

# 用驱动参量法实现混沌系统的同步\*

杨世平 牛海燕 田 钢 袁国勇 张 闪

(河北师范大学物理系, 石家庄 050091)

(2000 年 7 月 3 日收到, 2000 年 11 月 3 日收到修改稿)

提出了通过外部混沌信号驱动两个混沌系统的某个参量并导致其同步的方法, 以 logistic 映象和 Lorenz 系统这两个典型混沌系统为例, 数值地研究了这种混沌同步方法. 模拟结果表明, 当被驱动参量的变化范围足够大时, 两个或多个混沌系统在新的动力学的基础上达到完全同步. 特别强调指出的是, 观察到了两个 Lorenz 系统依赖于初始条件的不同的同步态.

关键词: 混沌, 同步, 驱动参量法, 反向同步

PACC: 0545; 4265

## 1 引 言

近年来, 人们对混沌系统的同步展开了较为深入的研究, 提出了许多同步的方法<sup>[1-10]</sup>. 从众多的同步方法中不难发现, 系统要达到同步, 它们之间必须存在耦合作用驱使它们朝相同的目标发展, 最终具有相同的动力学行为. 对于耦合形式, 大多数文献采取变量耦合形式, 要么是驱动系统的某一输出或输出变量的某一函数(驱动信号)反馈到响应系统中, 要么是两个系统将各自的某一输出信号分别反馈到对方系统中. 对于通过调整系统参量使之达到同步的情况则研究得较少. Lai 和 Grebogi<sup>[11]</sup>曾在 Ott, Grebogi, York(OGY)控制方法的基础上通过微调响应系统的某一参量实现了两个 Hénon 映象的同步, 但是这种方法只有当响应系统距离目标系统很近时, 才能执行参量微调, 所以事先必须对系统的动力学行为有充分的认识. 文献<sup>[12]</sup>提出的调整响应系统参量的方法主要针对 Pecora-Carroll 同步法不能实现同步的情况, 所以应用上具有一定的局限性. 我们提出的驱动参量法是指利用外部的混沌信号同时驱动两个或多个混沌系统的某一参量, 使之在某一范围内一致地变化, 最终使两个或多个混沌系统达到同步, 而混沌系统本身的变量之间不存在耦合. 该方法既避免了对系统演化行为的长时间的观察, 又具有一定的普遍性. 本文利用驱动参量法

数值地研究了两个 logistic 映象和两个 Lorenz 系统的同步问题, 并特别讨论了两个 Lorenz 系统的同步特点.

## 2 混沌同步方法

考虑  $n$  维非线性自治系统

$$\dot{x} = f(x, a), \quad (1)$$

其中  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $a = (a_1, \dots, a_m)$  为系统参量. 选择某一参量  $a_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) 为被驱动参量, 使之服从下面的变化:

$$a_j(n) = a_j(0) - k |y_n|, \quad (2)$$

$a_j(0)$  是参量初始值,  $k$  是控制参数, 它的取值与参量  $a_j$  的可变范围有关.  $y_n$  是一个已知的离散或连续的混沌驱动信号, 本文采用 logistic 映象

$$y_{n+1} = 1 - \mu y_n^2, \quad (3)$$

取初始条件  $y_0 = 0.776$ , 参数  $\mu = 1.9456$ , 这时方程(3)具有混沌解. 显然, 参量  $a_j$  的变化也是混沌的, 若限定控制参数  $k$  取正实数, 则参量  $a_j$  的变化范围为

$$a_j(n) \in [a_j(0) - k a_j(0)]. \quad (4)$$

我们发现, 随着控制参数  $k$  的增大, 参量  $a_j$  的变化范围增大, 当  $k$  超出某一阈值时, 即参量  $a_j$  的变化范围足够大时, 在  $a_j$  的共同驱动下, 两个或多个混沌系统(1)式会在新的动力学的基础上达到完全同步. 若对不同的初始条件  $x(0)$  和  $x'(0)$ , 存在,  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x'(t)| = 0$ , 我们称  $x(t)$  和  $x'(t)$  达到

\* 河北省自然科学基金(批准号: 197174)资助的课题.

