第 50 卷 第 5 期 2001 年 5 月
1000-3290/2001/50(05)/0851-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50,No.5,May,2001

非局域 Lai-Das Sarma-Villain 方程动力学标度性质的研究*

唐 刚[1)2)] 马本堃[1)]

1) (北京师范大学物理系和理论物理研究所,北京 100875)

2) (中国矿业大学物理系,徐州 221008)

(2000 年 12 月 22 日收到)

使用动力学重整化群和直接标度分析的方法研究了非局域 Lai-Das Sarma-Villain 方程的动力学标度性质.动力学重整化群分析表明非局域非线性项的存在能够导致新的固定点和连续变化的动力学标度指数的产生.使用直接标度分析方法则分别得到了在弱耦合和强耦合区内的标度指数值.在弱耦合区域内得到的标度指数与动力学重整化方法得到的标度指数值能很好地吻合.

关键词:表面生长,动力学重整化群分析,标度分析

PACC:0547,0250

1 引 言

使用 Langevin 类型方程描述表面界面的动力学生长过程取得了很大的成功[1,2],其中的典型代表是 Kardar-Parisi-Zhang(KPZ)方程[3].研究表明 KPZ 方程能正确地描述很多种局域生长模型的生长[1,2].但在另一方面,KPZ 理论与实验观察结果的不尽相符又促使人们对它进行改进和扩展,如考虑相关噪声[4]、淬火噪声等[5],也提出了很多类似的方程,如考虑了守恒律的 Sun-Guo-Grant(SGG)方程[6]和描述分子束外延生长(MBE)的 Lai-Das Sarma-Villain(LDV)方程[7,8]等.为考虑表面生长过程中的非局域(或长程)相互作用,Mukherji 和 Bhattacharjee[9]最近提出了唯象的非局域 KPZ 方程,并使用动力学重整化群(DRG)方法对方程进行分析,证明了非局域非线性项的存在能产生新的重整化群固定点和随非线性参数连续变化的标度指数.随后,Jung 等[10,11]使用 DRG 方法研究了非局域 SGG 方程在具有守恒的非相关噪声和守恒的空间相关躁声情况下的标度性质,Chattopadhyay[12]则研究了空间相关噪声对非局域 KPZ 方程标度性质的影响.在我们前面的工作中,使用 DRG 方法研究了非局域的并含有噪声的 Kuramoto-Sivashinsky(KS)方程的标度性质[13].本文首先使用 DRG 方法对非局域的 LDV 方程进行分析,然后使用直接标度分析的方法计算出相关的标度指数值.我们发现,与非局域的 KPZ 方程和 SGG 方程类似,非局域非线性项同样能使 LDV 方程具有新的重整化群固定点和随非局域参数连续变化的标度指数.使用直接标度分析的方法我们导出了局域和非局域极限情况下,强耦合和弱耦合区域内的标度指数.弱耦合区域的标度指数与使用 DRG 方法得到的结果相吻合.

2 非局域 Lai-Das Sarma-Vallain 方程

Lai 等提出的局域 LDV 方程可以用来描述 MBE 生长过程中表面生长高度的长波涨落行为[7,8,14],方程表示为

$$\frac{\partial h(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=-\kappa\nabla^4 h-\frac{\lambda}{2}\nabla^2(\nabla h)^2+\eta(\boldsymbol{r},t), \tag{1}$$

式中,高度函数 $h(\boldsymbol{r},t)$ 表示 t 时刻在基底 $\boldsymbol{r}$ ($\boldsymbol{r}\in R^d$) 处表面的生长高度,方程右边第一项是扩散项,第二项是非线性项,κ 和 λ 分别是扩散系数和非线性系数,最后一项是躁声项,用来表示生长过程的随

* 教育部博士点基金(批准号 :96002703)资助的课题.

机性.平均的生长速度已经从(1)式中提取出,所以噪声的平均值为零,即$\langle \eta(\boldsymbol{r},t)\rangle = 0$.这里随机性用非相关的 Gaussian 噪声来表示,其满足

$$\langle \eta(\boldsymbol{r},t)\eta(\boldsymbol{r}',t')\rangle = 2D\delta^d(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t'), \tag{2}$$

式中 D 表示噪声的幅度.需要注意的是,方程(1)与 SGG 方程的不同之处在于(1)式中的噪声不具有守恒的特性[6].

