

# 混沌系统中可预报性的研究<sup>\*</sup>

封国林

(扬州大学理学院物理系, 扬州 225009)

戴新刚 王爱慧 丑纪范

(兰州大学大气科学系, 兰州 730000)

(2000 年 4 月 30 日收到, 2000 年 7 月 28 日收到修改稿)

针对简化的气候模式、Rossler 吸引子和超混沌系统, 进一步阐明了不确定原理, 在数值求解时由于计算机固有精度而引起的舍入误差, 造成对解的不确定性, 存在最优步长和最大有效计算时间. 运用自忆性原理, 导出了各混沌系统的自忆性方程, 取最优步长时, 其预报性能有明显的改善.

关键词: 自忆性, 不确定原理, 最优步长

PACC: 0545

## 1 引 言

大气运动变化的复杂性在于其具有各种时空尺度, 实际观测资料是各种时空尺度变化叠加随机噪声的结果. 众所周知, 大气科学中非线性与复杂性研究的一个重要成果是揭示了天气尺度的可预测时段不超过 2—3 周.

近年来将混沌的概念引入全球数值天气预报模式, 揭示了初始时刻不可避免的误差增长规律以及它对季节、地区和初始场的依赖性等. 非线性方程对其初值的敏感性问题做了推广, 提出考虑输入数据对最终结果的影响, 先后探讨了多时刻模式和不确定原理等改进的方法.

早在五十年代, 顾震潮<sup>[1]</sup>比较了用初值问题的方法作数值预报与用天气历史演变来作预报的不同之处, 还提出了天气数值预报可以提成演变问题, 从而可以使用过去的历史资料. 许多学者先后从不同原理和准则提出了能容纳多时次资料的模式. 丑纪范<sup>[2]</sup>则进一步将微分方程的定解问题转变为等价的泛函极值问题——变分问题. 曹鸿兴<sup>[3]</sup>从不可逆过程的记忆概念出发, 建立了包含多时次观测资料的自忆性方程. 尽管多时刻模式在微分方程中有一定的预报能力, 但在混沌域中, 如何进一步提高可预报性有待于研究.

控制大气运动变化的是非线性方程组, 它不可能求得解析解. 所以需要数值的方法, 来求其近似解, 其解的误差来源有两个: 离散误差和舍入误差. 在数值求解时, 舍入误差常常被忽略, 但在实际的非线性方程数值求解过程中, 就有可能改变真解的根本性质, 据此, 李建平等<sup>[4]</sup>提出了不确定原理.

本文运用不确定原理, 进一步探讨截断误差、时间积分间隔和最优积分步长之间的相互制约关系, 将简化的气候模式、Rossler 吸引子和超混沌系统转换成自忆模式, 在取最优积分步长下, 探讨在混沌域改善可预报性的可能.

## 2 自忆性原理与不确定原理

### 2.1 自忆性原理

制约大气运动的动力—热力方程可写为

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = F(x, \lambda, t), \quad (1)$$

式中  $x$  为大气变量, 如温度、风速等,  $\lambda$  为物理参量,  $t$  为时间,  $F(x, \lambda, t)$  为在时刻  $t$  的空间项, 也称源函数. 现研究有时刻  $t-p, t-p+1, \dots, t_0$  的观测值, 引进记忆函数  $\beta(r, t)$ , 定义希尔伯特空间中的范数, 可以导出与(1)式相应的具有  $p$  阶离散化的自忆性方程<sup>[3,5]</sup>

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 49875024)和国家重点基础研究发展规划(批准号: G19980409-1)资助的课题.

$$x(t) = \sum_{i=-p+1}^{-1} \alpha_i \tilde{x}_i + \sum_{i=-p}^0 \theta_i F_i(x, \lambda, t), \quad (2)$$

式中  $\tilde{x}(t)$  为  $t_i < t < t_{i+1}$  的中值,  $\alpha_i, \theta_i$  为记忆系数, 它是由记忆函数组合而成, 反映了系统对过去不同时刻的记忆程度, 数学上表示成不同时刻对  $x(t)$  贡献的权重, 由历史资料用最小二乘法确定出  $\alpha_i, \theta_i$ , 就可以作出未来预报。

