第 50 卷 第 5 期 2001 年 5 月
1000-3290/2001/50(05)/0816-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50,No.5,May,2001

仅含第二类约束的约束 Hamilton 系统的 Lie 对称性*

张 毅
(苏州城建环保学院基础部,苏州 215011)
薛 纭
(上海应用技术学院机械工程系,上海 200233)
(2000 年 10 月 10 日收到;2000 年 12 月 22 日收到修改稿)

研究仅含第二类约束的约束 Hamilton 系统的 Lie 对称性.建立 Lie 对称性的确定方程、限制方程和附加限制方程,给出由 Lie 对称性导致守恒量的条件及守恒量的形式.

关键词:奇异系统,正则变量,约束,Lie 对称性,守恒量
PACC:0320,1110,0220

1 引 言

用奇异 Lagrange 函数描述的系统称为奇异系统.一个动力学系统可以用 Lagrange 形式描述,也可以用 Hamilton 形式来描述.对于奇异系统,利用 Legendre 变换,从 Lagrange 描述过渡到 Hamilton 描述时,在相空间中正则变量之间将存在固有正则约束,所以又称为约束 Hamilton 系统[1].物理上许多重要的系统是奇异系统或约束 Hamilton 系统,例如,局域变换下不变的系统(包括所有规范理论).

对称性原理是物理学中更高层次的法则[2].寻求力学系统的守恒量问题,不仅在数学上有重要意义,而且反映深刻的物理本质.对称性与守恒量之间有潜在关系,近代寻求守恒量主要有两种方法[1-8]:Noether 对称性与 Lie 对称性.文献[3]研究了约束 Hamilton 系统的 Noether 对称性.

本文研究仅含第二类约束的约束 Hamilton 系统的 Lie 对称性与守恒量.建立系统的运动微分方程,取时间、广义坐标和广义动量的无限小变换,给出系统 Lie 对称性的定义,研究了 Lie 对称性导致守恒量的条件以及守恒量的形式.

2 系统的运动微分方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s($s=1,\cdots,n$)来确定,系统的 Lagrange 函数为 $L(t;\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$,广义动量为 $P_s=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}$($s=1,\cdots,n$),设 L 的 Hess 矩阵$\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\right)$的秩为 $r<n$.利用 Legendre 变换,将 Lagrange 描述过渡到 Hamilton 描述时,在相空间中正则变量之间存在约束

$$\phi_j(t;\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=0,(j=1,\cdots,n-r),\qquad(1)$$

则约束 Hamiltom 系统的正则方程为[1]

$$\dot{q}_s=\{q_s,H_{\mathrm{T}}\},\dot{p}_s=\{p_s,H_{\mathrm{T}}\},\qquad(2)$$

其中 $H_{\mathrm{T}}=H_{\mathrm{c}}+\lambda_j\phi_j$ 称为总 Hamilton 函数,H_{c} 为正则 Hamilton 函数,λ_j 为 Lagrange 乘子.方程(2)可写为

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial p_s}+\lambda_j\frac{\partial \phi_j}{\partial p_s},$$

$$\dot{p}_s=-\frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial q_s}-\lambda_j\frac{\partial \phi_j}{\partial q_s},$$

$$(s=1,\cdots,n;j=1,\cdots,n-r),\qquad(3)$$

考虑系统仅含第二类约束,即假设约束(1)式为第二类约束[1],有 $\det|\{\phi_i,\phi_j\}|_{\phi=0}\neq 0$,($i\neq j;i,j=1,\cdots,$

* 国家自然科学基金(批准号:19972010)和苏州城建环保学院科研基金资助的课题.

$n-r$),于是,(3)式中所有 Lagrange 乘子 λ_j 可完全确定[1],有 $\lambda_j=\lambda_j(t;\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$.

3　无限小变换与 Lie 对称性

引入时间,广义坐标和广义动量的无限小群变换

$$t^*=t+\Delta t,$$
$$q_s^*(t^*)=q_s(t)+\Delta q_s,$$
$$p_s^*(t^*)=p_s(t)+\Delta p_s,(s=1,\cdots,n),\quad(4)$$

其展开式为

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),$$
$$q_s^*=q_s+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),$$
$$p_s^*=p_s+\varepsilon\eta_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),(s=1,\cdots,n),\quad(5)$$

其中 ε 为无限小参数,ξ_0,ξ_s,η_s 为无限小变换的生成元.取无限小生成元向量

$$X^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\eta_s\frac{\partial}{\partial p_s}\quad(6)$$

及其一次扩展

$$X^{(1)}=X^{(0)}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}+(\dot{\eta}_s-\dot{p}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{p}_s}.\quad(7)$$

根据微分方程在无限小变换下的不变性理论知,(3)式在无限小变换(5)式下的不变性归结为

$$\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0=X^{(0)}\left(\frac{\partial H_c}{\partial p_s}\right)+X^{(0)}\left(\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial p_s}\right),$$
$$\dot{\eta}_s-\dot{p}_s\dot{\xi}_0=-X^{(0)}\left(\frac{\partial H_c}{\partial q_s}\right)-X^{(0)}\left(\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial q_s}\right),$$
$$(s=1,\cdots,n).\quad(8)$$

约束(1)式在无限小变换(5)式下的不变性归结为

$$X^{(0)}(\phi_j(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}))\big|_{\phi_j=0}=0,(j=1,\cdots,n-r).\quad(9)$$

称(8)式为无限小生成元的确定方程,(9)式为无限小生成元的限制方程.

