被证明是 Painlevé 可积,那么方程(1)可由相同维数的 Painlevé 可积模型近似求解,近似解精度至 $\xi^{M+\alpha}$项.

# 3　关于两个不可积非线性模型的"Möbious"变换下不变的展开

## 3.1　2+1 维 KdVB 方程的"Möbious"变换下不变的展开

本节是前面介绍的一般理论在 2+1 维不可积 KdVB 方程[19]

$$u_t+puu_x+ru_{xx}-su_{xxx}+\epsilon u_{yy}=0 \tag{14}$$

的具体应用. 将(9)式代入(14)式并且取

$$\xi=\left(\frac{\phi_x}{\phi}-\frac{\phi_{xx}}{2\phi_x}\right)^{-1}. \tag{15}$$

我们知道(14)式中的 $u$ 能够展开为

$$u=\sum_{j=0}^{M} u_j\xi^{j-2}. \tag{16}$$

经领头项分析可得

$$u_0=\frac{12s}{p}\ \text{或}\ u_0=0. \tag{17}$$

从 $u_0=\frac{12s}{p}$出发,能够得到关于 $u_j$ 的递推关系. 前三个 $u_j$ 为

$$u_1=\frac{12r}{5p}, \tag{18}$$

$$u_2=-\frac{1}{25sp\phi_x^2}(25s\phi_t\phi_x-100s^2\phi_{xxx}\phi_x+r^2\phi_x^2$$
$$+150s^2\phi_{xx}^2+25\epsilon s\phi_y^2), \tag{19}$$

$$u_3=-\frac{1}{125p\phi_x^3}(125s\phi_x^2\phi_{xxxx}-500s\phi_x\phi_{xxx}\phi_{xx}+125\phi_x\phi_t\phi_{xx}$$
$$+375s\phi_{xx}^3+75r\phi_x\phi_{xx}^2-50r\phi_x^2\phi_{xxx}-125\phi_{xt}\phi_x^2$$
$$-r^3s^{-2}\phi_x^3+125\epsilon\phi_{xx}\phi_y^2-125\epsilon\phi_x^2\phi_{yy}). \tag{20}$$

为了得到(14)式的近似解,对于一个合适的 $M$,可以取 $u_M=0$. 并且由于 $\xi$ 是小量,可以忽略那些比 $\xi^{M-2}$更高的项. 取 $M=2$,$\phi$ 方程由 $u_2=0$ 给出,即

$$25s\phi_t\phi_x-100s^2\phi_{xxx}\phi_x+r^2\phi_x^2+150s^2\phi_{xx}^2+25\epsilon s\phi_y^2=0. \tag{21}$$

与上式相应的(14)式的近似解为

$$u=\frac{u_0}{\xi^2}+\frac{u_1}{\xi}. \tag{22}$$

若取 $M=3$,函数 $\phi$ 应满足

$$125s\phi_x^2\phi_{xxxx}-500s\phi_x\phi_{xxx}\phi_{xx}+125\phi_x\phi_t\phi_{xx}+375s\phi_{xx}^3$$
$$+75r\phi_x\phi_{xx}^2-50r\phi_x^2\phi_{xxx}-125\phi_{xt}\phi_x^2-r^3s^{-2}\phi_x^3$$
$$+125\epsilon\phi_{xx}\phi_y^2-125\epsilon\phi_x^2\phi_{yy}=0. \tag{23}$$

而(14)式的近似解则为

$$u=\frac{u_0}{\xi^2}+\frac{u_1}{\xi}+u_2. \tag{24}$$

如果把拥有 $u_0=0$ 的(16)式代入(14)式,可以发现 $u_1=0$,$u_2$,$u_3$,$u_4$,$u_5$ 可取为任意函数. 取

$$u_2=a_2,\ u_3=a_3,\ u_4=a_4,\ u_5=a_5, \tag{25}$$

那么 $u_6=0$ 所对应的方程具有以下形式:

$$2a_3^2p\phi_x^3-4\epsilon a_3\phi_x\phi_y\phi_{xy}+2\epsilon a_3\phi_x^2\phi_{yy}+2\epsilon a_3\phi_y^2\phi_{xx}$$

$$- 3ra_3\phi_x\phi_{xx}^2 - 18sa_3\phi_{xx}^3 + 4a_4a_2p\phi_x^3 - 6sa_3\phi_x^2\phi_{xxxx} + 24sa_3\phi_x\phi_{xx}\phi_{xxx} + 2ra_3\phi_x^2\phi_{xxx} + 24sa_4\phi_x\phi_{xx}^2 - 16sa_4\phi_x^2\phi_{xxx} + 4a_4\phi_t\phi_x^2 + 12ra_5\phi_x^3 + 4\epsilon a_4\phi_x\phi_y^2 = 0, \tag{26}$$