对于无量纲简化的气候模式,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 - \sigma_1(x_2^2 + x_3^2) + b_1 \\ &= F_1(x_1, x_2, x_3, \lambda, t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \sigma_1x_1x_2 \\ &\quad - \sigma_2x_1x_3 + b_2 = F_2(x_1, x_2, x_3, \lambda, t), \\ \frac{dx_3}{dt} &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 + \sigma_2x_1x_2 \\ &\quad + \sigma_1x_1x_3 + b_3 = F_3(x_1, x_2, x_3, \lambda, t), \end{aligned} \quad (3)$$

式中  $x_1 = (T_1)_t, x_2 = (T_2)_t, x_3 = (T_3)_t$ . 以(3)式为动力核的自忆模式可写为

$$\begin{aligned} x_{1t} &= \sum_{i=-p-1}^{-1} \alpha_{1i} x_{1i}^m + \sum_{i=-p}^0 F_1(x, \lambda, t), \\ x_{2t} &= \sum_{i=-p-1}^{-1} \alpha_{2i} x_{2i}^m + \sum_{i=-p}^0 F_2(x, \lambda, t), \\ x_{3t} &= \sum_{i=-p-1}^{-1} \alpha_{3i} x_{3i}^m + \sum_{i=-p}^0 F_3(x, \lambda, t), \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $p$  称回溯阶. 对于熟知的 Rossler 吸引子和超混沌系统, 也可写出形如(4)式的自忆性方程组, 这是本文的研究基础。

## 2.2 不确定原理

对于一个准确解为  $y = y(t)$  的微分方程, 用  $P$  阶的数值方法求得初值是  $y(t_0) = y_0$  的近似解为  $\tilde{y}_t$ , 在考虑了舍入误差的情况下, 其误差界为<sup>[5]</sup>

$$\begin{aligned} \|E_t(y_0, h)\| &= \|e_t(y_0, h) + r_t(y_0, h)\| \\ &\leq \alpha t \left( Ch^p + \frac{r}{h} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $t = t_n - t = nt$  ( $t_n > t$ ) 为积分时间,  $e_t$  为离散误差,  $h$  为步长,  $r$  为舍入误差的界,  $C$  为正常数,  $\alpha(t)$  为时间函数, 一般地它有如下形式:

$$\alpha(t) = (e^{c_L t} - 1) / c_L, \quad c_L > 0 \text{ 为常数}, \quad (6)$$

(5)式进一步表成

$$\|E_t\| \approx \alpha(t) \tilde{E} = \alpha(t) (\tilde{e} + \tilde{r}) \tilde{e} = ch^p \tilde{r} = r/h, \quad (7)$$

并将  $r$  用机器精度  $\gamma$  表成  $r = c_r \gamma$ , 这里  $c_r$  为常数,  $\tilde{e}$

实质上代表了整体离散误差,  $e_t$  的本质部分是数值方法的不准确所带来的不确定性的度量,  $\tilde{r}$  实质上代表了累积舍入误差,  $r_t$  的本质部分则是机器的有限精度所造成的不确定性的度量, 而  $\tilde{E}$  是这两种不确定性之和, 只要机器精度是有限的, 那么  $\tilde{E}$  就不会趋于零, 即  $\tilde{e} + \tilde{r} \geq C_{\min}$ , 其中  $C_{\min} = (P+1) (CC_r^p r^p P^{-p})^{1/(P+1)}$ , 令  $\tilde{e}^* = \tilde{e}^{1/p}$ , 则

$$\tilde{e}^* \cdot \tilde{r} = \eta_p, \quad (8)$$

其中  $\eta_p = r C_r C^{1/p}$ , 即不确定原理, 表明对于初值极敏感的混沌系统和一些具有暂态混沌过程的非线性系统的长时间数值积分的计算有效时间加上了确定的限制, 对非线性体系, 数值算法能力是很有限的。

