第 50 卷 第 4 期 2001 年 4 月
1000-3290/2001/50(04)/0593-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 50, No. 4, April, 2001

Kim 黑洞熵与能斯特定理*

赵 仁 张丽春

(山西省雁北师范学院物理系,大同 037000)

(2000 年 6 月 9 日收到;2000 年 10 月 8 日收到修改稿)

从 Kim 时空背景下的 Klein-Gordon 方程出发,利用 brick-wall 方法计算标量场的自由能和熵. 得到标量场的熵不仅与黑洞的外视界面积有关,而且也是内视界面积的函数. 所得结论,当取某种近似时,可得到熵只与外视界面积成正比的关系. 并且表明,用内外视界位置参量表达的熵,在黑洞辐射温度趋于绝对零度时,黑洞的熵也趋于零,它满足能斯特定理,可视为黑洞的普朗克绝对熵.

关键词:brick-wall 方法, 黑洞熵, 能斯特定理
PACC:0420, 9760L

1 引 言

自从 Bekenstein 和 Hawking 提出黑洞熵与其视界面积成正比以来[1—3], 人们就一直致力于探求黑洞熵的统计起源, 因而各种求熵的方法应用而生[4—9]. 其中用得最多的方法是 G 't Hooft[7] 提出的 brick-wall 方法. 人们用此方法研究了各种球坐标系下, 视界面上温度相同时空中自由标量场的统计性质[10—12],发现黑洞熵的一般表达式是与黑洞视界面积成正比项,加上不与视界成积成正比且对数发散项.

本文利用 brick-wall 方法,研究了在视界面上温度不同的 Kim 黑洞背景下标量场的自由能和熵,当黑洞的温度取 Hawking 辐射温度 $T=1/\beta$ 时,黑洞的熵的表达式是与外视界面积成正比项和内视界位置有关项,再加上对数发散项. 进一步研究表明,用内外视界位置参量表达的熵,在黑洞的辐射温度趋于绝对零度时,黑洞的熵也趋于零. 满足能斯特定理.

2 Kim 黑洞

文献[13]给出 Kim 时空线元

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = {} & \Delta^{-2/(2\omega+3)}\sin^{-4/(2\omega+3)}\theta\left[-\left(\frac{\Delta-a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\mathrm{d}t^2\right. \\ & -\frac{2a\sin^2\theta(r^2+a^2-\Delta)}{\Sigma}\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi \\ & \left.+\left(\frac{(r^2+a^2)^2-\Delta a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right] \\ & +\Delta^{2/(2\omega+3)}\sin^{4/(2\omega+3)}\theta\left[\frac{\Sigma}{\Delta}\mathrm{d}r^2+\Sigma\mathrm{d}\theta^2\right],\end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\Sigma=r^2+a^2\cos^2\theta$, $\Delta=r^2-2Mr+a^2+e^2=(r-r_+)(r-r_-)$, $r_\pm=M\pm(M-a^2-e^2)^{1/2}$ 为黑洞的外内视界位置.

黑洞的 Hawking 辐射温度为

$$T=\frac{\kappa}{2\pi}, \tag{2}$$

$$\kappa_\pm=\Delta^{-2/(2\omega+3)}(r_\pm)\sin^{-4/(2\omega+3)}\theta\left(\frac{2\omega+1}{2\omega+3}\right)\frac{(r_\pm-r_\mp)}{2(r_\pm^2+a^2)}. \tag{3}$$

黑洞的外内视界面积为

$$A_\pm=4\pi(r_\pm^2+a^2). \tag{4}$$

经典 Bekenstein-Hawking 熵与外视界面积成正比

$$S_{\mathrm{BH}}=\frac{A_+}{4}=\pi(r_+^2+a^2). \tag{5}$$

从(2)和(3)式可以看出,黑洞的辐射温度在视界上不是常量,而与极角有关.

3 Kim 黑洞背景下标量场的熵

在弯曲时空中无质的标量场方程为

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu)\psi=0. \tag{6}$$

* 山西省自然科学基金(批准号:20001009)资助的课题.

由 G 't Hooft brick-wall 理论设

$$\psi(r,\theta,\varphi;t) = 0 \quad 当 \quad r \leqslant r_+ + h$$

与

$$\psi(r,\theta,\varphi;t) = 0 \quad 当 \quad r \geqslant L,$$

式中 r_+ 为黑洞的外视界位置，h 为一非负小量的紫外截断因子，L 为红外截断因子，且 $L \gg r_+$.

