第 50 卷 第 5 期 2001 年 5 月
1000-3290/2001/50(05)/0825-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50,No.5,May,2001

(1+1)自由度 para 粒子的超对称量子力学*

杨为民 井思聪

(中国科学技术大学近代物理系,合肥 230027)

(2000 年 10 月 27 日收到;2000 年 11 月 30 收到修改稿)

讨论了同阶 p 的一自由度 para 玻色子和一自由度 para 费米子所组成的 para 粒子系统的 Fock 态空间结构与超对称量子力学.发现除了四种退化的特殊情况之外,这个(1+1)自由度 para 粒子系统的态空间结构一般具有内禀二重简并性.进一步揭示了这个 para 量子系统除了具有动力学超对称性之外,还存在着一层隐藏的内禀超对称性,并且这种内禀超对称性对于整个系统超对称性的严格性起着十分关键的作用.

关键词:para 统计,Fock 态空间,超对称性
PACC:0365

1 引 言

自 Green 提出 para 统计观念以来[1],它已经在许多方面被发展和推广了[2].近年来 para 统计和超对称性相结合的 para 超对称理论的研究正越来越引起人们的关注,特别是由于它可能与量子霍尔效应和高温超导有关[3].para 超对称量子力学的概念最早是由 Rubakov 和 Spiridonov 引入的[4],但是他们只讨论了普通玻色子和 para 费米子之间的超对称性,而相同阶 p 的 para 玻色子和 para 费米子之间真正意义上的 para 超对称量子力学却至今没有给出,这是因为(1+1)自由度 para 粒子系统的态空间结构一直是一个未解决的问题.本文首先给出(1+1)自由度 para 粒子系统的 Fock 态空间结构,然后再讨论其量子力学的超对称性.

2 (1+1)自由度 para 粒子系统的 Fock 态空间结构

(1+1)自由度 para 粒子系统的统计代数关系可以写为下面十个相互独立的式子:

$$
\begin{gathered}
[a,\{a^+,a\}]=2a,[f,[f^+,f]]=2f,\\
[a,[f^+,f]]=0,[f,\{a^+,a\}]=0,\\
[a,\{a,f\}]=0,[a\{a^+,f\}]=2f,\\
[a,\{a,f^+\}]=0,\{f,\{a,f\}\}=0,\\
\{f,\{a^+,f\}\}=0,\{f,\{a,f^+\}\}=2a,
\end{gathered}\tag{1}
$$

再加上其厄米共轭关系式,这里 para 玻色子和 para 费米子的产生、湮没算符分别用 a^+,a 和 f^+,f 来表示.其余不独立的 para 统计关系式可利用广义 Jacobi 恒等式导出.另外,para 统计还规定了以下的真空态条件:

$$
\begin{gathered}
a|0\rangle=f|0\rangle=af^+|0\rangle=fa^+|0\rangle=0,\\
aa^+|0\rangle=ff^+|0\rangle=p|0\rangle,
\end{gathered}\tag{2}
$$

这里 $p(p=1,2,3\cdots)$是 para 统计的阶.当 $p=1$ 时,整个系统退回到普通(玻色与费米)统计情况.

现在引入如下三个厄米算符:

$$
\begin{gathered}
N(a)=\frac{\{a^+,a\}}{2}-\frac{p}{2},N(f)=\frac{[f^+,f]}{2}+\frac{p}{2},\\
N(s)=\frac{1}{p}\Big[N^2(f)-(p+1)N(f)+f^+f+\frac{p}{2}\Big].
\end{gathered}\tag{3}
$$

由(1)式可以证明上面三个算符具有以下代数关系:

$$
\begin{gathered}
[N(a),a]=-a,[N(f),f]=-f,\\
[N(a),f]=[N(f),a]=0,\\
[N(s),f]=[N(s),a^2]=0,\\
[N^2(s),f]=[N^2(s),a]=0,\\
[N(a),N(f)]=[N(a),N(s)]\\
=[N(f),N(s)]=0,
\end{gathered}\tag{4}
$$

及其厄米共轭关系式.另外由(2)和(3)式还可得到

$$
N(a)|0\rangle=N(f)|0\rangle=0,N(s)|0\rangle=\frac{1}{2}|0\rangle.\tag{5}
$$

* 国家自然科学基金(批准号:10075042)和中国科学院理论物理特别支持经费(批准号:LWTZ1298)资助的课题.