将 Mukherji 和 Bhattacharjee[9] 提出的非局域非线性项引入到 LDV 方程中,就可以得到下面的非局域 LDV 方程:

$$\frac{\partial h(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = -\kappa\nabla^4 h + \eta(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{2}\nabla^2\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\vartheta(\boldsymbol{r}') \times \nabla h(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}',t)\cdot\nabla h(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t), \tag{3}$$

式中的核函数 $\vartheta(\boldsymbol{r})$ 具有短程(局域)部分 $\sim \lambda_0\delta(\boldsymbol{r})$ 和长程(非局域)部分 $\sim r^{\rho-d}$,在 Fourier 空间中可以表示为 $\vartheta(k) = \lambda_0 + \lambda_\rho k^{-\rho}$.很显然,在短程极限下($\lambda_0 \neq 0, |\lambda_\rho/\lambda_0| \ll 1$),方程(3)能自然地简化成方程(1).而在长程极限下($\lambda_\rho \neq 0, |\lambda_0/\lambda_\rho| \ll 1$),方程(3)的标度性质则是需要我们重点讨论的.

生长表面的动力学标度性质可以由表面宽度(表面粗糙度)$W(L,t)$来表示,通常 $W(L,t)$ 满足如下标度形式[15]:

$$W(L,t) = L^\chi f(t/L^z), \tag{4}$$

式中 χ 和 z 分别是表面的粗糙度指数和动力学指数,它们能完全表示出表面的标度行为(大空间尺度和长时间的渐进行为)和决定表面生长过程所在的普适类,标度函数 $f(u)$ 具有的渐进形式使得:当 $t \ll t_L = L^z$ 时,$W(l,t) \sim t^{\chi/z}$ 和当 $t \gg t_L$ 时,$W(L,t) \sim t^\chi$.确定生长过程的这两个标度指数是表面生长动力学标度理论的主要任务.

3 动力学重整化群分析

用动力学重整化群方法来分析 Langevin 类型生长方程的标度行为最早是由 Kardar-Parisi-Zhang 等[3]提出的,后来,Medina 等[4]在讨论具有长时空相关噪声的 KPZ 方程时,对这一方法进行了详细的阐述.本文对非局域 LDV 方程进行的 DRG 分析完全按照文献[4]的方法和步骤进行.

对方程(3)进行 Fourior 变换,

$$h(\boldsymbol{r},t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{k<\Lambda}\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}^d k\,\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}h(\boldsymbol{k},\omega)\,e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \tag{5}$$

并经整理后,可得

$$h(\boldsymbol{k},\omega) = G_0(\boldsymbol{k},\omega)\eta(\boldsymbol{k},\omega) + \frac{1}{2}G_0(\boldsymbol{k},\omega) \times \iint \mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}^d q\,\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\vartheta(2\boldsymbol{q})\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}\right) \cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}\right)h\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\frac{1}{2}\omega+\Omega\right) \cdot h\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q},\frac{1}{2}\omega-\Omega\right), \tag{6}$$

式中 $G_0(\boldsymbol{k},\omega) = 1/(\kappa k^4 - \mathrm{i}\omega)$ 定义为裸传播子,Λ 为波矢的上截止限,可以设为1.方程(6)是对 $h(\boldsymbol{k},\omega)$ 进行微扰展开计算的出发点.通过 $h(\boldsymbol{k},\omega) = G(\boldsymbol{k},\omega)\eta(\boldsymbol{k},\omega)$ 可以定义有效响应函数 $G(\boldsymbol{k},\omega)$.我们可以将方程(6)用图1中的费恩曼图形来表示,其中 —>— 和 —>—— 分别表示裸传播子 $G_0(\boldsymbol{k},\omega)$ 和有效响应函数 $G(\boldsymbol{k},\omega)$,× 表示躁声 $\eta(\boldsymbol{k},\omega)$.