对时空(1)式，我们应用 WKB 近似可求得方程(6)的解为

$$\psi = \exp[-\mathrm{i}Et + \mathrm{i}m\varphi + \mathrm{i}S(r,\theta)]. \quad (7)$$

令 $P_r = \partial_r S$，和 $p_\theta = \partial_\theta S$，则由方程(1)和(6)可得到[14]

$$p_r^2 = [-g^{tt}E^2 + 2g^{t\varphi}EJ_m - g^{\varphi\varphi}J_m^2 - g^{\theta\theta}p_\theta^2]/g^{rr}, \quad (8)$$

那么对应能量为 E，角动量为 J_m，极角为 θ，在单位 θ 角范围内的微观状态数为[5]

$$\Gamma(E,J_m,\theta) = \frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}\varphi \int_{r_+ + h}^{L} \mathrm{d}r \int \mathrm{d}p_\theta \Big[\frac{1}{g^{rr}}(-g^{tt}E^2 + 2g^{t\varphi}EJ_m - g^{\varphi\varphi}J_m^2 - g^{\theta\theta}p_\theta^2)\Big]^{1/2}. \quad (9)$$

对应系统的自由能可表示为[12]

$$\mathrm{d}F = -\frac{1}{6\pi^2}\int \mathrm{d}\varphi \int_{r_+ + h}^{L} \mathrm{d}r \int_0^\infty \frac{E^3 \mathrm{d}E}{e^{\beta E} - 1}\frac{\sqrt{-g}}{(-g'_{tt})^2}, \quad (10)$$

其中，$\beta = 1/T$，T 为黑洞的平衡辐射温度，

$$g'_{tt} = g_{tt} + 2\Omega_0 g_{t\varphi} + \Omega_0^2 g_{\varphi\varphi} = \frac{g_{tt}g_{\varphi\varphi} - g_{t\varphi}^2}{g_{\varphi\varphi}}\Big[1 + (\Omega - \Omega_0)^2 \frac{g_{\varphi\varphi}^2}{g_{tt}g_{\varphi\varphi} - g_{t\varphi}^2}\Big], \quad (11)$$

和拖曳系角速度

$$\Omega = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}},$$

在拖曳系中 $\Omega = \Omega_0$，则

$$g'_{tt} = \frac{g_{tt}g_{\varphi\varphi} - g_{t\varphi}^2}{g_{\varphi\varphi}} = -\Delta^{-2/(2\omega+3)}\sin^{-4/(2\omega+3)}\theta \cdot \frac{(r-r_+)(r-r_-)(r^2 + a^2\cos^2\theta)}{(r^2+a^2)^2 - (r-r_+)(r-r_-)a^2\sin^2\theta}. \quad (12)$$

所以对应系统的自由能为

$$\mathrm{d}F = -\frac{1}{6\pi^2}\int \mathrm{d}\varphi \int_{r_+ + h}^{L} \mathrm{d}r \int_0^\infty \frac{E^3 \mathrm{d}E}{\mathrm{e}^{\beta E} - 1} \cdot \frac{[(r^2+a^2)^2 - (r-r_+)(r-r_-)a^2\sin^2\theta]^2 \sin\theta}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2(r^2+a^2\cos^2\theta)} \cdot \Delta^{4/(2\omega+3)}\sin^{8/(2\omega+3)}\theta$$

$$= -\frac{2\pi}{6\pi^2}\frac{1}{\beta^4}6 \times \frac{\pi^4}{90}\int_{r_+ + h}^{L} \sin\theta \mathrm{d}r \cdot \frac{[(r^2+a^2)^2 - (r-r_+)(r-r_-)a^2\sin^2\theta]^2}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2(r^2+a^2\cos^2\theta)} \cdot \Delta^{4/(2\omega+3)}\sin^{8/(2\omega+3)}\theta. \quad (13)$$

由于我们计算的积分区域为 $r > r_+$，故有 $r > a$，则

$$\mathrm{d}F \approx -\frac{\pi^3}{45}\int_{r_+ + h}^{L} \frac{(r^2+a^2)^4 \sin\theta \mathrm{d}r}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2(r^2+a^2\cos^2\theta)} \cdot \frac{\Delta^{4/(2\omega+3)}\sin^{8/(2\omega+3)}\theta}{\beta^4}. \quad (14)$$

利用系统熵与自由能的关系

$$S = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta}, \quad (15)$$

可得对应极角为 θ，在单位 θ 角范围内的系统熵为

$$\mathrm{d}S = \frac{4\pi^3}{45}\int_{r_+ + h}^{L} \frac{(r^2+a^2)^4 \sin\theta \mathrm{d}r}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2(r^2+a^2\cos^2\theta)} \cdot \frac{\Delta^{4/(2\omega+3)}\sin^{8/(2\omega+3)}\theta}{\beta^3}. \quad (16)$$