式中 $a_2$，$a_3$，$a_4$ 和 $a_5$ 是任意常数. 与此相应的(14)式的近似解为

$$u = a_2 + a_3\xi + a_4\xi^2 + a_5\xi^3. \tag{27}$$

### 3.2 3+1 维 KP 方程的'Möbious'变换下不变的展开

3+1 维 KP 方程

$$(u_t + 6uu_x + 6u_{xxx})_x + hu_{yy} + ku_{zz} = 0 \tag{28}$$

描述了等离子体和超流中孤子及非线性波的动力学[20,22]. 当 $u$ 不依赖于 $z$ 时，方程(28)是完全可积的，利用反散射方法，双线性方法等可以获得许多种解. 然而由于方程(28)的不可积性，要给出该方程的某些精确解是困难的. 一些作者通过数值方法对该方程进行求解[23]. 在这里，我们将使用'Möbious'变换下不变的展开近似地和解析地研究 3+1 维不可积 KP 方程. 将(15)式代入(28)式，发现(28)式中的 $u$ 能够展开为

$$u = \sum_{j=0}^{M} u_j\xi^{j-2}, \tag{29}$$

式中 $u_0$ 应取为

$$u_0 = -2P_1^2 \text{ 或 } u_0 = 0, \tag{30}$$

从 $u_0 = -2P_1^2$ 出发，能够得到关于 $u_j$ 的递推关系

$$(j+1)(j-4)(j-5)(j-6)u_j = f_j(S, P_i, P_{ix_i}, \cdots, u_0, \cdots, u_{j-1}) \equiv f_j, \tag{31}$$

式中 $f_j$ 是括号内变量的一个复杂函数. 由于(31)式中的所有展开系数 $u_j$ 是 $P_i$，$S$ 和 $\{u_{j_1}, u_{j_2}, \cdots\}$ 的函数，展开系数 $u_j$ 是'Möbious'变换下不变的. $u_j$ 的前三个表达式为

$$u_1 = 2P_1P_{1x} + 2P_{1x}, \tag{32}$$

$$u_2 = -\frac{1}{6P_1^2}(4SP_1^4 + 4P_1^3P_{1xx} + P_{1x}^2P_1^2 + 4P_1^2P_{1xx} + P_1P_0 + 2P_{1x}^2P_1 + kP_3^2 + hP_2^2 - 3P_{1x}^2 + 4P_{1xx}P_1), \tag{33}$$

$$\begin{aligned} u_3 = \frac{1}{24P_1^4}(&16hP_1P_{1y}P_2 - 20hP_{1x}P_1P_2^2 + 20kP_1^2P_3P_{3x} + 16xP_1P_{1z}P_3 + 20hP_1^2P_{2x}P_2 - 16hP_1P_2P_{2x} \\ &- 16kP_1P_3P_{3x} - 20kP_{1x}P_1P_3^2 - 4kP_{1x}P_3^2 - 4hP_{1x}P_2^2 + 4kP_1^2P_{3z} + 4hP_1^2P_{2y} - 8P_1^2P_{0x} + 4P_1^2P_{1xxx} \\ &+ 4P_1^3P_{1xxx} - 8P_1^2P_{1xx}P_{1x} + 4P_{1x}^3P_1 - 16P_1P_{1xx}P_{1x} + 12P_1^3P_{0x} + 8P_1^4P_{1x}S + 12P_1^2P_{0t} \\ &+ 4P_1^4P_{1xxx} + 4P_1^5S_x - 12P_1^2P_0P_{1x} - 4P_{1x}P_1P_0 + 12P_{1x}^3). \end{aligned} \tag{34}$$

将(11)，(32)–(34)式代入(31)式，可以发现

$$f_4 = f_5 = 0, f_6 \neq 0, \tag{35}$$

这意味着 3+1 维 KP 方程(28)不具有 Painlevé 可积性.

为了得到(28)式的近似解，对于合适的 $M$，可以取 $u_M = 0$. 并且由于 $\xi$ 是小量，忽略那些比 $\xi^{M-2}$ 更高的项. 取 $M=2$，$\phi$ 方程由 $u_2 = 0$ 给出，即

$$\{\phi, x\} + \frac{\phi_t}{4\phi_x} + k\frac{\phi_z^2}{4\phi_x^2} + h\frac{\phi_y^2}{4\phi_x^2} = 0, \tag{36}$$

而(28)式的相应近似解为

$$u = \frac{u_0}{\xi^2} + \frac{u_1}{\xi}. \tag{37}$$

取 $M=3$，函数 $\phi$ 应满足

$$\left(\frac{\phi_t}{\phi_x} + \{\phi; x\} + \frac{h}{2}\frac{\phi_y^2}{2\phi_x^2} + \frac{k}{2}\frac{\phi_z^2}{2\phi_x}\right)_x + h\left(\frac{\phi_y}{\phi_x}\right)_y + k\left(\frac{\phi_z}{\phi_x}\right)_z = 0. \tag{38}$$