## 3 有效步长与最大积分时间

为了深入研究最大有效计算时间和最优步长与数值方法的阶数、机器精度及初值之间的内在关系, 就必须给出计算有效计算时间廓线的有效算法. 本文采用最优搜索法来实现. 这个方法是基于判断多个数值解的差异大小来实现的. 在步长区间  $[h_{\min}, h_{\max}]$  ( $h_{\min}$  为很小的数) 上选取  $n$  个步长  $h_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). 这  $n$  个步长同时积分到  $t$  时的  $n$  个数值的解为  $\tilde{y}_t(n)$ , 如果它们的差异  $V_t(t)$  较小, 具体地说小于预先给出的容许限  $\epsilon$ , 则说明它们比较接近, 并把真解在  $t$  时刻的数值相当好的再现出来. 此时有效步长区间为  $[h_{\min}, h_{\max}]$ , 宽度为  $Wh(t) = \log h_{\max} - \log h_{\min}$ . 否则, 如果  $V_t(t)$  大于  $\epsilon$ , 则表明有些步长的数值解出现较大的偏差, 所以从  $\tilde{y}_t(n)$  中剔除这些解, 以使得剩下的  $n_1$  ( $n_1 < n$ ) 个解的差异小于  $\epsilon$ , 以剔除的个数最少为最优. 这样可得到满足给定条件的有效步长区间, 以有效步长区间内的步长继续向前积分到  $t + Ndt$  ( $dt$  为积分时间间隔), 直到积分到  $t_1$  时只剩下相邻两个步长  $h_j(t_1), h_{j+1}(t_1)$ , 然后将步长区间  $[h_j(t_1), h_{j+1}(t_1)]$  划分为  $m$  分, 以  $m+1$  个步长所得数值解差异小于  $\epsilon$  时为止. 此时, 可得有效计算时间廓线, 最大有效计算时间及最优步长。

图1是根据最优搜索法得到简化气候模式、Rossler 吸引子和超混沌系统的有效计算时间廓线. 它是每个步长的有效计算时间的连线, 有效计算时间的廓线把数值解的步长-时间图分成两部分. 其意义是: 在有效计算时间廓线的内部, 数值解能把微

分方程的真解较好地表示出来;在有效计算时间廓线的外部,数值解是虚假的,与微分方程的准解无关.图 1 仅画出了每个时间积分间隔,有效步长区间下限  $h_{\min}$  和上限  $h_{\max}$  的对数连线,它们的交点即为最大有效积分时间.在  $\epsilon$  取 0.1 时,它们的最大有效

积分时间分别为 12.40, 14.40, 3.75 个时间单位(图 1 所对应的虚线值),尽管对于不同的混沌系统最大有效积分时间不同,但在数值计算过程中确实存在这一现象.

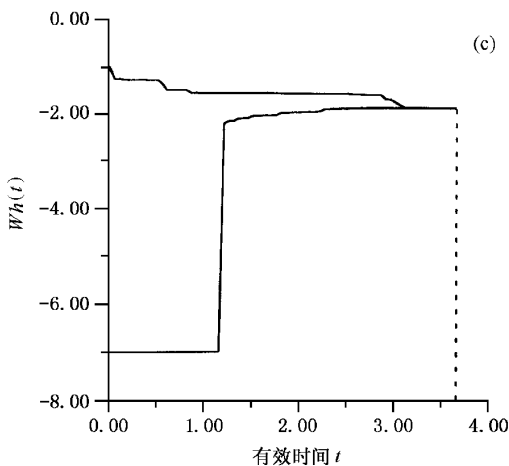
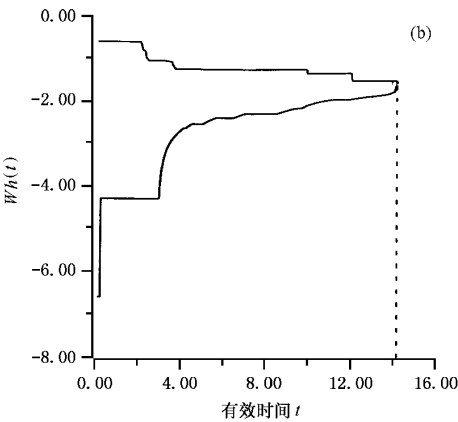
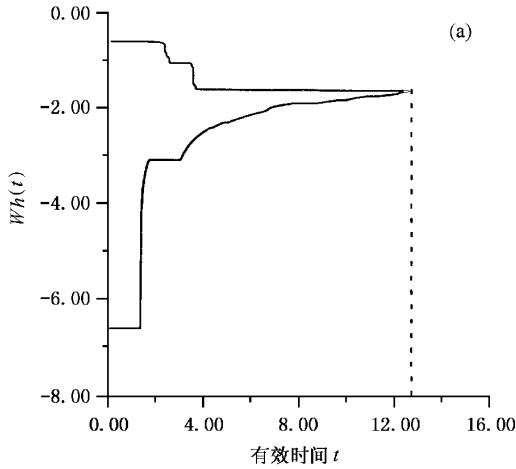