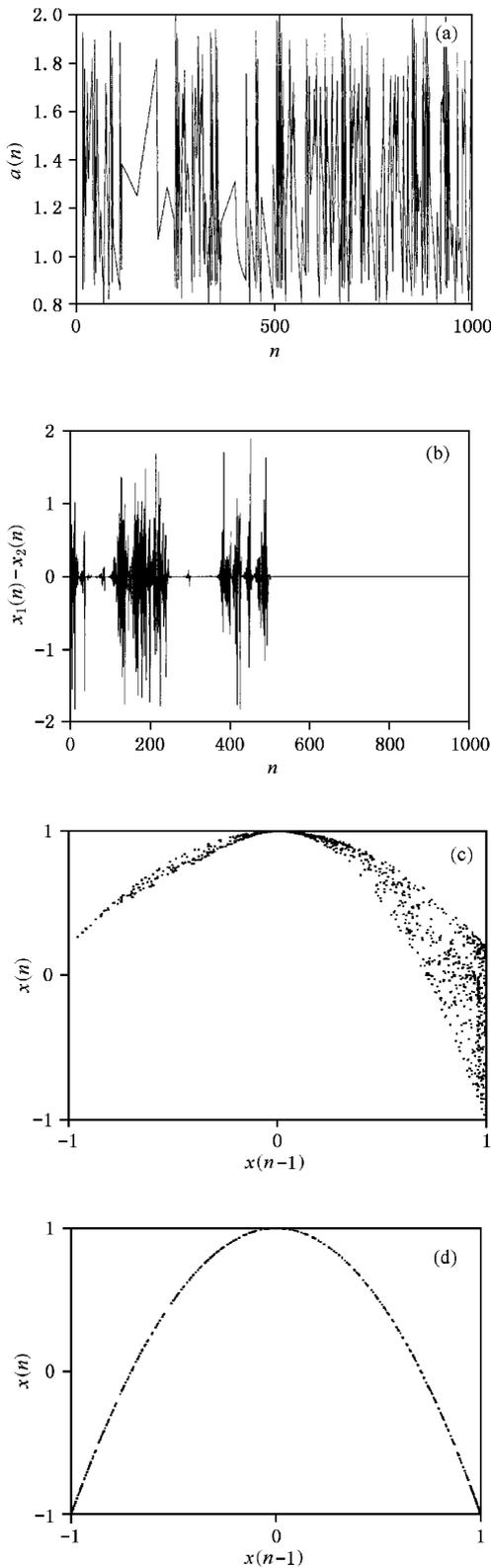


图1 (a)为参量随时间的变化 (b)为差值随时间的变化 (c)为系统达到完全同步后的首归映象 (d)为系统达到完全同步后取消参量驱动的首归映象

正向同步;反之,若  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) + x'(t)| = 0$ , 则称  $x(t)$  和  $x'(t)$  达到反向同步. 值得一提的是, 在混沌参量的驱动下, 系统实质上已经改变了原来混沌系统的形态, 所以可以预见, 同步化过程是非常复杂的, 同步态也不是简单的混沌态, 若需要恢复原来系统的混沌态, 我们可以在系统达到完全同步后取消对参量的驱动. 对  $n$  维离散映象, 上述同步方法可以类推.

### 3 数值模拟结果

以下两个混沌模型为例, 验证上述混沌同步方法的有效性. 首先看 logistic 映象

$$x_1(n+1) = 1 - ax_1(n)^2, \quad (5)$$

$$x_2(n+1) = 1 - ax_2(n)^2, \quad (6)$$

参量初值均取  $a_0 = 2.0$ , 初始条件分别为  $x_1(0) = 0.23$  和  $x_2(0) = -0.89$ . 被驱动参量  $a$  满足

$$a_n = a_0 - k |y_n|. \quad (7)$$

图1(a)显示  $a_n$  在  $[0.8, 2.0]$  之间混沌地变化, 这里取  $k = 1.2$ . 在参量  $a_n$  驱动下, 两个 logistic 映象的轨道很快趋于接近, 大约在  $n > 550$  时达到完全同步 (见图1(b)). 从首归映象我们发现 (见图1(c), 图1(d)), 系统达到完全同步后, 同步态已不是原来 logistic 映象的混沌态, 而是具有更复杂的结构. 这时, 取消对参量的驱动, 系统会很快恢复到原有的混沌态.

下面我们考察 Lorenz 系统,

$$\dot{x}_i = \sigma(y_i - x_i), \quad \dot{y}_i = \gamma x_i - y_i - x_i z_i,$$

$$\dot{z}_i = x_i y_i - b z_i, \quad (8)$$

式中  $i = 1, 2$ . 当参数  $\sigma = 10, \gamma = 28, b = 8/3$  时, 上述系统具有混沌解. 我们选取参量  $\gamma$  为被驱动参量且按如下规律变化:

$$\gamma_n = \gamma_0 - k |y_n|, \quad (9)$$

这里控制参数取  $k = 15$ , 驱动信号  $y_n$  服从(3)式. 显然, 在混沌信号  $y_n$  的驱动下, 参数  $\gamma$  的变化也是混沌的, 其变化范围是  $[13, 28]$ . 现在让两个 Lorenz 系统的参量  $\gamma$  均按(9)式变化, 若选择初始条件  $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 1), (x_2, y_2, z_2) = (-9, -9, 9)$ , 我们发现两系统趋于正向同步 (见图2), 其中  $d_1 = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}$ ; 若初始值  $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 1), (x_2, y_2, z_2) = (9, 9, 9)$ , 则系统的  $x$  和  $y$  变量最终达到反向同步, 而  $z$