与上式相应的(28)式的近似解为

$$u = \frac{u_0}{\xi^2} + \frac{u_1}{\xi} + u_2. \tag{39}$$

若把拥有 $u_0 = 0$ 的(29)式代入(28)式，可以发现 $u_1 = 0$，而 $u_2$，$u_3$，$u_4$，$u_5$ 能被取为任意函数. 取

$$u_2 = a_1, \ u_4 = a_2, \ u_3 = u_5 = 0, \tag{40}$$

那么 $u_6 = 0$ 所对应的方程具有以下形式：

$$6a_1 + 4\frac{\phi_{xxx}}{\phi_x} - 6\frac{\phi_{xx}^2}{\phi_x^2} + \frac{\phi_t}{\phi_x} + h\frac{\phi_y^2}{\phi_x^2} + k\frac{\phi_z^2}{\phi_x^2} = 0, \tag{41}$$

式中 $a_1$ 和 $a_2$ 是任意常数. (28)式相应的近似解为

$$u = a_1 + a_2\xi^2. \tag{42}$$

精度至 $\xi^4$ 项，其中 $a_1$，$a_2$ 为任意常数.

当 $\phi$ 不依赖 $z$(或 $y$)，方程(38)正好是 Schwartz 形式的 KP 方程. 若 $\phi$ 既不依赖 $y$ 又不依赖 $z$，那么方程(36)和(41)都可约化为 1+1 维 Schwartz KdV 方程.

## 4 诱导方程的 Painlevé 可积性

显然(21),(23),(26),(36),(38)和(41)式都是“Möbious”变换下不变的. 在文献[24]中,楼森岳指出许多种十分普遍的‘Möbious’变换下的不变形式是 Painlevé 可积的. 现在我们希望知道是否这些实际模型的近似方程(21),(23),(26),(36),(38)和(41)是 Painlevé 可积的. 实际上方程(36)正好是文献[25]的一种特例,所以(36)式是 Painlevé 可积的. 为了证明其余五个方程的 Painlevé 可积性,我们将它们稍稍作一点扩大形成某些更普遍的系统. 与(21)式相应的稍稍扩大化的系统为

$$r^2H + 25sLH + 25\epsilon sV^2 - 100sHH_{xx} + 50s^2H^4 + 150s^2H_x^2 = 0, \tag{43}$$

$$H_t = L_x, \tag{44}$$

$$V_t = L_y. \tag{45}$$

方程(43)可直接从(21)式中通过变换

$$\phi = \exp(f), f_x = H, f_y = V, f_t = L \tag{46}$$

得到. 方程(44)和(45)是变换(44)和(45)式的两个自洽条件. 由于变换(46)式存在着其他的自洽条件 $H_y = V_x$,尽管关系式 $H_{yt} = V_{xt}$ 由(44)和(45)式确保,我们仍称(43)—(45)式为(21)式的扩大化系数. 换言之,只有(43)—(45)式解的一个子集与(21)式的解集同构. 同理,与方程(26)和(28)相应的扩大化系统为

$$375s^3H_x^3 - 500s^3HH_xH_{xx} - 125s^3H^4H_x + 125s^2\epsilon V^2H_x - 125\epsilon s^2H^2V_y + 75s^2rHH_x^2 + 25s^2rH^5 - 125s^2H^2H_t + 125s^2HLH_x + 125s^3H^2H_{xxx} - 50s^2rH^2H_{xx} - H^3r^3 = 0, \tag{47}$$

$$H_t = L_x, \tag{48}$$

$$V_t = L_y \tag{49}$$

和

$$-4a_4a_2pH^3 + 16sa_4H^2H_{xx} - 6sa_3H^4H_x - 2\epsilon a_3V^2H_x + 18sa_3H_x^3 + 3ra_3HH_x^2 + ra_3H^5 - 24sa_4HH_x^2 - 2ra_3H^2H_{xx} - 8sa_4H^5 - 2\epsilon a_3H^2V_y + 4\epsilon a_3VHH_y - 24sa_3HH_xH_{xx} + 6sa_3H^2H_{xxx} - 2a_3^2pH^3 - 4a_4LH^2 - 4\epsilon a_4V^2H - 12a_5rH^3 = 0, \tag{50}$$

$$H_t = L_x, \tag{51}$$

$$V_t = L_y. \tag{52}$$

与(38)和(41)式相应的扩大化系统具有以下形式:

$$C_x(C^4 + hV^2 + LC + kW^2 + 4CC_{xx} - 3C_x^2) - C^2(C_{xxx} + L_x + aV_y + kW_z) = 0, \tag{53}$$