图 1 有效计算时间的廓线 (a)为简化气候模式 (b)为 Rossler 吸引子 (c)为超混沌系统

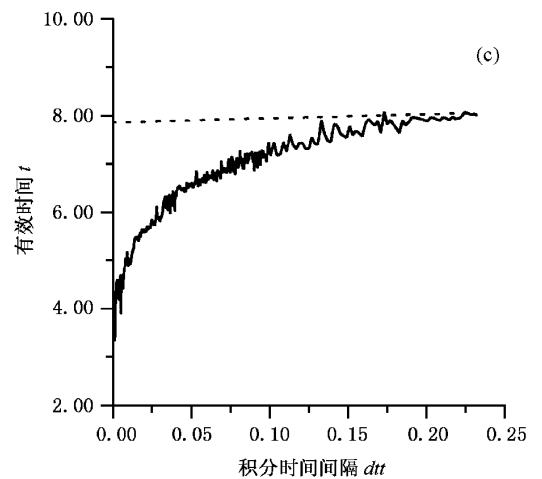
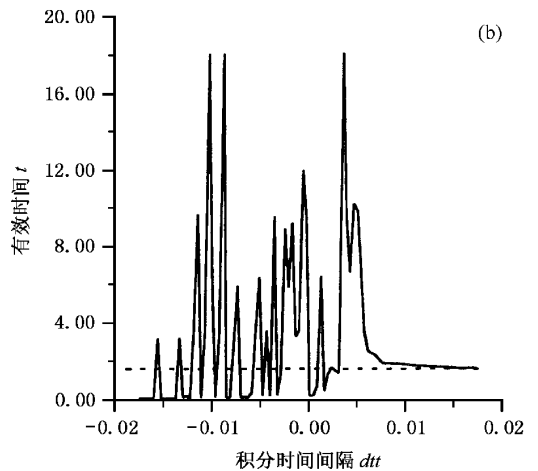
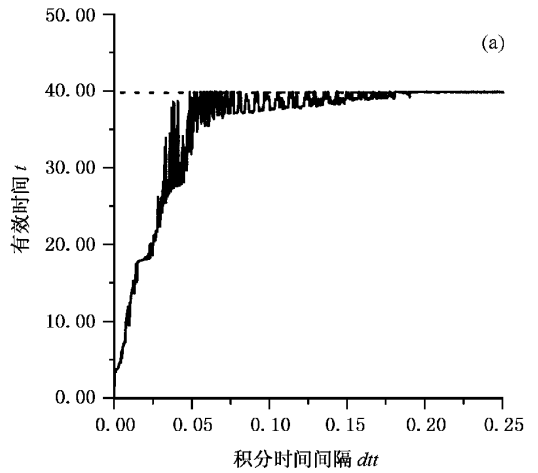