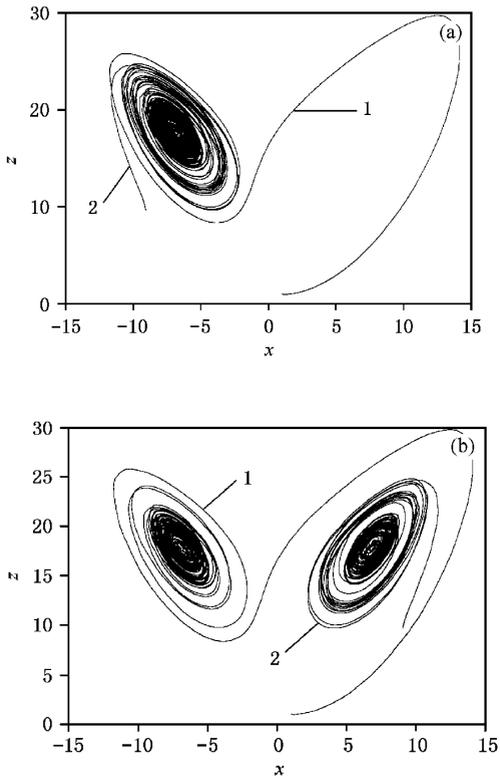


图 4 参量驱动下两系统的吸引域, 初始条件分别为(a)  $(1, 1, 1)$  和  $(-9, -9, 9)$  (b)  $(1, 1, 1)$  和  $(9, 9, 9)$

能达到同步. 图 5 显示了两个系统达到完全同步后的时间演化, 与原有的混沌态相比, 系统变量的振幅明显减小, 这一点与上面在相空间的讨论一致. 综上所述, 在参量驱动下, 系统出现相空间收缩, 到一定程度停止收缩, 然后系统的轨道在这个小范围内作长时间的漫游, 最终两个系统的动力学行为正好相同或完全相反. 这时, 取消参量驱动我们发现, 系统变量的振幅迅速增大(见图 5), 相空间中的轨道立即在两个吸引域间来回穿梭, 系统又恢复到了原来的混沌态.

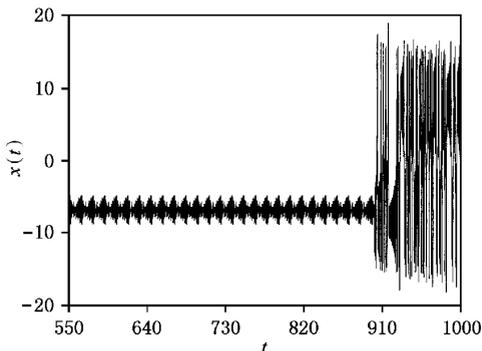


图 5 系统达到完全同步后的时间演化

## 4 结论与讨论

本文提出了一种新的驱动参量同步法, 该方法利用外部混沌信号驱动两个相同混沌系统的某一对应参量, 使之在某一范围内一致地变化. 结果导致两个混沌系统在新的动力学行为的基础上达到完全同步. 正文中的外部驱动信号为离散混沌信号, 我们的研究表明当外部驱动为连续混沌信号时也同样适用. 图 6 给出受连续混沌信号驱动的两个 logistic 映象和两个 Lorenz 系统的时间演化图, 驱动信号是 Rössler 系统的  $y$  分量. 从图 6 中我们发现, 驱动信号改为连续混沌信号后, 两个混沌系统同样能达到完全同步. 由此看来, 驱动参量法具有一定的普遍性. 该方法的优点是: 受混沌信号驱动的参量的变化导致原本混沌系统的演化更具有不可预测性. 从应用角度讲, 我们可以通过对完全同步后的系统执行间歇参量驱动来增加系统演化的复杂性, 而增加加密信号的无序性, 达到提高信号的抗破译能力的目的. 另外, 由于驱动信号作用在参量上, 这样拟同步的系统之间不存在变量的耦合, 给实际制作混沌模

