第 50 卷 第 4 期 2001 年 4 月
1000-3290/2001/50(04)/0690-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 50, No. 4, April, 2001

奇偶 q-变形相干态的高阶压缩效应

汪仲清
(石油大学应用物理系,东营 257061)

(2000 年 9 月 1 日收到;2000 年 9 月 29 日收到修改稿)

研究了奇偶 q-变形相干态中光场的高阶压缩效应.数值计算结果发现,奇偶 q-变形相干态中光场的高阶压缩效应与参数值 q 有关,当参数 q 取偏离 1 较大的值时,q-变形奇偶相干态均可具有奇次方阶压缩效应却无偶次方阶压缩效应,这与通常奇偶相干态的压缩特性是不同的.

关键词:光场,q-变形相干态,高阶压缩效应
PACC:4250,0365

1 引 言

自从 1989 年 Biedenharn[1] 将具有李群结构的相干态推广到具有量子群结构的 q-变形相干态以来,q-变形相干态就受到人们广泛关注[2—7].如同相干态在物理学中的地位,量子代数的 q-相干态在物理学的许多领域及数学物理方面存在着广泛的应用前景.将奇偶相干态与量子群联系起来得到奇偶 q-相干态[8—9]同样具有重要的意义,它的非经典性质明显地受参数 q 值的影响[10],这表明用量子群研究光场能更深刻地揭示光场的性质.

奇偶相干态是光子湮没算符平方的本征态,它们共同构成一个完备的 Hilbert 空间.从场的性质方面来看,奇偶相干态具有一种我们熟知的非经典特性,偶相干态具有压缩特性而无反聚束特性;奇相干态具有反聚束特性而无压缩特性.王发伯、匡乐满构造了奇偶 q-变形相干态,并且研究了它们的一些量子统计性质,指出奇偶 q-变形相干态也具有上述非经典特性[8].本文在此基础上研究奇偶 q-变形相干态的高阶压缩效应,发现奇偶 q-变形相干态的高阶压缩效应与参数 q 的取值有关.当 q 参数取偏离 1 较大的值时,q-变形奇偶相干态的光场振幅均可呈现奇次方阶压缩效应却无偶次方阶压缩效应.

2 奇偶 q-变形相干态

q-变形玻色产生算符 a_q^+ 和湮没算符 a_q 以及数算符 N_q 满足如下关系式:

$$a_q a_q^+ - q a_q^+ a_q = q^{-N_q}, \tag{1}$$

$$[N_q, a_q] = -a_q, [N_q, a_q^+] = a_q^+, \tag{2}$$

其中 q 为变形参数.a_q,a_q^+ 和 N_q 作用于 q-Fock 空间 $\{|n\rangle_q\}$($n=0,1,2,\cdots$),

$$a_q |n\rangle_q = \sqrt{[n]_q}\, |n-1\rangle_q, \tag{3a}$$

$$a_q^+ |n\rangle_q = \sqrt{[n+1]_q}\, |n+1\rangle_q, \tag{3b}$$

$$N_q |n\rangle_q = n |n\rangle_q, \tag{3c}$$

符号$[x]_q$ 定义为$[x]_q = (q^x - q^{-x})/(q - q^{-1})$,$|n\rangle_q$定义为

$$|n\rangle_q = \frac{(a_q^+)^n}{([n]_q!)^{1/2}} |0\rangle_q, \tag{4}$$

其中 q-阶乘理解为$[n]_q! = [n]_q[n-1]_q\cdots[1]_q$,$q$-Fock 空间构成一个完备的 Hilbert 空间

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle_{qq}\langle n|. \tag{5}$$

在 q-Fock 空间内可将 Biedenharn[1] 引入的 q-相干态$|z\rangle_q$

$$a_q |z\rangle_q = z |z\rangle_q, \tag{6}$$

表示成如下形式:

$$|z\rangle_q = \exp_q\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{[n]_q!}} |n\rangle_q, \tag{7}$$

其中 q-指数函数 e_q^x 定义为

$$e_p^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q!}. \tag{8}$$

根据文献[8],q-变形奇相干态 $|z\rangle_q^{o}$ 和偶相干态 $|z\rangle_q^{e}$ 定义为

$$|z\rangle_q^{o}=N_q^{o}(z)\sinh_q(za_q^{+})|0\rangle_q,\tag{9a}$$

$$|z\rangle_q^{e}=N_q^{e}(z)\cosh_q(za_q^{+})|0\rangle_q,\tag{9b}$$

其中 $N_q^{o}(z)$和 $N_q^{e}(z)$是归一化常数,q-双曲函数

$$\sinh_q(x)=\frac{1}{2}(e_q^{x}-e_q^{-x})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{[2n+1]_q!},\tag{10a}$$

$$\cosh_q(x)=\frac{1}{2}(e_q^{x}-e_q^{-x})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{[2n]_q!},\tag{10b}$$