图 2 最大有效计算时间与  $dt$  的变化曲线 (a)为简化气候模式 (b)为 Rossler 吸引子 (c)为超混沌系统

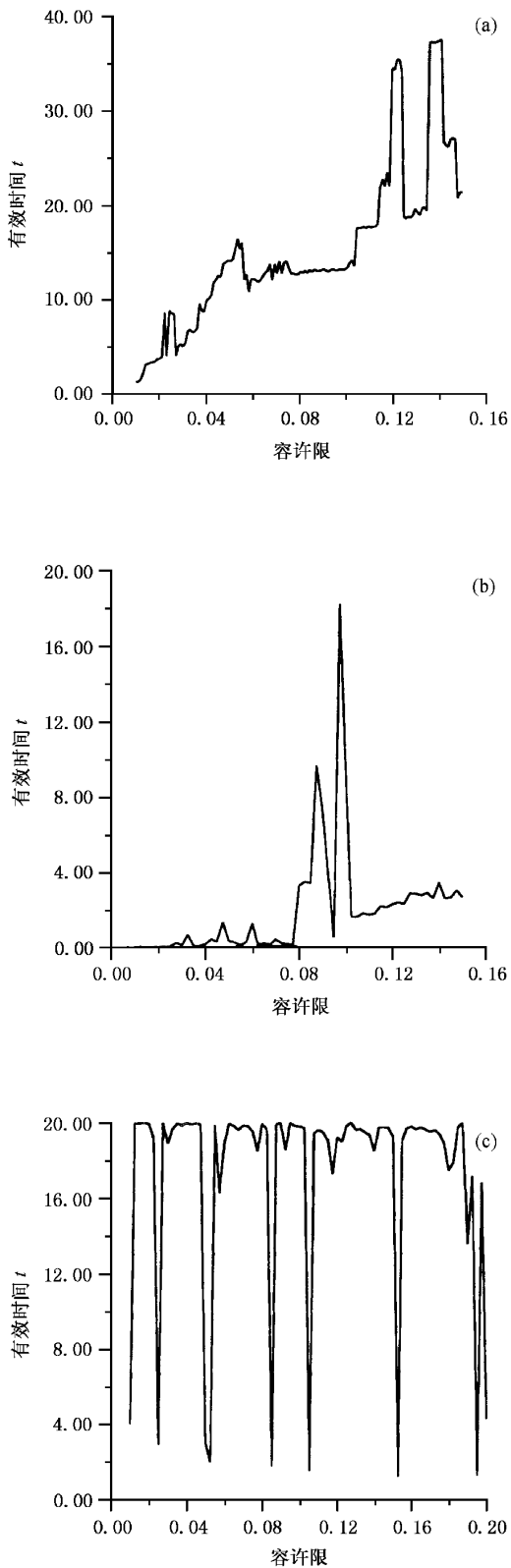


图3 最大有效计算时间与容许限的变化曲线 (a)为简化气候模式 (b)为 Rossler 吸引子 (c)为超混沌系统

之间的关系,在  $\epsilon$  一定时,混沌体系最大有效时间随着  $dt$  的不断增大而增大,尽管对于不同的模式系统,趋向极限的方式不同,但最终都能达到饱和状态.简化的气候模式最大积分有效时间在  $\epsilon$  很小时,迅速增大,当  $\epsilon > 0.06$  时,增长缓慢,而且上限不再改变,经过缓慢振荡,当  $\epsilon > 0.18$  时趋向于饱和状态(图 2(a));Rossler 吸引子在  $\epsilon < 0.01$  时,最大有效积分时间随  $\epsilon$  急剧振荡,而  $\epsilon > 0.01$  时,迅速衰减,趋向于饱和(图 2(b));而超混沌系统随  $\epsilon$  缓慢振荡,在  $\epsilon > 0.18$  时,趋向于饱和(图 2(c)).对于简化气候模式最大有效计算时间约为 40, Rossler 吸引子为 1.8,而超混沌系统为 7.8 个时间单位(图 2 所对应的虚线值);而  $dt$  一定时,最大有效时间随着  $\epsilon$  而振荡(如图 3).