$$C_t = L_x, \tag{54}$$

$$V_t = L_y \tag{55}$$

$$W_t = L_z \tag{56}$$

和

$$6a_1C^2 + 4CC_{xx} - 2C^4 - 6C_x^2 + LC + hV^2 + kW^2 = 0, \tag{57}$$

$$C_t = L_x, \tag{58}$$

$$V_t = L_y \tag{59}$$

$$W_t = L_z. \tag{60}$$

同理(53)和(57)式可直接从(38)和(41)式中通过下列变换:

$$\phi = \exp(f), f_x = C, f_y = V, f_z = W, f_t = L \tag{61}$$

得到,方程组(54)—(56),(58)—(60)是变换(61)式的三个自洽条件. 采用标准的 Painlevé 分析,我们能够证明所有的与(21),(23),(26),(38)和(41)式有关的扩大化系统都拥有 Painlevé 性质. 经过对(43)—(45)式的领头项分析,我们知道 $H, L, V$,应该展开为

$$H = \sum_{j=0}^{\infty} C_j\phi^{j-1}, L = \sum_{j=0}^{\infty} L_j\phi^{j-1}, V = \sum_{j=0}^{\infty} V_j\phi^{j-1}, \tag{62}$$

且

$$H_0 = \pm \phi_x, V_0 = \pm \phi_y, L_0 = \pm \phi_t. \tag{63}$$

将(62)式代入(43)—(45)式,可以看出共振发生在

$$j = -1, 1, 1, 1. \tag{64}$$

$j = 1$ 的共振条件为

$$-H_{0x}\phi_x + 2H_0^2H_1 + H_0\phi_{xx} - 2H_1\phi_x^2 = 0, \tag{65}$$

$$H_{0t} = L_{0x}, \tag{66}$$

$$V_{0t} = L_{0y}. \tag{67}$$

显然(65)—(67)式是确定满足的. 因此方程系统(43)—(45)拥有 Painlevé 性质,即系统(43)—(45)式是 Painlevé 可积的,因而它的狭窄系统(21)式自然是 Painlevé 可积的. 将(62)式代入(47)—(49)式,可以看到共振发生在

$$j = -1, 1, 1, 1, 2. \tag{68}$$

在 $j = 1, 2$ 的共振条件为

$$rH_0^3 - 5H_0^2 sH_{0x} + 20sH_0^2 H_1\phi_x + 10sH_0\phi_x\phi_{xx} - rH_0\phi_x^2 - 5sH_{0x}\phi_x^2 - 20sH_1\phi_x^3 = 0, \tag{69}$$

$$V_{0t} - L_{0y} = 0, \tag{70}$$

$$H_{0t} - L_{0x} = 0, \tag{71}$$

$$\begin{aligned}&- 5sH_0^3H_{1x} + 15sH_0^3H_2\phi_x + 5rH_0^3H_1 + 30sH_0^2H_1\phi_x - 20sH_0^2H_1H_{0x} - 5sH_0^2\phi_{xxx} + 2sH_0^2\phi_{xx}\\ &- 5H_0^2\phi_t - 15sH_0H_2\phi_x^3 + 5sH_0H_{0x}\phi_{xx} + 5sH_0H_{0xx}\phi_x + 40sH_0H_1\phi_x\phi_{xx} + 5sH_0\phi_x^2H_{1x} + 5H_0L_0\phi_x\\ &- 5rH_0H_1\phi_x^2 + 5\epsilon H_0V_0\phi_y - 2sH_0H_{0x}\phi_x - 5sH_{0x}^2\phi_x - 20sH_1H_{0x}\phi_x^2 - 30s\phi_x^3H_1 - 5\epsilon V_0^2\phi_x = 0.\end{aligned} \tag{72}$$

考虑到(63),(67)—(69)式也是自然满足的,所以方程(23)也是一个 Painlevé 可积模型. 把(62)式代入(50)—(52)式,我们看到所有五个需要的共振发生在

$$j = -1,1,1,1,2. \tag{73}$$

相应的共振条件

$$\begin{aligned}&8sa_4H_0^3 - ra_3H_0^3 + 6sa_3H_0^2H_{0x} - 24sa_3H_0^2H_1\phi_x + ra_3H_0\phi_x^2\\ &- 8sa_4H_0\phi_x^2 + 6sa_3\phi_x^2H_{0x} + 24sa_3H_1\phi_x^3 - 12sa_3H_0\phi_x\phi_{xx} = 0,\end{aligned} \tag{74}$$