则奇偶 q-相干态可写成

$$|z\rangle_q^{o}=N_q^{o}(z)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{\sqrt{[2n+1]_q!}}|2n+1\rangle_q,\tag{11a}$$

$$|z\rangle_q^{e}=N_q^{e}(z)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{\sqrt{[2n]_q!}}|2n\rangle_q,\tag{11b}$$

它们是 q-湮没算符平方的本征态,本征值为 z^2,$N_q^{o}(z)$和 $N_q^{e}(z)$可由归一化条件求得

$$N_q^{o}(z)=(\sinh_q(z\bar{z}))^{-1/2},\tag{12a}$$

$$N_q^{e}(z)=(\cosh_q(z\bar{z}))^{-1/2},\tag{12b}$$

$\bar{z}$ 表示 z 的复数共轭,由(11)式可以得到

$${}_q^{o}\langle z'|z\rangle_q^{o}=N_q^{o}(z')N_q^{o}(z)\sinh_q(z\bar{z}'),\tag{13a}$$

$${}_q^{e}\langle z'|z\rangle_q^{e}=N_q^{e}(z')N_q^{e}(z)\cosh_q(z\bar{z}'),\tag{13b}$$

$${}_q^{o}\langle z'|z\rangle_q^{e}=0,\tag{13c}$$

这表明奇偶 q-变形相干态是非正交的,而奇 q-相干态和偶 q-相干态相互正交.

由(3a)和(11)式容易得到

$$a_q|z\rangle_q^{o}=z(\coth_q(z\bar{z}))^{1/2}|z\rangle_q^{e},\tag{14a}$$

$$a_q|z\rangle_q^{e}=z(\tanh_q(z\bar{z}))^{1/2}|z\rangle_q^{o},\tag{14b}$$

其中

$$\tanh_q(x)=\frac{e_q^{x}-e_q^{-x}}{e_q^{x}+e_q^{-x}},\tag{15a}$$

$$\coth_q(x)=\frac{e_q^{x}+e_q^{-x}}{e_q^{x}-e_q^{-x}},\tag{15b}$$

因此奇偶 q-相干态可以通过 q-湮没算符的作用来变换,不难进一步推知

$$a_q^{M}|z\rangle_q^{o}=\begin{cases}z^{M}|z\rangle_q^{o}\\ \quad(M=2n,n=1,2,3,\cdots);\\ z^{M}(\coth_q(z\bar{z}))^{1/2}|z\rangle_q^{e}\\ \quad(M=2n+1,n=0,1,2,\cdots),\end{cases}\tag{16a}$$

$$a_q^{M}|z\rangle_q^{e}=\begin{cases}z^{M}|z\rangle_q^{e}\\ \quad(M=2n,n=1,2,3,\cdots);\\ z^{M}(\tanh_q(z\bar{z}))^{1/2}|z\rangle_q^{o}\\ \quad(M=2n+1,n=0,1,2,\cdots).\end{cases}\tag{16b}$$

3　奇偶 q-变形相干态的高阶压缩效应

用 q-玻色产生算符 a_q^{+} 和湮没算符 a_q 定义两个厄密算符

$$V_1=(a_q^{+M}+a_q^{M})/2,$$

$$V_2=\mathrm{i}(a_q^{+M}-a_q^{M})/2,\tag{17}$$

它们分别表示 q-变形光场复振幅 M 次幂的实部和虚部,并满足

$$[V_1,V_2]=\mathrm{i}[a_q^{M},a_q^{+M}]/2,\tag{18}$$

$$\Delta V_1^2\cdot\Delta V_2^2\geqslant\frac{1}{16}|\langle[a_q^{M},a_q^{+M}]\rangle|^2,\tag{19}$$

如果存在不等式

$$\langle\Delta V_i^2\rangle-\frac{1}{4}\langle[a_q^{M},a_q^{+M}]\rangle<0\quad i=1,2,\tag{20}$$

则称 q-变形光场存在振幅 M 次方阶压缩效应.

令 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$,利用(16)式,通过计算可以得到

$${}_q^{o}\langle z|\Delta V_1^2|z\rangle_q^{o}-\frac{1}{4}{}_q^{o}\langle z|[a_q^{M},a_q^{+M}]|z\rangle_q^{o}$$

$$=\begin{cases}0\\ \quad(M=2n,n=1,2,3,\cdots);\\ \frac{1}{2}r^{2M}(\cos2M\theta+\coth_q r^{-2})\\ \quad(M=2n+1,n=0,1,2,\cdots),\end{cases}\tag{21}$$

$${}_q^{e}\langle z|\Delta V_1^2|z\rangle_q^{e}-\frac{1}{4}{}_q^{e}\langle z|[a_q^{M},a_q^{+M}]|z\rangle_q^{e}$$

$$=\begin{cases}0\\ \quad(M=2n,n=1,2,3,\cdots);\\ \frac{1}{2}r^{2M}(\cos2M\theta+\tanh_q r^{-2})\\ \quad(M=2n+1,n=0,1,2,\cdots).\end{cases}\tag{22}$$