定义1　如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足确定方程(8),则称相应的对称性为与约束 Hamilton 系统(1),(2)式相应的自由 Hamilton 系统(3)式的 Lie 对称性.

定义2　如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足确定方程(8)和限制方程(9),则称相应的对称性为约束 Hamilton 系统(1),(2)的弱 Lie 对称性.

单从微分方程在无限小变换下的不变性考虑,上述定义的弱 Lie 对称性就是通常理解的 Lie 对称性.但是,若考虑到微分方程的导出过程,则因对无限小生成元还要施加另外的限制,而必须定义另外的 Lie 对称性.在推导(2)式时,有[1]

$$\delta\phi_j=\frac{\partial\phi_j}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial\phi_j}{\partial p_s}\delta p_s=0.\quad(10)$$

将由变换(5)式确定的等时变分代入(10)式,有

$$\frac{\partial\phi_j}{\partial q_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\frac{\partial\phi_j}{\partial p_s}(\eta_s-\dot{p}_s\xi_0)=0,\quad(11)$$

称方程(11)为附加限制方程.

定义3　如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足确定方程(8),限制方程(9)和附加限制方程(11),则相应的对称性为约束 Hamilton 系统(1),(2)的强 Lie 对称性.

4　结构方程与守恒量

对于约束 Hamilton 系统,Lie 对称性不一定导致守恒量.下面的定理给出 Lie 对称性导致守恒量的条件以及守恒量的形式.

定理1　对于满足确定方程(8)的无限小生成元 ξ_0,ξ_s,η_s,如果存在规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$满足结构方程

$$-H_c\dot{\xi}_0+\dot{q}_s\eta_s+p_s\dot{\xi}_s-X^{(0)}(H_c)$$
$$-\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial q_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)-\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial p_s}(\eta_s-\dot{p}_s\xi_0)+\dot{G}=0,\quad(12)$$

则与约束 Hamilton 系统(1),(2)式相应的自由 Hamilton 系统(3)式存在如下形式的 Lie 对称性守恒量:

$$I=-H_c\xi_0+p_s\xi_s+G=\text{const}.\quad(13)$$

证明

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\dot{H}_c\xi_0-H_c\dot{\xi}_0+\dot{p}_s\xi_s+p_s\dot{\xi}_s+\dot{G}$$
$$=\left(\dot{p}_s+\frac{\partial H_c}{\partial q_s}+\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial q_s}\right)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)$$
$$+\left(-\dot{q}_s+\frac{\partial H_c}{\partial p_s}+\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial p_s}\right)(\eta_s-\dot{p}_s\xi_0)=0.$$

定理2　对于满足确定方程(8)和限制方程(9)的无限小生成元 ξ_0,ξ_s,η_s,如果存在规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$满足结构方程(12),则约束 Hamilton 系统(1),(2)式存在形如(13)式的弱 Lie 对称性守恒量.

定理3　对于满足确定方程(8),限制方程(9)和附加限制方程(11)的无限小生成元 ξ_0,ξ_s,η_s,如果存在规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$满足结构方程

$$-H_c\dot{\xi}_0+\dot{q}_s\eta_s+p_s\dot{\xi}_s-X^{(0)}(H_c)+\dot{G}=0, \tag{14}$$

则约束 Hamilton 系统(1),(2)式存在形如(13)式的强 Lie 对称性守恒量.

5 算 例

例 系统的 Lagrange 函数为[2]

$$L=\dot{q}_1q_2-q_1\dot{q}_2+q_1^2+q_2^2, \tag{15}$$

试研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

系统的广义动量分别为

$$p_1=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1}=q_2,p_2=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_2}=-q_1, \tag{16}$$