$$H_{0t} = L_{0x}, \tag{75}$$

$$V_{0t} = L_{0y}, \tag{76}$$

$$\begin{aligned}&- 5ra_3H_0^3H_1 - 18sa_3H_0^3H_2\phi_x + 40sa_4H_0^3H_1 + 6sa_3H_0^3H_{1x} + 24sa_3H_0^2H_1H_{0x} - 36sa_3H_0^2H_1^2\phi_x\\ &+ 6sa_3H_0^2\phi_{xxx} + 16sa_4H_0^2\phi_{xx} - 2ra_3H_0^2\phi_{xx} - 16sa_4H_0\phi_xH_{0x} - 6sa_3H_0H_{0xx}\phi_x + 2\epsilon a_3H_0V_0\phi_y\\ &- 48sa_3H_0H_1\phi_x\phi_{xx} - 40sa_4H_0H_1\phi_x^2 + 2ra_3H_0\phi_xH_{0x} - 6sa_3H_0H_{0x}\phi_{xx} + 18sa_3H_0H_2\phi_x^3\\ &+ 5ra_3H_0H_1\phi_x^2 + 36sa_3H_1^2\phi_x^3 - 6sa_3H_0H_{1x}\phi_x^2 + 24sa_3H_1H_{0x}\phi_x^2 - 2\epsilon a_3V_0^2\phi_x + 6sa_3H_{0x}^2\phi_x = 0.\end{aligned} \tag{77}$$

方程组(74)—(77)是自洽的,也就是说方程(26)是一个 Painlevé 可积模型.

为了检验方程组(53)—(56)和(57)—(60)的 Painlevé 性质,我们需要将变量 $C, L, W, V$ 展开为

$$C = \sum_{j=0}^{\infty} C_j\phi^{j-1}, L = \sum_{j=0}^{\infty} L_j\phi^{j-1},$$

$$W = \sum_{j=0}^{\infty} W_j\phi^{j-1}, V = \sum_{j=0}^{\infty} V_j\phi^{j-1}, \tag{78}$$

且

$$C_0 = \pm\phi_x, V_0 = \pm\phi_y, W_0 = \pm\phi_z, L_0 = \pm\phi_t. \tag{79}$$

将(78)式代入(53)—(56)式,发现共振发生在

$$j = -1,1,1,1,1,2. \tag{80}$$

$j=1,2$ 的共振条件为

$$\begin{aligned}&C_0^2(-2\phi_x\phi_{xx}C_0 + C_{0x}(\phi_x^2 + C_0^2)\\ &+ 4C_1\phi_x^3 - 4C_0C_1\phi_x) = 0,\end{aligned} \tag{81}$$

$$C_{0t} = L_{0x}, \tag{82}$$

$$V_{0t} = L_{0y}, \tag{83}$$

$$W_{0t} = L_{0z}, \tag{84}$$

$$\begin{aligned}&C_0^3\phi_{xxx} - C_0^2C_{0x}\phi_{xx} - C_0^2\phi_xC_{0xx} - 8C_1C_0^2\phi_x\phi_{xx}\\ &+ C_0^3\phi_t + kC_0^2W_0\phi_z + hC_0^2V_0\phi_y + C_{1x}(-C_0^2\phi_x^2\\ &+ C_0^4) + C_0C_{0x}^2\phi_x + C_{0x}(4C_1C_0\phi_x^2 + 4C_0^3C_1)\\ &+ \phi_x((3C_0^2C_2 + 6C_1^2C_0)\phi_x^2 - 3C_0^4C_2 - 6C_1^2C_0^2\\ &- C_0^2L_0 + (-kW_0^2 - V_0^2h)C_0) = 0.\end{aligned} \tag{85}$$

将(79)式代入(81)—(85)式,确认(81)—(85)式恒成立. 因此方程(38)拥有 Painlevé 性质. 把(78)式代入(57)—(61)式,可以看到共振发生在

$$j = -1,1,1,1,1. \tag{86}$$

$j=1$ 的共振条件为

$$-4C_0(-C_{0x}\phi_x + 2C_0^2C_1 + C_0\phi_{xx} - 2C_1\phi_x^2) = 0, \tag{87}$$

$$V_{0t} - L_{0y} = 0, \tag{88}$$

$$W_{0t} - L_{0z} = 0, \tag{89}$$

$$C_{0t} - L_{0x} = 0. \tag{90}$$

不难看出所有共振条件(87)—(90)式也是满足的. 即方程(41)是一个 3+1 维 Painlevé 可积模型.