显然 $N(a)$ 和 $N(f)$ 分别是 para 玻色子和 para 费米子的粒子数算符[2]. 而 $N^2(s)$ 是与这个 para 量子系统的所有算符都对易的一个 Casimir 算子,按 Schur 引理它应为常数算符,由(5)式可定出:$N^2(s)\equiv\frac{1}{4}$.

另一方面,由(4)式知道 $N(a)$,$N(f)$,$N(s)$ 这三个厄米算符是相互彼此对易的,于是它们存在共同本征态完全集.下面通过寻找这个本征态完全集来获得这个 para 量子系统的 Fock 态空间表示.

首先来考虑由 m 个 para 玻色子和 n 个 para 费米子所构成的量子态 $|m,n\rangle$,即算符 $N(a)$ 和 $N(f)$ 分别属于本征值 m 和 n 的共同本征态.关于态 $|m,n\rangle$ 有下面引理1和引理2的结论.

引理1 若满足条件:$\sum_{i=1}^{q}m_i=m, m_i\geqslant 1$, $\sum_{j=0}^{q}n_j=n, n_j\geqslant 1$(除了 $n_0, n_q\geqslant 0$ 外),则 Fock 态矢量

$$f^{+n_0}a^{+m_1}f^{+n_1}a^{+m_2}f^{+n_2}\cdots a^{+m_q}f^{+n_q}\,|0\rangle \tag{6}$$

就为一个 $|m,n\rangle$ 态.

证明 由(4)式的第一行式子可导得关系式

$$N(a)a^{+m}=a^{+m}[N(a)+m],$$
$$N(f)f^{+n}=f^{+n}[N(f)+n],$$
$$[N(a),f^+]=[N(f),a^+]=0.$$

利用这些式子及(5)式,很容易就能推出

$$N(a)f^{+n_0}a^{+m_1}f^{+n_1}a^{+m_2}f^{+n_2}\cdots a^{+m_q}f^{+n_q}\,|0\rangle$$
$$=mf^{+n_0}a^{+m_1}f^{+n_1}a^{+m_2}f^{+n_2}\cdots a^{+m_q}f^{+n_q}\,|0\rangle,$$
$$N(f)f^{+n_0}a^{+m_1}f^{+n_1}a^{+m_2}f^{+n_2}\cdots a^{+m_q}f^{+n_q}\,|0\rangle$$
$$=nf^{+n_0}a^{+m_1}f^{+n_1}a^{+m_2}f^{+n_2}\cdots a^{+m_q}f^{+n_q}\,|0\rangle.$$

由此可知,只要满足引理1的限制条件,那么对于每一组 $(m_1,m_2,\cdots,m_q)$ 和 $(n_0,n_1,n_2,\cdots,n_q)$ 的可能取值所对应的 Fock 态矢量(6)式就一定是一个 $|m,n\rangle$ 态.证毕.

从引理1可以看出来,在满足引理1限制条件的情况下,由于算符 a^+ 与 f^+ 既不相互对易,也不反易,因此会出现算符 a^+ 和 f^+ 的多种不等价排列状态所对应的 Fock 态矢量(6)式都是属于同一个 $|m,n\rangle$ 态,也就是说在态 $|m,n\rangle$ 下事实上还存在有内禀简并的子空间.这里所谓的不等价排列状态是指,在遵从基本关系式(1)和(2)的基础上,不论算符 a^+ 与 f^+ 作怎样的置换,都不能把一种排列状态转变为另一种排列状态.因此,一般的态 $|m,n\rangle$ 实际上应为满足引理1限制条件的所有这种不等价 Fock 态矢量(6)式的线性叠加.利用基本关系式(1)和(2)对算符的这种任意排列(6)式作约化处理之后,在态 $|m,n\rangle$ 下实际上只存在两种不等价的排列状态,于是就有了下面引理2的结论.