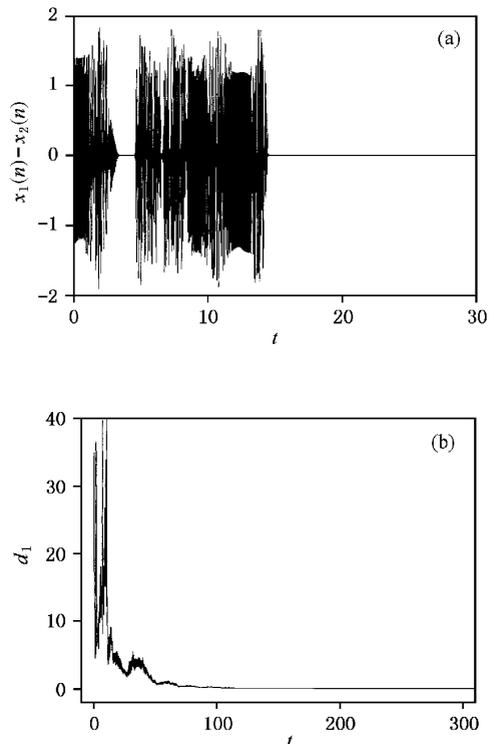


图 6 连续驱动信号同步情况下差值随时间的演化 (a) 为两个 logistic 映象的同步, 控制参数  $k = 0.09$  (b) 为两个 Lorenz 系统的同步, 控制参数  $k = 12$

型带来方便.我们还观察到了两个 Lorenz 系统依赖于初始条件和控制参数的不同的同步态:一种是两个系统的三个对应变量均达到正向同步;另一种是两个系统的对应  $z$  变量达到正向同步,而对应  $x$  和  $y$  变量却趋于反向同步.正如前文所述,这样的同步结果与 Lorenz 系统本身的特点有关.对于具有其他对称性的混沌系统的同步问题,我们还在做进一步的研究. Rulkov 等<sup>[5]</sup>曾将由 Pecora 和 Carroll 提出

的同步概念进一步推广,他们指出:从不同初始条件出发的两条混沌轨道  $x(t)$  和  $y(t)$ ,若随时间的演化最终满足稳定的函数关系  $y(t) = f[x(t)]$ ,则称  $x(t)$  和  $y(t)$  达到广义同步.而反向同步是指最终同步的两个系统的变量  $x(t)$  和  $y(t)$  的大小相等但方向相反,即  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -x(t)$ ,所以,反向同步实质上是一种广义同步.

- [1] L. M. Pecora, T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 821.
- [2] K. Pyragas, *Phys. Lett.*, **A170**(1992) A21.
- [3] L. Kocarev, U. Parlitz, *Phys. Rev. Lett.*, **74**(1995) 5028.
- [4] J. Güemez, C. Martín, M. A. Matías, *Phys. Rev.*, **E55**(1997), 124.
- [5] N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. Tsimring *et al.*, *Phys. Rev.*, **E51**(1995) 980.
- [6] X.S. Luo, J. Q. Fang *et al.*, *Acta Phys. Sin.*, **48**(1999), 2022 [in Chinese] 罗晓曙、方锦清等, *物理学报*, **48**(1999), 2022.]
- [7] J. L. Wang, G. Z. Chen, *Acta Phys. Sin.*, **48**(1999), 1605 (in Chinese) 王金兰、陈光旨, *物理学报*, **48**(1999), 1605.]
- [8] F. Liu, Z. L. Mu, Z. L. Qiu, *Acta Phys. Sin.*, **48**(1999), 1198 [in Chinese] 刘 锋、穆肇骊、邱祖廉, *物理学报*, **48**(1999), 1198.]
- [9] V. S. Anishchenko, A. N. Silchenko, I. A. Khovanov, *Phys. Rev.*, **E57**(1998) 316.
- [10] D. Y. Tang, N. R. Heckenberg, *Phys. Rev.*, **E55**(1997), 6618.
- [11] Y. C. Lai, C. Grebogi, *Phys. Rev.*, **E47**(1993) 2357.
- [12] Z. H. Liu, S. G. Chen, *Phys. Rev.*, **E55**(1997) 6651.
- [13] J. M. González-Miranda, *Phys. Rev.*, **E53**(1996) 5656.

## SYNCHRONIZING CHAOS BY DRIVING PARAMETER<sup>\*</sup>

YANG SHI-PING NIU YHAI-YAN TIAN GANG YUAN GUO-YONG ZHANG SHAN

(Department of Physics, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050091, China)

(Received 3 July 2000; revised manuscript received 3 November 2000)

### ABSTRACT

The method of synchronizing chaos based on driving a certain parameter of chaotic systems using the chaotic signal outside is proposed. The Logistic map and the Lorenz systems are taken as two typical examples. The simulation results show that two identical chaotic systems can be synchronized completely when the change scope of the parameter driven is large enough. On the other hand, the different synchronization states depending on the initial conditions and the controlling parameter are found in Lorenz systems.

**Keywords:** chaos, synchronization, driving parameter method, anti-phase synchronization

**PACC:** 0545, 4265

<sup>\*</sup> Project supported by the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. 197174).