由(21)式和(22)式可以看出,q-变形奇偶相干态不存在光场振幅的偶(M 为偶数)次方阶压缩效

应.当 $q=1$ 时,有 $\coth r^2>1$ 和 $\tanh r^2<1$,所以通常的奇相干态不存在压缩效应;而通常的偶相干态在 $\cos 2M\theta+\tanh r^2<0$ 时可呈现光场振幅的奇(M 为奇数)次方阶压缩效应.当 $q<1$ 时,数值计算结果发现,q-双曲函数 $\tanh_q r^2$ 和 $\coth_q r^2$ 受到 q 参数的调制,当 q 取偏离 1 较大的值(例如 $q<0.75$)时,函数 $\tanh_q r^2$ 和 $\coth_q r^2$ 随着 r^2 的变化可以大于 1,也可以小于 1,则 q-变形奇偶相干态的高阶压缩特性要由 $\tanh_q r^2<1$(或 $\coth_q r^2<1$)来确定.当 $\cos 2M\theta+\coth_q r^2<0$(或 $\cos 2M\theta+\tanh_q r^2<0$)时,$q$-变形奇偶相干态将会呈现光场振幅的奇($M$ 为奇数)次方阶压缩效应,特别地,当 $\theta=\theta_m=\frac{2m+1}{2M}\pi$ ($m=0,1,2,\cdots$)时,$\cos 2M\theta_m=-1$,这时在 r^2 取值的某些范围内,有 $\tanh_q r^2<1$(或 $\coth_q r^2<1$),则 q-变形奇偶相干态呈现光场振幅的奇次方阶压缩效应.

在(21)和(22)式中,取 $M=1$,则有

$$
{}_q^{\mathrm{o}}\langle z\mid\Delta V_1^2\mid z\rangle_q^{\mathrm{o}}-\frac{1}{4}\,{}_q^{\mathrm{o}}\langle z\mid[a_q,a_q^+]\mid z\rangle_q^{\mathrm{o}}
=\frac{1}{2}r^2(\cos 2\theta+\coth_q r^2), \tag{23}
$$

$$
{}_q^{\mathrm{e}}\langle z\mid\Delta V_1^2\mid z\rangle_q^{\mathrm{e}}-\frac{1}{4}\,{}_q^{\mathrm{e}}\langle z\mid[a_q,a_q^+]\mid z\rangle_q^{\mathrm{e}}
=\frac{1}{2}r^2(\cos 2\theta+\tanh_q r^2). \tag{24}
$$

这便得到了文献[8]的结果.

4 结 论

在 q-变形相干态中,研究了 q-变形光场振幅的高阶(M 次方)压缩效应.我们发现,当参数 q 取偏离 1 较大的值时,q-变形奇偶相干态均有可能出现奇次方阶压缩效应,而不存在偶次方阶压缩效应,这与通常光场振幅的压缩特性是不同的.

[1] L.C. Biedenharn. *J. Phys.*, **A22**(1989), L873.

[2] M. Chaichiur, D. Ellinas, P. Kullish, *Phys. Rev. Lett.*, **65**(1990), 980.

[3] C. Quesne. *Phys. Lett.*, **A153**(1991), 303.

[4] L. M. Kuang, F.B. Wang. *Phys. Lett.*, **A173**(1993), 221.

[5] S.R. Hao, *Acta Phys. Sin.*, **42**(1993), 1057(in Chinese)[郝三如,物理学报,**42**(1993),1057].

[6] Z.X. Lin, Y. P. Yang, W. G. Feng, *Acta Phys. Sin.*, **47**(1998), 1976(in Chinese)[林志新、羊亚平、冯伟国,物理学报,**47**(1998),1976].

[7] Y.W. Liu, C.Y. Chen, *Acta Opt. Sin.*, **19**(1999), 1459(in Chinese)[刘友文、陈昌远,光学学报,**19**(1999),1459].

[8] F.B. Wang, L.M. Kuang. *J. Phys.*, **A26**(1993), 293.

[9] L.F. Wei, *Acta Phys. Sin.*, **42**(1993), 757(in Chinese)[韦联福,物理学报,**42**(1993), 757].

[10] C.X. Zhu, F. B. Wang, L. M. Kuang, *Acta Phys. Sin.*, **43**(1994), 1262(in Chinese)[朱从旭,王发伯,匡乐满,物理学报,**43**(1994),1262].

HIGHER POWER SQUEEZING EFFECTS FOR ODD AND EVEN *q*-COHERENT STATES

WANG ZHONG-QING

(*Department of Applied Physics*, *University of Petroleum*, *Dongying* 257061, *China*)

(Received 1 September 2000; revised manuscript received 29 September 2000)

ABSTRACT

The higher power squeezing effects of photon field for odd and even q-coherent states have been studied. We find that the squeezing effects are influenced by the values of parameter q, and the odd and even q-deformed coherent states can exhibit odd power squeezing effect but no even power squeezing effect when parameter q is taken values departure from 1 greatly, and these squeezing characteristics are different from those of the conventional odd and even coherent states.

Keywords: photon field, q-deformed coherent state, higher power squeezing effect

PACC: 4250, 0365