引理2 任何一个态 $|m,n\rangle$ 总可以表示为如下两种基本状态的线性叠加,即

$$|m,n\rangle=\alpha(m,n)f^{+n}a^{+m}\,|0\rangle$$
$$+\beta(m,n)f^{+(n-1)}a^{+(m-1)}F^+\,|0\rangle, \tag{7}$$

这其中 α 和 β 是与 (m,n) 有关的二个叠加系数,并且已定义了算符

$$F^+=\frac{\{a^+,f^+\}}{2}.$$

证明 由(1)式及广义 Jacobi 恒等式可导出关系式

$$[a^{+2},f^+]=0,[F^+,a^+]=0,$$
$$\{F^+,f^+\}=0,F^{+2}=0,$$
$$a^+f^{+k}=(-)^kf^{+k}a^++2kF^+f^{+(k-1)}.$$

首先,利用上面第一个式子可以把(6)式的算符排列中 a^+ 偶次幂的项全部都移到算符排列的最左边,即

$$f^{+n_0}a^{+m_1}f^{+n_1}a^{+m_2}f^{+n_2}\cdots a^{+m_q}f^{+n_q}\,|0\rangle$$
$$=a^{+(m-s)}f^{+k_0}a^+f^{+k_1}a^+f^{+k_2}\cdots a^+f^{+k_s}\,|0\rangle, \tag{8}$$

其中 $(m-s)$ 为一偶数,$\sum_{j=0}^{s}k_j=n, k_j\geqslant 1$(除了 k_0,$k_s\geqslant 0$ 外).其次,重复利用最末一个式子并考虑到其他几个式子,就可对算符排列 $a^+f^{+k_1}a^+f^{+k_2}\cdots a^+f^{+k_s}$ 作如下的进一步约化:

$$a^+f^{+k_1}=(-1)^{k_1}f^{+k_1}a^++(-1)^{k_1-1}2k_1f^{+(k_1-1)}F^+,$$
$$a^+f^{+k_1}a^+f^{+k_2}=(-1)^{k_1}f^{+(k_1+k_2)}a^{+2}$$
$$+(-1)^{k_1-1}2k_1f^{+(k_1+k_2-1)}a^+F^+,$$
$$a^+f^{+k_1}a^+f^{+k_2}a^+f^{+k_3}=(-1)^{k_1+k_3}f^{+(k_1+k_2+k_3)}a^{+3}$$
$$+(-1)^{k_2}2(k_1+k_3)f^{+(k_1+k_2+k_3-1)}a^{+2}F^+,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a^+f^{+k_1}a^+f^{+k_2}\cdots f^{+k_{s-1}}a^+f^{+k_s}$$
$$=\alpha_sf^{+(k_1+k_2+\cdots+k_s)}a^{+s}+\beta_sf^{+(k_1+k_2+\cdots+k_{s-1})}a^{+(s-1)}F^+, \tag{9}$$

为了简便,在(9)式中已用 α_s,β_s 代表两个叠加系数.最后,把(9)式代入(8)式中,再稍作整理,于是就得出了引理2的结果.证毕.

由引理2可以知道两个基本状态 $f^{+n}a^{+m}|0\rangle$ 和 $f^{+(n-1)}a^{+(m-1)}F^+|0\rangle$ 实际上是构成了态 $|m,n\rangle$ 内禀简并子空间的两个基矢,态 $|m,n\rangle$ 具有内禀二重

简并性.通过计算它们的内积和模方发现,在一般情况下,这两个基本状态虽然线性无关,但并不正交,而且它们也未归一化.按照 Schimidt 标准正交化方法,对它们进行正交归一化处理之后,可得到如下形式的标准正交归一化基矢:

$$|m,n,s=\frac{1}{2}\rangle=\sqrt{\frac{(p-n)!}{p!n![m]!}}f^{+n}a^{+m}|0\rangle,$$

$$|m,n,s=-\frac{1}{2}\rangle=\sqrt{\frac{(p-n-1)!(m+R(m))}{p!(n-1)![m+1]!}}\cdot f^{+(n-1)}(pF^{+}-f^{+}a^{+})a^{+(m-1)}|0\rangle,\tag{10}$$

这其中已定义了以下符号:

$R(m)=\frac{1-(-1)^m}{2}$,$[m]=m+\frac{p-1}{2}[1-(-1)^m]$,$[m]!=[1][2][3]\cdots[m]$,$s$ 为内禀子空间简并量子数.