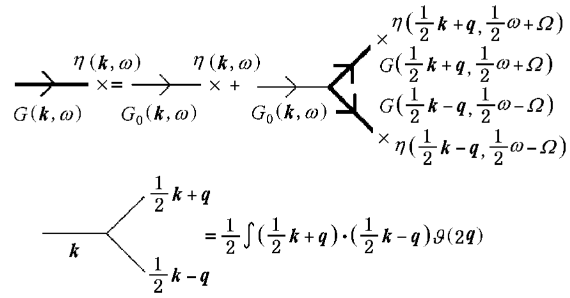

图1 方程(6)的费恩曼图形表示

将图1中的图形进行迭代展开,并取单圈近似,在动量壳 $e^{-1}\Lambda \leqslant |\boldsymbol{k}| \leqslant \Lambda$ 中积出快摸,并进行标度变换:$r \to br$ 和 $t \to b^z t$, $h \to b^\chi h$,可以导出如下的方程:

$$\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}l} = \kappa\left[z - 4 - K_d\frac{D\vartheta(1)\vartheta(2)}{\kappa^3} \times \frac{d-6+3f(1)}{4d}\right], \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}l} = D(z - 2\chi - d), \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_\Psi}{\mathrm{d}l} = \lambda_\Psi(z + \chi - 4 + \Psi), \tag{9}$$

其中,$\Psi = 0$ 或 ρ, $f(q) = \partial\ln\vartheta(k)/\partial k|_{k=q}$, $K_d = S_d/(2\pi)^d = [S_{d-1}/(2\pi)^d]\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\sin^{d-2}\theta$, S_d 表示在 d 维空间中单位球体的表面积.为方便起见,定义无量纲的有效耦合参数 $U_\Psi^2 = K_d(D\lambda_\Psi^2)/\kappa^3$ ($\Psi = 0$ 或 ρ)和 $R = (U_0/U_\rho)$,由方程(7)—(9)可得

$$\frac{\mathrm{d}U_0}{\mathrm{d}l} = \frac{1}{2}U_0[4 - d + 3(*)], \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}U_\rho}{\mathrm{d}l} = \frac{1}{2}U_\rho[4 - d + 2\rho + 3(*)], \qquad (11)$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}l} = -\rho R, \qquad (12)$$

其中

$$(*) = (1/4d)\{(d-6)[U_0^2 + (1+2^{-\rho})U_0U_\rho + 2^{-\rho}U_\rho^2] - 3\rho(U_0U_\rho + 2^{-\rho}U_\rho^2)\}.$$

由方程(12)可知，在(U_0, U_ρ)空间中不存在轴外的固定点，除非$\rho = 0$(对应平庸情况).解方程(10)和(11)，可以得到两个轴上的固定点.第一个是

$$U_0^{*2} = 4d(4-d)/3(6-d), U_\rho^* = 0,$$

第二个是

$$U_0^* = 0, U_\rho^{*2} = 4d(4-d+2\rho)/3(6-d+3\rho)2^{-\rho}.$$

当$d<4$和$d<4+2\rho$时，两个固定点分别是稳定的.与第一个固定点对应粗糙度指数和动力学指数为

$$\chi = (4-d)/3, \quad z = (8+d)/3, \qquad (13)$$

其中，$\chi + z = 4$.这个结果是与 Lai 等[7]用 DRG 方法分析局域 LDV 方程所得的结果是一致的.第二个固定点是由非局域非线性项产生的新的重整化群固定点，与之对应的两个临界指数为

$$\chi = (4-d-\rho)/3, z = (8+d-2\rho)/3. \qquad (14)$$

易见，$\chi + z = 4 - \rho$，它们是随非局域参数ρ和基底维数d连续地变化的，反映了非局域非线性项对方程标度性质的影响，如果取$\rho = 0$，方程(14)自然就回到了方程(13).此外，当$d < 4 + 2\rho$时，粗糙度指数$\chi > 0$，表明表面是处在粗糙相;而当$d > 4 + 2\rho$时，粗糙度指数$\chi < 0$，表明表面是处在平滑相，系统会发生明显的相变.