由(2)式可得到

$$\beta^3 = A\sin^{12/(2\omega+3)}\theta, \quad (17)$$

式中

$$A = 8\pi^3 \Delta^{6/(2\omega+3)}(r_+)\Big(\frac{2\omega+3}{2\omega+1}\Big)\frac{8(r_+^2 + a^2)^3}{(r_+ - r_-)^3}.$$

对应整个辐射区域系统的总熵为

$$S_{\mathrm{tot}} = \int \mathrm{d}S = \frac{4\pi^3}{A45}\int \mathrm{d}\theta \int_{r_+ + h}^{L} \frac{(r^2+a^2)^4 \mathrm{d}r}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2(r^2+a^2\cos^2\theta)} \cdot \Delta^{4/(2\omega+3)}\sin^{\frac{2\omega-1}{2\omega+3}}\theta$$

$$\approx \frac{4\pi^3}{A45}\int \mathrm{d}\theta \int_{r_+ + h}^{L} \frac{(r^2+a^2)^4 \mathrm{d}r}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2}\frac{1}{r^2} \cdot \Delta^{4/(2\omega+3)}\sin^{\frac{2\omega-1}{2\omega+3}}\theta, \quad (18)$$

而

$$\int_0^\pi \sin^{\frac{2\omega-1}{2\omega+3}}\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad (19)$$

式中 $\alpha = \dfrac{2\omega-1}{2\omega+3}$. 所以系统的总熵可表为

$$S_{tot} = \frac{4\pi^3}{A45} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \int_{r_+ + h}^{L} \frac{(r^2+a^2)^4 \mathrm{d}r}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2} \frac{1}{r^2} \Delta^{4/(2\omega+3)}. \quad (20)$$

4　讨　　论

下面讨论 ω 取不同值时系统的总熵.

1) 当 $\omega\to\infty$时, 时空(1)式回到 Kerr-Newman 情况. $\beta = \frac{1}{T} = \frac{4\pi(r_+^2+a^2)}{r_+-r_-}$, $\alpha = 1$.

对(20)式求积分,我们只取 $h\to 0$ 发散的项,而其他积分项为远离围绕的真空所产生的作用,相对而言,其影响甚微,可略去. 因此系统的总熵可表为

$$S_{tot} = S_+ + S_-,$$

式中

$$S_+ = \frac{\pi}{90\beta}\left[\frac{(r_+^2+a^2)^2}{r_+^2 h} + \left(\frac{4(r_+^2+a^2)^2}{r_+} - \frac{(r_+^2+a^2)^2(4r_+-2r_-)}{(r_+-r_-)r_+^3}\right)\ln\frac{1}{h}\right], \quad (21)$$

$$S_- = \frac{\pi}{90\beta}\left[\frac{(r_-^2+a^2)^2}{r_-^2}\frac{1}{r_++h-r_-} + \left(\frac{4(r_-^2+a^2)^2}{r_-} - \frac{(r_-^2+a^2)^2(4r_--2r_+)}{(r_--r_+)r_-^3}\right)\ln\frac{1}{r_++h-r_-}\right]. \quad (22)$$

利用黑洞视界面积与视界位置的关系

$$A_\pm = 4\pi(r_\pm^2+a^2),$$

把(21)和(22)式重写为

$$S_+ = \frac{(r_+-r_-)}{360\pi h r_+^2}\frac{A_+}{4} + \frac{\pi}{90\beta}\left(\frac{4(r_+^2+a^2)^2}{r_+} - \frac{(r_+^2+a^2)^2(4r_+-2r_-)}{(r_+-r_-)r_+^3}\right)\ln\frac{1}{h}, \quad (23)$$

$$S_- = \frac{1}{90\beta}\frac{(r_-^2+a^2)}{r_-^2}\frac{A_-}{4}\frac{1}{r_++h-r_-} + \frac{\pi}{90\beta} \cdot \left(\frac{4(r_-^2+a^2)^2}{r_-} - \frac{(r_-^2+a^2)^2(4r_--2r_+)}{(r_--r_+)r_-^3}\right) \cdot \ln\frac{1}{r_++h-r_-}. \quad (24)$$

从(24)式我们看到,在固定积分下限 r_++h 的情况下,使(24)式中的 r_+ 与 r_- 互换,所得结论与(23)式完全相同,所以我们认为,S_+ 为外视界对熵的贡献,而 S_- 为内视界对熵的贡献.