引理 3　标准正交归一化基矢 $|m,n,s=\frac{1}{2}\rangle$ 和 $|m,n,s=-\frac{1}{2}\rangle$ 分别是算符 $N(s)$ 属于本征值 $s=\frac{1}{2}$ 和 $s=-\frac{1}{2}$ 的两个本征态.

证明　由关系式

$$[N(s),f^{+}]=[N(s),a^{+2}]=0,$$

$$N(s)|0\rangle=\frac{1}{2}|0\rangle,N(s)a^{+}|0\rangle=\frac{1}{2}a^{+}|0\rangle,$$

直接可得

$$N(s)|m,n,s=\frac{1}{2}\rangle=\frac{1}{2}|m,n,s=\frac{1}{2}\rangle.$$

类似地,由(1)—(5)式不难验证下列关系式:

$$[pF^{+}-f^{+}a^{+},a^{+2}]=0,$$

$$N(s)(pF^{+}-f^{+}a^{+})|0\rangle=-\frac{1}{2}(pF^{+}-f^{+}a^{+})|0\rangle,$$

$$N(s)(pF^{-}-f^{+}a^{+})a^{+}|0\rangle=-\frac{1}{2}(pF^{+}-f^{+}a^{+})a^{+}|0\rangle,$$

由此很容易就得到

$$N(s)|m,n,s=-\frac{1}{2}\rangle=-\frac{1}{2}|m,n,s=-\frac{1}{2}\rangle.$$

证毕.

从引理 3 可看出,算符 $N(a)$ 和 $N(f)$ 的共同本征态 $|m,n\rangle$ 的内禀二重简并性,通过属于算符 $N(s)$ 的不同本征值 $\left(s=\frac{1}{2}\text{或}s=-\frac{1}{2}\right)$ 而区别开来,这样 $N(a),N(f),N(s)$ 这三个厄米算符的本征值谱 (m,n,s) 就把整个(1+1)自由度 para 粒子系统的 Fock 态空间结构完全标记清楚了.

现在把上述三个引理综合起来,于是就证明了这样的结论:厄米算符 $N(a)$,$N(f)$,$N(s)$ 的共同本征态完全集由标准正交基矢(10)式来描述,即

$$N(a)|m,n,s\rangle=m|m,n,s\rangle,$$

$$N(f)|m,n,s\rangle=n|m,n,s\rangle,$$

$$N(s)|m,n,s\rangle=s|m,n,s\rangle,\tag{11}$$

并且态矢量完全集 $|m,n,s\rangle$ 构成了(1+1)自由度 para 粒子系统 Fock 态空间表示的一组正交归一完备的基矢.

3　关于标准正交基矢态与内禀对称性的讨论

对于标准正交基矢(10)式需要作一些解释与说明,直接从(10)式就可得知:

1.para 玻色子数算符 $N(a)$ 的本征值谱取值为 $m=0,1,2,\cdots,\infty$;para 费米子数算符 $N(f)$ 的本征值谱取值为 $n=0,1,2,\cdots,p$;而内禀子空间简并量子数 s 的取值为 $s=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$.

2.对态 $|m,n,s=\frac{1}{2}\rangle$ 的限制条件是:$p\geqslant1$,$m\geqslant0$,$p\geqslant n\geqslant0$.若 $p=1$,则算符 a^{+} 与 f^{+} 是相互对易的,这时退回到(1+1)自由度普通统计情况;若 $m=0$,则 para 玻色子不出现,这时退化为单自由度纯 pata 费米统计情况;若 $n=0$,则 para 费米子不出现,这时退化为单自由度纯 para 玻色统计情况.