4　直接标度分析

基于微扰展开计算的 DRG 方法和直接的数值解法是目前分析 Langevin 类型生长方程标度行为最常用的两种方法，但它们都有一定的局限性.表面生长过程中存在的强耦合奇异发散是通常的 DRG 分析所不能处理的，众多基于 DRG 的工作已说明了这一点[1—4].而直接的数值解法只能给出标度指数的近似值，这些近似值是不能用来确定生长过程所属的普适类和度越行为的，也不能给出生长过程更深入的物理信息.由 Hentschel 和 Family[16]提出的直接标度分析的方法在本质上与 Kolmogorov 讨论完全发达湍流时所使用的标度分析方法很类似，它是基于 Langevin 类型方程与受驱 Navier-Stokes 方程相类似而提出来的，它的基本的物理假设是:任何像 KPZ 这样的方程当呈现标度行为时，其各项在一定线度上作粗粒平均以后，必须具有相同的幅度等级或者可以忽略，只有在这样的条件下，标度行为才能够出现，而相应的标度区域可以通过自洽的方法得到.使用这种方法能很方便地求出方程在不同标度区域内的标度指数值[16,17].下面我们将使用直接标度分析的方法推导出非局域 LDV 方程在不同区域内的标度指数并与前面使用 DRG 方法得到的结果进行比较.

根据文献[16]，假定在一个很长的时间$t \gg t_l$和在长度标度l上作平均后，典型的表面生长高度的涨落幅值可以估计为$\langle[h(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}, t) - h(\boldsymbol{r}, t)]^2\rangle_l \sim h_l^2$.在足够长时间，这些涨落持续的时间数量级是$t_l$.于是，除躁声外，方程(3)中的各项可分别估计为$\langle|\partial h/\partial t|\rangle_l \sim h_l/t_l$，$\kappa\langle|\nabla^4 h|\rangle_l \sim \kappa h_l/l^4$，(非线性项的局域部分)$(\lambda_0/2)\langle|\nabla^2(\nabla h)^2|\rangle_l \sim \lambda_0 h_l^2/l^4$，(非线性项的非局域部分)$(\lambda_\rho/2)\langle|\nabla^2\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}' r'^{(\rho-d)}\nabla h(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}', t)\cdot\nabla h(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t)|\rangle_l \sim \lambda_\rho h_l^2 l^{(\rho-4)}$.至于躁声，对于平滑表面可以估计为$\eta_l \sim (D/l^d t_l)^{1/2}$，而对于粗糙表面有$\eta_l \sim (D/h_l^d t_l)^{1/2}$[16].

在足够大的长度标度内，方程(3)中的非线性项将处于支配地位，因而扩散项可以忽略去.

在局域极限情况下，使$\partial h/\partial t$项与非线性项中的短程部分相等给出此时涨落持续的特征时间为$t_l \sim l^4/\lambda_0 h_l$，由于在$t \gg t_l$时，$h_l \sim l^\chi$，所以不难得出$\chi + z = 4$.在弱耦合区域内，让$\partial h/\partial t$项(也称惯性项)与平滑表面噪声项的估计值相等，则有$h_l \sim (D/\lambda_0)^{1/3} l^{(4-d)/3}$，所以有$\chi = (4-d)/3$.将$h_l$的表示式代入到特征时间$t_l$中得出$t_l \sim (D\lambda_0^2)^{-1/3} l^{(8+d)/3}$，所以可以得出$z = (8+d)/3$.而在强耦合内，让惯性项与粗糙表面噪声项的估计值相等则可以得出

$$h_l \sim (D/\lambda_0)^{1/(d+3)} l^{4/(d+3)}$$

和

$$t_l \sim (D\lambda_0^{d+2})^{-1/(d+3)} l^{4(d+2)/(d+3)},$$

所以得出在强耦合内的标度指数为$\chi = 4/(d+3)$和$z = 4(d+2)/(d+3)$.

在非局域极限情况下，使$\partial h/\partial t$项与非线性项中的长程部分相等，则有$t_l \sim 1/(\lambda_\rho h_l l^{(\rho-4)})$，所以$\chi + z = 4 - \rho$.使用同样的方法可以得到相应的标度

指数值.在弱耦合区内 $\chi=(4-d-\rho)/3$，$z=(8+d-2\rho)/3$，在强耦合区内 $\chi=(4-\rho)/(d+3)$，$z=(4-\rho)(d+2)/(d+3)$.