## 5 孤 波 解

为了寻找方程(14)和(28)的某些具体的近似解,我们首先要解 Painlevé 可积模型(21),(23),(26),(36),(38)和(41)式. 由于这些模型是

“Möbious ’变换下不变的，不难证明它们都拥有扭结型的孤波解. 对于模型(21)式，相应的扭结平面孤波解为

$$\phi = \frac{A + B\exp(k_1 x + k_2 y + wt)}{C + D\exp(k_1 x + k_2 y + wt)}, \tag{91}$$

其中

$$w = -\frac{1}{25sk_1}(r^2 k_1^2 + 25sck_2^2 + 50s^2 k_1^4). \tag{92}$$

与 $\phi$ 相应的 $\xi$ 可以写为

$$\xi = -\frac{2}{k_1}\frac{(A + B\exp(k_1 x + k_2 y + wt))}{(A - B\exp(k_1 x + k_2 y + wt))}. \tag{93}$$

由此可得方程(14)的近似解

$$\begin{aligned} u &= \frac{u_0}{\xi^2} + \frac{u_1}{\xi} \\ &= \frac{3sk_1^2}{p}\left(1 - \mathrm{sech}^2\frac{1}{2}\left(k_1 x + k_2 y + wt + \ln\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right) \\ &\quad + \frac{6rk_1}{5p}\tanh\frac{1}{2}\left(k_1 x + k_2 y + wt + \ln\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \end{aligned} \tag{94}$$

若在(94)式中取任意常数 $k_1$ 为 $r/5s$，(94)式所给出的 $u$ 是(14)式的一个精确解. 不难证明

$$\phi = \frac{A + B\exp(\frac{r}{5s}x + k_2 y + wt)}{C + D\exp(\frac{r}{5s}x + k_2 y + wt)} \tag{95}$$

是(23)式的孤波解，相应的 $\xi$ 由下式给出：

$$\xi = -\frac{10s}{r}\frac{\left(A + B\exp\left(\frac{r}{5s}x + k_2 y + wt\right)\right)}{\left(A - B\exp\left(\frac{r}{5s}x + k_2 y + wt\right)\right)}. \tag{96}$$

与上式有关的方程(14)的近似解

$$\begin{aligned} u &= \frac{u_0}{\xi^2} + \frac{u_1}{\xi} + u_2 = -\frac{625cr^3k_2^2 + 3r^4 + 125rs^2w}{25sr^2p} \\ &= \frac{3r^2}{25ps}\left(1 - \mathrm{sech}^2\frac{1}{2}\left(\frac{r}{5s}x + k_2 y + wt + \ln\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right) \\ &\quad + \frac{6r^2}{25ps}\tanh\frac{1}{2}\left(\frac{r}{5s}x + k_2 y + wt + \ln\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \end{aligned} \tag{97}$$

恰好是(14)式的精确解. 我们也能够证明

$$\phi = \frac{A - B\exp(k_1 x + k_2 y + wt)}{C + D\exp(k_1 x + k_2 y + wt)} \tag{98}$$

是(26)式的一个解，相应的 $\xi$ 为

$$\xi = -\frac{2}{k_1}\frac{(A - B\exp(k_1 x + k_2 y + wt))}{(A + B\exp(k_1 x + k_2 y + wt))}. \tag{99}$$

由(26)式所决定的 KdVB 方程(14)的近似解为

$$\begin{aligned} u &= a_2 + a_3\xi + a_4\xi^2 + a_5\xi^3 \\ &= a_2 - \frac{2a_3}{k_1}\tanh\frac{1}{2}(k_1 x + k_2 y + wt) \\ &\quad + \frac{4a_4}{k_1^2}\tanh^2\frac{1}{2}(k_1 x + k_2 y + wt) \\ &\quad + \frac{8a_5}{k_1^3}\tanh^3\frac{1}{2}(k_1 x + k_2 y + wt). \end{aligned} \tag{100}$$

如果我们在上式中选任意常数

$$k_1 = \frac{4}{5s}, a_5 = 0, a_3 = \frac{3r^3}{125ps^2}, a_4 = \frac{3r^4}{2500ps^3}, \tag{101}$$

那么由(100)式给出的 $u$ 是(14)式的精确解.

同理，我们可以证明

$$\phi = \frac{A + B\exp2(l_1 x + l_2 y + l_3 z + wt)}{C + D\exp2(l_1 x + l_2 y + l_3 z + wt)} \tag{102}$$

是(38)式的解，当

$$w = \frac{8l_1^4 - kl_3^2 - hl_2^2}{l_1}, \tag{103}$$

(102)式也是(36)式的解. 与 $\phi$ 相应的 $\xi$ 可以写为

$$\xi = -\frac{1}{l_1}\frac{A + B\exp2(l_1 x + l_2 y + l_3 z + wt)}{A - B\exp2(l_1 x + l_2 y + l_3 z + wt)}. \tag{104}$$

由此可得 3+1 维 KP 方程(28)的近似解

$$\begin{aligned} u &= -2l_1^2\frac{(A - B\exp2(l_1 x + l_2 y + l_3 z + wt))^2}{(A + B\exp2(l_1 x + l_2 y + l_3 z + wt))^2} \\ &\quad - \frac{A_1}{6l_2^2}, \end{aligned} \tag{105}$$