3.对态 $|m,n,s=-\frac{1}{2}\rangle$ 的限制条件是:$p\geqslant2$,$m\geqslant1$,$p-1\geqslant n\geqslant1$.若 $p=1$,则算符 $pF^{+}-f^{+}a^{+}=0$,这时态 $|m,n,s=-\frac{1}{2}\rangle$ 不存在.换句话说,在 $p=1$ 的普通统计情况下,只出现 $|m,n,s=\frac{1}{2}\rangle$ 一种态,不存在内禀简并.而到了 $p\geqslant2$ 的真正 para 统计情况下,两种态都出现了,可见这种内禀简并性是 $p\geqslant2$ 的 para 统计所特有的效应.若 $m=0$,则态 $|m,n,s=-\frac{1}{2}\rangle=0$,因此在纯 para 费米统计情况下,不会出现这种内禀简并效应.若 $n=0$,则态 $|m,n,s=-\frac{1}{2}\rangle$ 不存在,即在纯 para 玻色统计情况下,也不会出现内禀简并.若 $n=p$,则态 $|m,n,s=-\frac{1}{2}\rangle$ 也不

存在，故同样也没有内禀简并效应. 最后的这两种情况可归结为：当 para 费米子数处于全空($n=0$)或者全满($n=p$)时，态$|m,n,s=-\frac{1}{2}\rangle$不存在，没有内禀简并效应.

4. 标准正交基矢(10)式是正交归一完备的，即

$$\langle m,n,s\mid m',n',s'\rangle=\delta_{mm'}\delta_{nn'}\delta_{ss'},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{p}\sum_{s=\pm\frac{1}{2}}\mid m,n,s\rangle\langle m,n,s\mid=I. \tag{12}$$

正交性是显然的，因为厄米算符属于不同本征值的本征态彼此正交；归一性可使用基本关系式(1)和(2)直接计算验证；而完备性，从三个引理的推演过程已经得到了证明.

5. 由标准正交基矢(10)式，再利用基本关系式(1)和(2)就可以求出算符 a^{+},a,f^{+},f 在 Fock 态空间中的矩阵表示(见附录).

内禀简并双重态的存在，暗示出(1+1)自由度 para 粒子系统内部还隐藏着某种内禀对称性. 现在就来揭示这种内禀对称性. 首先，需要找出同一内禀子空间中两个简并态之间的变换算符. 为此引入下面的厄米算符：

$$T=T^{+}=\frac{p}{2}\left[F^{+}F+Q^{+}Q-N(a)-\frac{p}{2}\right]-2\left[N(a)+\frac{p}{2}\right]\left[N(f)-\frac{p}{2}\right]N(s), \tag{13}$$

其中定义了厄米共轭算符 $Q=\frac{\{a^{+},f\}}{2}$，$Q^{+}=\frac{\{a,f^{+}\}}{2}$. 利用附录和(11)式，经过冗长的计算后发现

$$T\mid m,n,\tfrac{1}{2}\rangle=\sqrt{n(p-n)\left(m^{2}+mp+\frac{1}{4}p^{2}R(m)\right)}\cdot\mid m,n,-\tfrac{1}{2}\rangle,$$

$$T\mid m,n,-\tfrac{1}{2}\rangle=\sqrt{n(p-n)\left(m^{2}+mp+\frac{1}{4}p^{2}R(m)\right)}\cdot\mid m,n,\tfrac{1}{2}\rangle, \tag{14}$$

可见厄米算符 T 正是两内禀简并态之间的变换算符. 由上式可知算符

$$T^{2}=N(f)[p-N(f)]\left[N^{2}(a)+pN(a)+\frac{1}{8}p^{2}\left(1-(-1)^{N(a)}\right)\right] \tag{15}$$

是内禀简并子空间的一个不变量算符. 另外，由(1)，(3)，(4)和(13)式还可证明算符 T 具有下列性质：

$$[T,N(a)]=[T,N(f)]=0,\ \{T,N(s)\}=0. \tag{16}$$

其次，再引入一对厄米共轭算符

$$Q_{s}=\left[\frac{1}{2}-N(s)\right]T,\quad Q_{s}^{+}=\left[\frac{1}{2}+N(s)\right]T, \tag{17}$$