与前面用 DRG 分析得到的结果进行比较可以发现，这里在弱耦合区内得到的两组标度指数值是与 DRG 结果相同的，而在强耦合区内得到的标度指数是用 DRG 方法所不能得到的.这是因为基于微扰展开计算的 DRG 方法只对弱耦情况是有效的，而对强耦合的情况则是无能为力的.直接标度分析的方法则能很好地处理强耦合和弱耦合的情况，能很方便地得出相应的标度指数值.这里的计算也表明，直接标度分析的方法对非局域生长方程的分析处理也是适用的.

5 结 论

本文分别使用动力学重整化群方法和直接的标度分析方法研究了非局域 Lai-Das Sarma-Villain 方程的标度性质.DRG 分析表明，非局域非线性项的存在能够产生新的重整化群固定点和随非局域性参数连续变化的标度指数，并会有新的相变发生.使用直接标度分析的方法则得到了强耦合区和弱耦合区内的标度指数值.在弱耦合区域内的标度指数值是与 DRG 结果相吻合的，而在强耦合区域内的标度指数是 DRG 方法所不能得到的.当然，至于是否存在与非局域 LVD 方程对应的生长普适类还需要进一步的实验观察验证.

[1] T. Halpin-Healy, Y. C. Zhang, *Phys. Rep.*, **254**(1995), 215.
[2] J. Krug, *Adv. Phys.*, **46**(1997), 139.
[3] M. Kardar, G. Parisi, Y. C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.*, **56**(1986), 889.
[4] E. Medina, T. Hwa, M. Kardar, *Phys. Rev.*, **A39**(1989), 3053.
[5] L. H. Tang, M. Kardar, D. Dhar, *Phys. Rev. Lett.*, **74**(1995), 920.
[6] T. Sun, H. Guo, M. Grant, *Phys. Rev.*, **A40**(1989), 6763.
[7] Z. W. Lai, S. Das Sarma, *Phys. Rev. Lett.*, **66**(1991), 2348.
[8] J. M. Kim, S. Das Sarma, *Phys. Rev. Lett.*, **72**(1994), 2903.
[9] S. Mukherji, S. M. Bhattacharjee, *Phys. Rev. Lett.*, **79**(1997), 2052.
[10] Y. K. Jung, I. M. Kim, J. M. Kim, *Phys. Rev.*, **E58**(1998), 5467.
[11] Y. K. Jung, I. M. Kim, *Phys. Rev.*, **E62**(2000), 2949.
[12] A. Kr. Chattopadhyay, *Phys. Rev.*, **E60**(1999), 293.
[13] G. Tang, B. K. Ma, *Phys. Rev.*, **E63**(2001)(in press).
[14] Z. F. Huang, B. L. Gu, *Phys. Rev.*, **E54**(1996), 5935.
[15] F. Family, T. Vicsek, *J. Phys.*, **A18**(1985), L75.
[16] H. G. E. Hentschel, F. Family, *Phys. Rev. Lett.*, **66**(1991), 1982.
[17] F. Han, B. K. Ma, *Acta Physica Sinica*, **45**(1996), 826(in Chinese)[韩飞、马本堃，物理学报，**45**(1996)，826].

DYNAMIC SCALING OF THE NONLOCAL LAI-DAS SARMA-VILLAIN EQUATION*

TANG GANG[1)2)] MA BEN-KUN[1)]
[1)] (*Department of Physics and Institute of Theoretical Physics, Beijing Normal University, Beijing* 100875, *China*)
[2)] (*Department of Physics, China University of Mining and Technology, Xuzhou* 221008, *China*)
(Received 22 December 2000)

ABSTRACT

The scaling properties of the nonlocal Lai-Das Sarma-Villain equation are studied by using dynamic renormalization-group (DRG) analysis and scaling approach, respectively. The DRG analysis shows that the nonlocal nature of the nonlinear term can produce new fixed points with continuously varying exponents, depending on both the nonlocal interaction parameter ρ and the substrate dimension d. The scaling exponents in both weak- and strong-coupling regions are obtained by scaling approach. The exponents obtained in the weak-coupling region well match the results of the DRG analysis.

Keywords: surface growth, dynamic renormalization-group analysis, scaling approach
PACC: 0547, 0250

* Project supported by the Doctorate Foundation of the state Education Ministry of China (Grant No. 96002703).