式中

$$A_1 = -8l_1^4 + hl_2^2 + wl_1 + kl_3^2. \tag{106}$$

解(105)式可以写为标准形式

$$\begin{aligned} u &= -\left(2l_1^2 + \frac{A_1}{6l_2^2}\right) \\ &\quad + 2l_1^2\Big(\mathrm{sech}\Big(l_1 x + l_2 y \\ &\quad + l_3 y + wt + \ln\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{2}}\Big)\Big)^2. \end{aligned} \tag{107}$$

若取任意常数 $l_2$ 和 $w$ 为以下形式：

$$l_2 = \frac{(-(16l_1^2 + h)(-12l_1^4 + l_3^2k))^{\frac{1}{2}}}{16l_1^2 + h},$$

$$w = \frac{4l_1^4 + l_2^2h + l_3^2k}{2l_1}, \tag{108}$$

那么由(107)式所给出的 $u$ 成为 3+1 维 KP 方程的一个精确解. 我们也能够证明

$$\phi = \frac{A - B\exp 2\left(l_1 x + l_2 y + l_3 z + \left(-6l_1^2 a_1 + 8l_1^4 - hl_2^2 - kl_3^2\right)\frac{t}{l_1}\right)}{A + B\exp 2\left(l_1 x + l_2 y + l_3 z + \left(-6l_1^2 a_1 + 8l_1^4 - hl_2^2 - kl_3^2\right)\frac{t}{l_1}\right)} \tag{109}$$

是(41)式的扭结型的平面孤波解.相应的 $\xi$ 由下式表示：

$$\xi = -\frac{2}{l_i}\frac{\left(A - B\exp 2\left(l_1 x + l_2 y + l_3 z + \left(-6l_1^2 a_1 + 8l_1^4 - hl_2^2 - kl_3^2\right)\frac{t}{l_1}\right)\right)}{\left(A + B\exp 2\left(l_1 x + l_2 y + l_3 z + \left(-6l_1^2 a_1 + 8l_1^4 - hl_2^2 - kl_3^2\right)\frac{t}{l_1}\right)\right)}. \tag{110}$$

在这种情况下,(28)式的近似解为

$$u = a_1 + a_2\xi^2 = a_1 + \frac{a_2}{l_i^2}\left(1 - \mathrm{sech}^2\left(l_1 x + l_2 y + l_3 z + \left(-6l_1^2 a_1 + 8l_1^4 - hl_2^2 - kl_3^2\right)\frac{t}{l_1} + \ln\left(\frac{B}{A}\right)^{1/2}\right)\right). \tag{111}$$

如果取任意常数 $a_1$ 和 $a_2$ 为

$$a_1 = 2l_1^2, a_2 = -2l_1^2 l_i^2, \tag{112}$$

(111)式即是 KP 方程(28)的精确解.一般来说近似步骤只对 $\xi$ 是小量有效.在平面孤波情况下,由(93),(96)和(104)式给出的 $\xi$ 是小的,意味着(95),(97)和(105)式给出的 $u$ 在孤波中心附近有效.而由(99)和(110)式给出的 $\xi$ 是小的,则意味着(100)和(111)式给出的 $u$ 在远离孤波中心时有效.

## 6 结 论

本文提出了通过相同维数的 Painlevé 可积模型求解高维非线性问题的简单方法.取 2+1 维 KdVB 方程和 3+1 维 KP 方程作为具体例子,获得了一些新的 2+1 维和 3+1 维 Painlevé 可积模型.这些诱导的 Painlevé 可积模型的解可用来近似地表示原方程的解.由于诱导方程具有‘Möbious’变换下的不变性,很容易得到平面孤波解.一般来说,这种波对于原始模型是近似的.对于某些近似解,合适地选择任意常数,近似解可以成为精确解.

按照递推关系是从 $u_0 \neq 0$ 还是 $u_0 = 0$ 出发,可以得到两种形式的近似解.一种在孤波中心附近有效,另一种则在远离孤波中心时有效.事实上后一种形式的近似解,在诱导方程的解取孤波解时,就是通常的 tanh 函数展开式.也就是说通常的 tanh 函数展开方法包含在我们提出的近似方法中.对于 2+1 维 KdVB 方程,本文得到的一些特例与文献[19]和[25]用其他方法得到的精确解是相同的.

在文献[16,18,24]中,楼森岳提出了许多 Painlevé 可积的‘Möbious’变换下不变的方程.在他的工作中,有两个重要的问题留了下来:1)能否找到这些模型的物理应用或能否从实际物理模型中找到一些具有‘Möbious’不变性和 Painlevé 性质的模型?2)这些 Painlevé 可积模型是否具有其他传统意义下的可积性?本文对第一个问题给予了正面的回答.第二个问题仍未得到解决,值得进一步研究.