这里用到了(16)式. 由(11)和(14)式可得

$$Q_{s}\mid m,n,\tfrac{1}{2}\rangle=\sqrt{n(p-n)\left(m^{2}+mp+\frac{1}{4}p^{2}R(m)\right)}\cdot\mid m,n,-\tfrac{1}{2}\rangle,$$

$$Q_{s}\mid m,n,-\tfrac{1}{2}\rangle=0,$$

$$Q_{s}^{+}\mid m,n,\tfrac{1}{2}\rangle=0,$$

$$Q_{s}^{+}\mid m,n,-\tfrac{1}{2}\rangle=\sqrt{n(p-n)\left(m^{2}+mp+\frac{1}{4}p^{2}R(m)\right)}\cdot\mid m,n,\tfrac{1}{2}\rangle. \tag{18}$$

此外，由(16)式和 $N^{2}(s)\equiv\frac{1}{4}$ 容易证明算符 $N(s)$，Q_{s},Q_{s}^{+} 间有下列关系式：

$$[N(s),Q_{s}]=-Q_{s},\ [N(s),Q_{s}^{+}]=Q_{s}^{+},$$

$$[Q_{s}^{+},Q_{s}]=2T^{2}N(s). \tag{19}$$

从(18)，(19)及(11)式可看出算符 $N(s)$和 Q_{s},Q_{s}^{+} 的物理意义分别是内禀子空间简并量子数算符和量子数降、升算符. 最后，由(15)—(17)式并考虑到 $N^{2}(s)\equiv\frac{1}{4}$，还可以进一步证明算符 T^{2},Q_{s},Q_{s}^{+} 间满足超对称代数关系：

$$[T^{2},Q_{s}]=[T^{2}Q_{s}^{+}]=0,$$

$$\{Q_{s},Q_{s}^{+}\}=T^{2},$$

$$Q_{s}^{2}=Q_{s}^{+2}=0. \tag{20}$$

这清楚地表明了(1+1)自由度 para 量子系统确实具有内禀超对称性，算符 Q_{s},Q_{s}^{+} 正是同一内禀子空间中两内禀超对称简并态之间相互变换的内禀超荷算符.

最后，把2和3部分讨论的结果归纳总结为下面的定理.

定理 (1+1)自由度 para 粒子系统的 Fock 态空间结构可以由 $N(a)$，$N(f)$，$N(s)$这三个厄米算符的共同本征态完全集$|m,n,s\rangle$，即标准正交基矢(10)式来完全描述. 其中除了 $p=1,m=0,n=0,n=p$ 这四种退化或极端的特殊情况之外，这个 para 量子系统具有相同 para 玻色子数 m 和相同 para 费

米子数 n 的量子态是内禀二重简并的.

4　(1+1)自由度 para 粒子的动力学超对称性

考虑(1+1)自由度 para 粒子系统的自由谐振子模型,其哈密顿量写为

$$H = \frac{\{a^+, a\}}{2} + \frac{[f^+, f]}{2} = N(a) + N(f). \quad (21)$$

利用(1)和(4)式容易知道算符 H, Q, Q^+ 间满足下面的动力学超对称代数关系[5]:

$$[H, Q] = [H, Q^+] = 0,\ \{Q, Q^+\} = H,$$
$$Q^2 = Q^{+2} = 0. \quad (22)$$

由(11)和(21)式可以写出哈密顿量 H 的本征态方程为

$$H\left|m, n, s = \pm\frac{1}{2}\right\rangle = (m+n)\left|m, n, s = \pm\frac{1}{2}\right\rangle$$
$$= E\left|m, n, s = \pm\frac{1}{2}\right\rangle. \quad (23)$$

从上式可知能量 $E = m + n$ 不仅对同一内禀子空间中的双重态是简并的,而且对 para 玻色子和 para 费米子总粒子数保持不变的各个不同内禀子空间中的量子态也是简并的.另外,利用附录通过直接计算还可知道,算符 $Q^+(Q)$ 对态 $|m, n, s\rangle$ 作用的结果,一般是 $\left|m+1, n-1, s = \frac{1}{2}\right\rangle$ 和 $\left|m+1, n-1, s = -\frac{1}{2}\right\rangle$ ($\left|m-1, n+1, s = \frac{1}{2}\right\rangle$ 和 $\left|m-1, n+1, s = -\frac{1}{2}\right\rangle$)这两个内禀简并双重态的线性叠加态.由此可见,算符 Q^+, Q 实际上是实现 para 玻色子与 para 费米子之间动力学超对称性的超荷算子,处于同一能级上相差一个 para 费米子数(因而 para 玻色子数随之反向相差一个)的各个不同内禀子空间中的量子态构成了一组超对称多重态,它们之间通过超荷算符 Q^+, Q 的作用而相互联系起来;而处在同一内禀子空间中的两个内禀简并态又构成了一对内禀超对称双重态,它们之间通过内禀超荷算符 Q_s^+, Q_s 的作用而相互联系起来.