#### 4 自忆模式的可预报性

我们曾用自忆模式深入研究了简化的气候模式在混沌中的可预报性,表 1 给出回溯阶  $p$  取不同值的各分量与理想场各分量之间的相关系数,计算结果表明,相关系数是很小的,有的甚至是负相关.

现分别取最优步长,时间积分间隔取 0.005,用简化气候模式、Rossler 吸引子和超混沌系统的差分格式向前积分至最大有效时间,作为理想场(图 4(a)(c)(e));然后取前 100 步作为历史资料,用(4)式等各系统的自忆模式向前一步一步地积分至各自系统的最大有效积分时间,图 4(b)(d)(f)给出计算结果,比较图 4,尽管图中各细节不同,但各混沌体系演变的主要过程还是能较好地用自忆模式预报出来,各分量之间的相关系数平均达到 0.5 左右,对预报有一定的改善.

#### 5 结 论

虽然舍入误差很小,但在非线性方程的长时间数值积分有着不可忽视的作用.本文就简化的气候模式、Rossler 吸引子和超混沌系统阐明了在混沌系统中存在最大有效计算时间和最优步长.将自忆原理与不确定原理结合起来,在预报时段内提高初值的准确性,从而提高天气预报技巧.

进一步深入地研究了  $\epsilon$ ,  $dt$  与最大有效时间

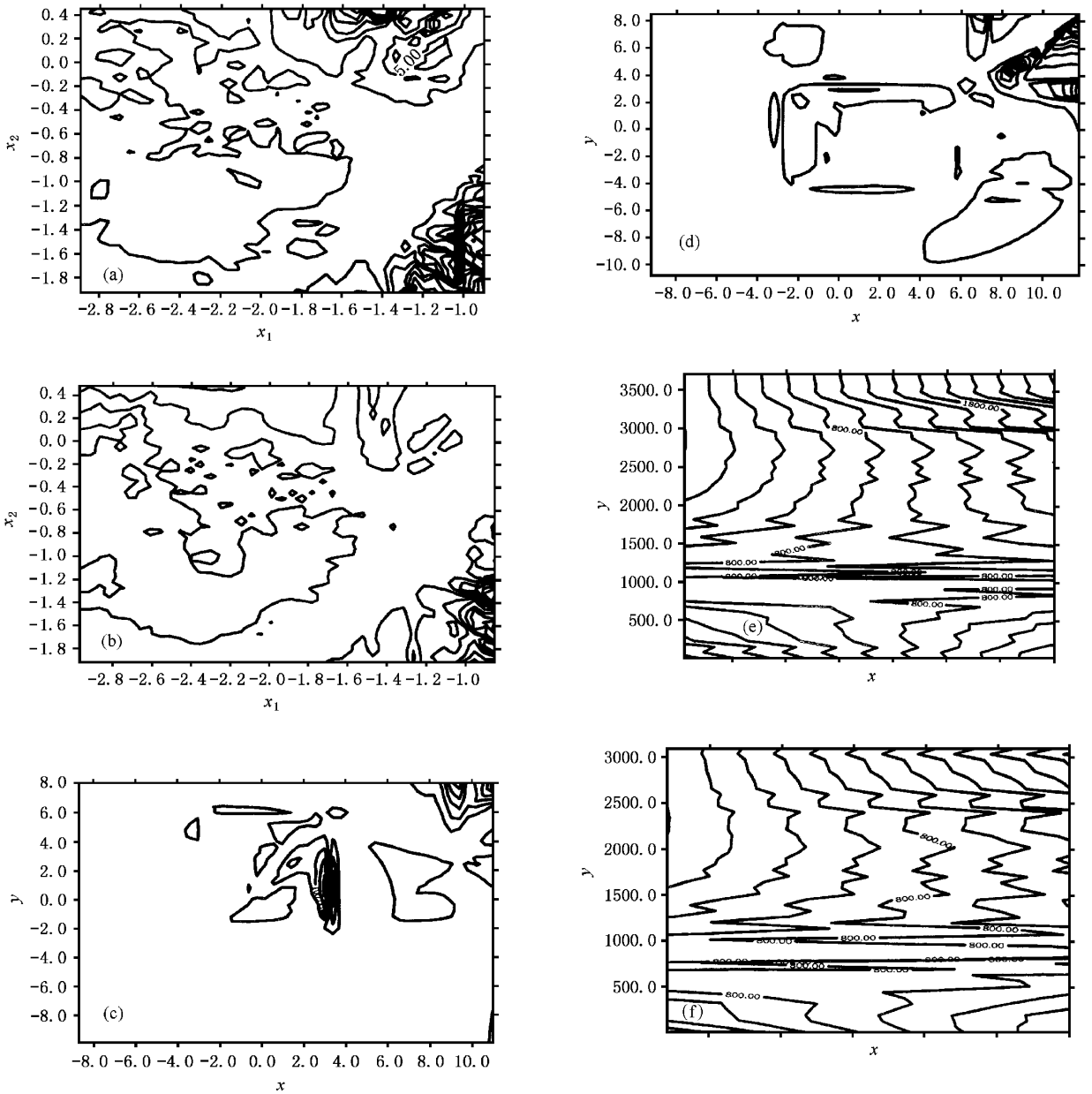


图 4 理想化模式与自忆模式预测结果的平面相图 (a)(b)为简化气候模式的理想场与预测值 (c)(d)为 Rossler 吸引子的理想场与预测值 (e)(f)为超混沌系统的理想场与预测值

表 1 简化气候自忆模式与理想场各分量之间的相关分析

$P \backslash R$	6	10	14	16	18	20	22	24	30
$R_1$	-0.0602	-0.0561	-0.0420	-0.0272	-0.0132	-0.0202	-0.0244	-0.0225	-0.0090
$R_2$	-0.0038	-0.0002	-0.0094	-0.0048	-0.0137	-0.0236	0.0317	0.0371	0.0266
$R_3$	-0.0189	0.0088	-0.0145	-0.1232	0.0108	0.0261	0.0288	0.0287	0.0449

- [ 1 ] C. C. Koo , *Acta Meteorolog. Sin.* ,**29**( 5 )( 1958 ) , 176 ( in Chinese ) [ 顾震潮 , *气象学报* ,**29**( 5 )( 1958 ) , 176 ] .
- [ 2 ] J. F. Chou , *Scientia Sinica* ,**4**( 1974 ) 635 .
- [ 3 ] H. X. Cao , *Science in China ( Series B )* ,**23**( 1993 ) , 104 .
- [ 4 ] J. P. Li , Q. C. Zeng , J. F. Chou , *Science in China ( Series A )* ,**30**( 2000 ) 449 .