当 $a\to 0, e\to 0$ 时, $r_-\to 0$, 由(24)式知

$$S_- = 0,$$

$$S_+ = \frac{1}{360\pi h r_+}\frac{A_+}{4}. \quad (25)$$

回到已知结果[7].

当 $a\to 0$ 时,(23)和 (24)式回到 Reissner-Nordstrom 时空结果[14].

当 $r_+\to r_-$时,

$$S_{tot} = S_+ + S_- = \frac{2(r_+-r_-)}{90 r_+}\ln\frac{1}{h} = 0, \quad (26)$$

满足能斯特定理.

2) 当$\infty > \omega > -1/2$ 时, $\kappa\to\infty$, $S_{tot}\to\infty$;

3) 当 $-5/2 \leqslant \omega < -3/2$ 时, $\kappa\to 0$, 辐射温度 $T\to 0$, 则系统的熵 $S_{tot}\to 0$. 满足能斯特定理.

5　结　　论

在 Kim 黑洞背景下, 从自由粒子标量场方程出发, 利用 WKB 方法近似求得波函数,然后运用 brick-wall 方法, 计算标量场的自由能与熵. 对于不同的 ω 我们进行了讨论,当 $\omega\to\infty$时,经计算,黑洞的熵不仅是外视界面积的函数,也是内视界面积的函数. 黑洞熵的表达是,与外视界面积成正比项和内视界位置有关项,再加上对数发散项. 只有当 r_- 相对于 r_+ 可忽略时,(24)式及内视界对熵的贡献才能被忽略, 一般情况下,内外视界位置为同一数量级,故在一般情况下,内视界对熵的贡献是不能被忽略的. 在计算中当取极限时,结论回到已知结果. 我们所得结论克服了只用外视界面积定义的黑洞熵的缺点,使新定义的黑洞熵满足能斯特定理,具有普遍的物理意义.

[1]　J.D. Bekenstein, *Phys. Rev.*, **D7**(1973), 2333.

[2]　S.W. Hawking, *Commun. Math. Phys.*, **43**(1975), 199.

[3]　G.W. Gibbons, S.W. Hawking, *Phys. Rev.*, **D15**(1977), 130.

[4] D. Hochberg, T. W. Kephart, J. W. York, *Phys. Rev.*, **D48**(1993), 479.

[5] T. Padmanaban, *Phys. Lett.*, **A136**(1989), 203.

[6] H. Lee, S. W. Kim, W. T. Kim, *Phys. Rev.*, **D54**(1996), 6559.

[7] G 't Hooft, *Nucl. Phys.*, **B256**(1985), 727.

[8] G. Cognola, P. Lecca, *Phys. Rev.*, **D57** (1998), 1108.

[9] R. G. Cai, J. Y. Ji, K. S. Soh, *Class. Quantum. Grav.*, **15** (1998), 2783.

[10] S. N. Solodukhin, *Phys. Rev.*, **D51** (1995), 609.

[11] M. H. Lee, J. K. Kim, *Phys. Rev.*, **D54**(1996), 3904.

[12] Y. G. Shen, D. M. Chen, *Gen. Rel. Grav.*, **31** (1999), 315.

[13] H. Kim, *Phys. Rev.*, **D60**(1999), 24001.

[14] R. B. Mann, L. Tarasov, A. Zelnikov, *Class. Quantum. Grav.*, **9** (1992), 1487.

[15] R. Zhao, L. C. Zhang, Y. Q. Wu, *Gen. Rel. Grav.*, **32** (2000), 1639.

THE ENTROPY OF A KIM BLACK HOLE AND THE NERNST THEOREM*

ZHAO REN ZHANG LI-CHUN

(*Department of Physics, Yanbei Normal Institute, Datong* 037000, *China*)

(Received 9 June 2000; revised manuscript received 8 October 2000)

ABSTRACT

We start with Klein-Gordon equation on the background of the Kim black hole and calculate the free energy and entropy of a scalar field by the brick-wall method. It is shown that the entropy is not only related to the area of an outer horizon but also is a function of inner horizon's area. Taking some appr oximation, we can obtain that the entropy only is proportional to the area of an outer horizon. Further more, the entropy expressed by location parameter of the outer and inner horizon approaches zero, when the radiation temperature of a black hole approaches zero. This satisfies the Nernst theorem. It can be taken as Planck absolute entropy of a black hole.

Keywords: brick-wall method, entropy of black hole, Nernst theorem

PACC: 0420, 9760L

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shanxi Province, China (Grant No. 20001009).