能谱的简并状况可以从图 1 看出,图中画出了 $p = 3$ 的状态分布情况,其中同一能级上的各个黑圆点代表一组超对称多重态,而紧靠在一起的两黑圆点又代表了一对内禀超对称双重态.基态能级 $E_0 = 0$ 是完全无简并的,这显然是真空态唯一的直接结果,第一能级 $E_1 = 1$ 是二重简并的,第二能级 $E_2 = 2$ 是四重简并的,第 $l\,(l = 0, 1, 2, \cdots, p)$ 能级 $E_l = l$ 是

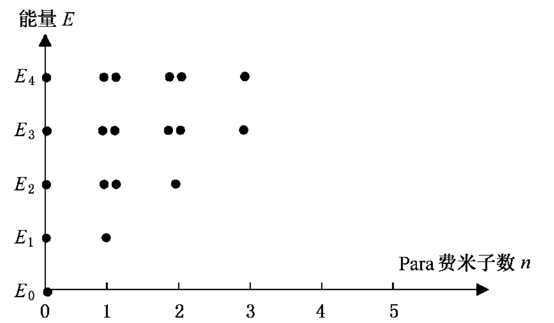

图 1　(1+1)自由度 para 粒子系统的超对称能谱($p = 3$ 的情况)

$2l$ 重简并的,从第 p 能级 $E_p = p$ 开始往上就都是 $2p$ 重简并的了.另外,还可以看出,除了 $m = 0, n = 0, n = p$ 以及 $p = 1$ 这四种退化的特殊情况下,不存在内禀简并,只是单态以外,在其他所有情况下,都存在内禀简并的双重态.

最后,再来考察一下此模型超对称性的严格性,这可以直接从能谱图上看出来.一方面,由于基态能量 $E_0 = 0$,故此模型的超对称性是未破缺的.另一方面,由于这个 para 量子系统独特的态空间结构,特别是内禀超对称双重态的存在,从而保证了除基态真空之外,在其他任意能级上,都有

para 费米子数为偶数的状态数目
= para 费米子数为奇数的状态数目,　(24)

所以此模型的超对称性是精确的.上面等式显然是从普通超对称($p = 1$)到 para 超对称($p \geqslant 1$)的自然推广,当 $p = 1$ 时,它就立即退回到我们所熟知的情况.相应地,也可以把普通超对称情况下的 Witten 指标[5]推广到 para 超对称情况下,于是(24)式就可以表示为下面的结论:

$$\mathrm{Tr}(-1)^{N(f)} = 0, \quad (25)$$

这里求迹是对除真空态之外的所有状态数进行的.由此可见,这个(1+1)自由度 para 粒子系统的动力学超对称性确实是严格的.

5　总结与讨论

综合本文以上部分的讨论可以知道,(1+1)自由度 para 粒子系统的 Fock 态空间结构要比单个自由度的纯 para 玻色系统,或者纯 para 费米系统,以及(1+1)自由度普通玻色与费米系统的态空间结构复杂许多.其原因是 para 玻色子空间与 para 费米子空间既不对易,也不反对易,因此整个(1+1)自由度

para 系统的态空间就不是 para 玻色子空间与 para 费米子空间的简单直乘. 这反应在描述(1+1)自由度 para 系统态空间的量子数,除了 para 玻色子数和 para 费米子数之外,还出现了一个描述 para 系统内禀简并性的量子数. 除了四种特殊情况之外,这个量子数具有两种取值,表明(1+1)自由度 para 系统的态空间是内禀二重简并的. 进一步,揭示了这种内禀二重简并效应,实际上是这个 para 量子系统具有一层隐藏的内禀超对称性的表现. 这种独特的态空间结构及内禀超对称性,使得(1+1)自由度 para 粒子系统的自由谐振子模型具有严格的动力学超对称性. 最后还推广了两个重要的等式(24)和(25)式. 所有这些结果表明了 para 超对称量子力学既是普通超对称量子力学的自然推广,又有区别于普通超对称量子力学的关键之所在,这为进一步研究更复杂 para 量子系统的超对称性提供了可借鉴的经验与方法[6].