本文介绍的‘Möbious’变换下不变的展开方法既可从实际模型中获得 Painlevé 可积模型,又可以作为一种新的求解非线性方程的近似方法,且适用于任意维数的任意非线性模型(可积与不可积).

作者之一感谢楼森岳教授的帮助和讨论.


[1] I. Loutsenko, D. Roubtsov, *Phys. Rev. Lett.*, **78**(1997), 3011; M. W. Coffey, *Phys. Rev.*, **B54**(1996), 1279.

[2] M. Tajiri, H. Maesono, *Phys. Rev.*, **E55**(1997), 3351.

[3] G. C. Das, *Phys. Plasmas*, **4**(1997), 2095.

[4] T. Georges, *Opt. Lett.*, **22**(1997), 679.

[5] A. Niiyama, M. Koshiba, *IEICE Transactions and Communications*, **E80-B**(1997), 522.

[6] B. A. Kalinikos, N. G. Kovshikov, E. C. Patton, *Phys. Rev. Lett.*, **78**(1997), 2827.

[7] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering, London Mathematical Society Lecture Note Series(Cambridge University Press, 1991), p. 149.

[8] R. Newton, *Phys. Rev. Lett.*, **43**(1976), 541.

[9] L. D. Faddeev, *Sov. Phys. Dokl.*, **11**(1966), 209.

[10] A. I. Nachman, M. J. Ablowitz, *Stud. Appl. Math.*, **71**(1984), 243.

[11] D. David, N. Kamran, D. Levi, P. Winternitz, *J. Math. Phys.*, **27**(1986), 1225; S. Y. Lou, X. B. Hu, *J. Phys.*, **A27**(1994), L207; S. Y. Lou, *Phys. Rev. Lett.*, **71**(1993), 4099.

[12] S. Y. Lou, J. Yu, J. Lin, *J. Phys.*, **A28**(1995), L191; S. Y.

Lou, J. Lin, J. Yu, *Phys. Lett.*, **A201**(1995), 47.
[13] S. Y. Lou, *Commun. Theor. Phys.*, **27**(1997), 249.
[14] A. Ramani, B. Garnevale, *J. Math. Phys.*, **24**(1983), 522.
[15] S. Y. Lou, *J. Phys.*, **A30**(1997), 4803.
[16] S. Y. Lou, *J. Math, Phys.*, **39**(1998), 2112.
[17] S. Y. Lou, *Science in China*, **42**(1999), 537.
[18] S. Y. Lou, *Phys. Rev. Lett.*, **80**(1998), 5027.
[19] M. Wang, *Phys. Lett.*, **A213**(1996), 279.
[20] A. Swnatorski, E. Infeld, *Phys. Rev. Lett.*, **77**(1996), 2855.
[21] R. Conte, *Phys. Lett.*, **A140**(1989), 383.
[22] E. A. Kuznietsov, C. L. Musher, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **91**(1986), 1605.
[23] M. Ablowitz, H. Seguar, *J. Fluid Mech.*, **92**(1979), 69.
[24] S. Y. Lou, J. J. Xu, *J. Math. Phys.*, **39**(1998), 5364.
[25] R. S. Johnson, *J. Fluid Mech.*, **42**(1970), 49.

# HIGHER DIMENSIONAL PAINLEVÉ INTEGRABLE MODELS WITH REAL PHYSICAL SIGNIFICATION*

RUAN HANG-YU[a)b)] CHEN YI-XIN[b)]

[a)] (*Department of Physics, Ningbo University, Ningbo* 315211, *China*)[†]

[b)] (*Center of Modern Physics, Zhejiang University, Hangzhou* 310027, *China*)

(Received 2 February 2000; revised manuscript received 4 August 2000)

ABSTRACT

A "Möbius" invariant asymptotic expansion approach to solve any nonlinear integrable and nonintegrable models with any dimension is proposed. Many new Painlevé integrable models with the same dimension can be obtained at the same time. Taking the (2+1)-dimensional KdV-Burgers (KdVB) equation, (3+1)-dimensional Kudomtsev-Petviashvili (KP) equation as concrete examples, we obtain some new higher dimensional "Möbius" invariant models with Painlevé property and the approximate solutions of these models. In some special case, some approximate solutions become exact.

**Keywords**: higher dimensional integrable model, "Möbius" invariance, asymptotic expansion approach

**PACC**: 0220, 0230

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19875041), by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. 100033), and by the Foundation for University Key Teachers by the Ministry of Education, China (Grant No. C0001), by the Doctorate Foundation of Ningbo, China (Grant No. 0011016).

† Mailing address.