- [ 5 ] G. L. Feng , H. X. Cao , *J. Applied Meteorology* ,**10** ( 1999 ) , 470 ( in Chinese ) [ 封国林、曹鸿兴 , *应用气象学报* ,**10** ( 1999 ) , 470 ] .
- [ 6 ] P. Henrici , *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equation* ( John Wiley , New York , 1962 ) , pp. 234 – 239 .

## ON NUMERICAL PREDICTABILITY IN THE CHAOS SYSTEM<sup>\*</sup>

FENG GUO-LIN

( *Department of Physics , Mathematic and Physics College , Yangzhou Unirersity , Yangzhou 225009 , China* )

DAI XIN-GANG WANG AI-HUI CHOU JI-FAN

( *Department of Atmospheric Sciences , Lanzhou University , Lanzhou 730000 , China* )

( Received 30 April 2000 ; revised manuscript received 28 July 2000 )

### ABSTRACT

The rounding-off error introduces uncertainty in the numerical solution. A computational uncertainty principle was explained by using climate model and the Rossler and super chaos system , and the maximally effective computation time and optimal stepsize are discussed. Under optimal stepsize in solving nonlinear ordinary differential equations , self-memorization equations of chaos systems constitute a new approach to numerical weather prediction.

**Keywords** : self-memorization , uncertainty principle , maximally effective computation time

**PACC** : 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 49875024 ) , by the State Key Development Program of Basic Research of China ( Grant No. G19980409-1 ) .