附 录

这里给出算符 a^+, a, f^+, f 对标准正交基矢(10)式的作用结果:

$$a^+\left|m,n,\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{2}{p}(-1)^{n+1}\left[\left(n-\frac{p}{2}\right)\sqrt{[m+1]}\left|m+1,n,\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{n(p-n)(p+m+R(m))}\left|m+1,n,-\frac{1}{2}\right\rangle\right],$$

$$a^+\left|m,n,-\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{2}{p}(-1)^{n+1}\left[\sqrt{n(p-n)(m+R(m))}\left|m+1,n,\frac{1}{2}\right\rangle-\left(n-\frac{p}{2}\right)\sqrt{[m]+2R(m)}\left|m+1,n,-\frac{1}{2}\right\rangle\right],$$

$$a\left|m,n,\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{2}{p}(-1)^{n+1}\left[\left(n-\frac{p}{2}\right)\sqrt{[m]}\left|m-1,n,\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{n(p-n)(m-R(m))}\left|m-1,n,-\frac{1}{2}\right\rangle\right],$$

$$a\left|m,n,-\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{2}{p}(-1)^{n+1}\left[\sqrt{n(p-n)(p+m-R(m))}\left|m-1,n,\frac{1}{2}\right\rangle-\left(n-\frac{p}{2}\right)\sqrt{[m+1]-2R(m)}\left|m-1,n,-\frac{1}{2}\right\rangle\right],$$

$$f^+\left|m,n,\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{(n+1)(p-n)}\left|m,n+1,\frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$f^+\left|m,n,-\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{n(p-n-1)}\left|m,n+1,-\frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$f\left|m,n,\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{n(p-n+1)}\left|m,n-1,\frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$f\left|m,n,-\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{(n-1)(p-n)}\left|m,n-1,-\frac{1}{2}\right\rangle.$$

[1] H.S. Green, *Phys. Rev.*, **90**(1953), 270.

[2] O.W. Green, A.M. Messiah, *Phys. Rev.*, **B138**(1965), 1155; Y. Ohnuki, S. Kamefuchi, Quantum Field Theory and Parastatistics (Springer-verlag, Berlin, 1982).

[3] F. Wilczek, Fractional Statistics and Anyon Superconductivity (World Scientific, Singapone, 1990).

[4] V.A. Rubakov, V.P. Spiridonov, *Mod. Phys. Lett.*, **3**(14)(1988), 1337; J. Beckers, N. Debergh, *Nucl. Phys.*, **B340**(1990), 767.

[5] E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B188** (1981), 513; E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B202**(1982), 253.

[6] Y.Q. Chen, *Acta Physica Sinica*, **49**(2000), 5 (in Chinese) [陈永清, 物理学报, **49**(2000), 5].

SUPERSYMMETRY MECHANICS FOR PARA-PARTICLES OF (1+1) DEGREE OF FREEDOM*

YANG WEI-MIN JING SI-CONG
(*Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, HeFei 230027, China*)
(Received 27 October 2000; revised manuscript received 30 November 2000)

ABSTRACT

This paper researches Fock state space structure and supersymmetry mechanics of parasystem consisting of one degree of freedom of paraboson and one degree of freedom parafermion in the case of the same order p. It is shown that except for the four extreme special states, there is an intrinsic double-degeneracy in the state space structure of a parasystem. Moreover, it is also discovered that the parasystem possesses a hidden intrinsic supersymmetry in addition to the dynamic supersymmetry, and the intrinsic supersymmetry plays a key role in the exact supersymmetry of a parasystem.

Keywords: parastatistics, fock state space, supersymmetry
PACC: 0365

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10075042).