Lagrange 函数 L 的 Hess 矩阵的轶 $r=0$,从而正则变量之间存在两个约束

$$\phi_1=p_1-q_2=0,$$
$$\phi_2=p_2+q_1=0. \tag{17}$$

系统的正则 Hamilton 函数为

$$H_c=\dot{q}_1p_1+\dot{q}_2p_2-L=-(q_1^2+q_2^2), \tag{18}$$

总 Hamilton 函数为

$$H_T=-(q_1^2+q_2^2)+\lambda_1(p_1-q_2)+\lambda_2(p_2+q_1). \tag{19}$$

由约束的相容性条件[1],容易得到

$$\lambda_1=-q_2,\lambda_2=q_1. \tag{20}$$

系统的运动微分方程给出

$$\dot{q}_1=-q_2,\dot{q}_2=q_1,\dot{p}_1=q_1,\dot{p}_2=q_2, \tag{21}$$

确定方程(8)给出

$$\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0=-\xi_2,\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0=\xi_1,$$
$$\dot{\eta}_1-\dot{p}_1\dot{\xi}_0=\xi_1,\dot{\eta}_2-\dot{p}_2\dot{\xi}_0=\xi_2, \tag{22}$$

(22)式有如下解

$$\xi_0=-1,\xi_1=\cos t,\xi_2=\sin t,$$
$$\eta_1=\sin t,\eta_2=-\cos t, \tag{23}$$

$$\xi_0=1,\xi_1=-q_2,\xi_2=q_1,\eta_1=q_1,\eta_2=q_2, \tag{24}$$

$$\xi_0=0,\xi_1=-q_2,\xi_2=q_1,$$
$$\eta_1=q_1+1,\eta_2=q_2+1. \tag{25}$$

限制方程(9)给出

$$\eta_1-\xi_2=0,\eta_2+\xi_1=0. \tag{26}$$

附加限制方程(11)给出

$$\eta_1-\xi_2+(\dot{q}_2-\dot{p}_1)\xi_0=0,$$
$$\eta_2+\xi_1-(\dot{q}_1+\dot{p}_2)\xi_0=0. \tag{27}$$

生成元(23),(24),(25)对应的规范函数分别为

$$G_1=-p_1\cos t-p_2\sin t, \tag{28}$$
$$G_2=0, \tag{29}$$
$$G_3=0, \tag{30}$$

对应的守恒量分别为

$$I_1=q_1^2+q_2^2=\text{const}. \tag{31}$$
$$I_2=q_1p_2-q_2p_1+q_1^2+q_2^2=\text{const}. \tag{32}$$
$$I_3=-p_1q_2+p_2q_1=\text{const}. \tag{33}$$

易验证,生成元(23),(24)式均满足条件(26),(27)式,它们对应系统的强 Lie 对称性,守恒量(31),(32)式为系统的强 Lie 对称性守恒量;生成元(25)式不满足条件(26),(27)式,因此,它是相应自由 Hamilton 系统(21)式的 Lie 对称变换的生成元,守恒量(33)为相应自由 Hamilton 系统的 Lie 对称性守恒量.

[1] Z. P. Li, Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties (Beijing Polytechnic University Press, Beijing, 1993), p.1 (in Chinese) [李子平,经典和量子约束系统及其对称性质(北京工业大学出版社,北京,1993),第1页].

[2] F. X. Mei, Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems (Science Press, Beijing, 1999), p.1 (in Chinese) [梅凤翔,李群和李代数对约束力学系统的应用(科学出版社,北京,1999),第1页].

[3] Z. P. Li, *Chinese Science Bulletin*, **36**(1991), 958 (in Chinese) [李子平,科学通报,**36**(1991),958].

[4] Y. Zhang, M. Shang, F. X. Mei, *Chinese Physics*, **9**(2000), 401.

[5] Y. Zhang, F. X. Mei, *Chinese Science Bulletin*, **45**(2000), 1354.

[6] Y. Y. Zhao, F. X. Mei, Symmetries and Invariants of Mechanical Systems (Science Press, Beijing, 1999), p.1 (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔,力学系统的对称性与守恒量(科学出版社,北京,1999),第1页].

[7] A. E. Noether, *Mathematisch-Physicalishe Klasse*, **2**(1918), 235.

[8] M. Lutzky, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **12**(1979), 973.

LIE SYMMETRIES OF CONSTRAINED HAMILTONIAN SYSTEM WITH THE SECOND TYPE OF CONSTRAINTS*

ZHANG YI[1)] XUE YUN[2)]
[1)] (*Department of Basic Courses, Suzhou Institute of Urban Construction & Environmental Protection, Suzhou* 215011, *China*)
[2)] (*Department of Mechanical Engineering, Shanghai Institute of Applied Technology, Shanghai* 200233, *China*)
(Received 10 October 2000; revised manuscript received 22 December 2000)

ABSTRACT

We have studied the Lie symmetries of a constrained Hamiltonian system only with the second type of constraints, and establised the determining equations, the restriction equations and the additional restriction equations. The conditions under which a Lie symmetry can lead to a conserved quantity and the form of the quantity were given.

Keywords: singular system, canonical variable, constraint, Lie symmetry, conserved quantity
PACC: 0320, 1110, 0220

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19972010) and the Research Foundation of Suzhou Institute of Urban Construction & Environmental Protection of China.