第 50 卷 第 6 期 2001 年 6 月
1000-3290/2001/50(06)/1001-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50,No.6,June,2001

相对论性变质量系统的守恒律

方建会

(石油大学应用物理系,山东东营 257061)

(2000 年 12 月 11 日收到;2001 年 1 月 12 日收到修改稿)

研究相对论性变质量系统的守恒律.给出相对论性变质量系统的 d'Alembert-Lagrange 原理,利用其在无限小变换下的不变性条件,得到相对论性变质量系统的守恒律存在的条件和形式,并举例说明结果的应用.

关键词:相对论,分析力学,变质量,守恒律
PACC:0330

1 引 言

力学系统的对称性与守恒律之间有着密切联系.Noether 定理之所以受到物理和力学研究者的重视,就在于它揭示了力学系统的守恒律与其内在的动力学对称性的潜在关系,关于对称性与守恒量的研究一直是数学、物理学、力学等领域的重要课题.近年来人们对经典力学系统对称性与守恒量的研究取得了一系列重要成果[1—9].本文研究变质量系统在相对论情况下的守恒律.利用相对论性变质量系统的 d'Alembert-Lagrange 原理在无限小变换下的不变性条件,导出相对论性变质量系统的守恒律存在的条件和形式.并举例说明结果的应用.

2 相对论性变质量系统的 d'Alembert-Lagrange 原理

设力学系统由 N 个变质量质点组成,在 t 时刻静止质量为 m_{0i} 的质点以速度 v_i 运动,另一静止质量为 Δm_{0i} 的微元质量以速度 $\boldsymbol{u}_i$ 运动,在 t 时刻后的 Δt 时间内两者合并,则其相对论性基本动力学方程为[10]

$$m_{0i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{v}_i}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}}\right)=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{\Phi}_i^*,(i=1,2,\cdots,N),\tag{1}$$

其中 m_{0i} 为变量,

$$\boldsymbol{\Phi}_i^*=\dot{m}_{0i}\left(\frac{\boldsymbol{u}_i}{\sqrt{1-u_i^2/c^2}}-\frac{\boldsymbol{v}_i}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}}\right)$$

为相对论性反推力.(1)式可改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)-\frac{\dot{m}_{0i}\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2}}=\boldsymbol{F}_i^{(1)}+\boldsymbol{F}_i^{(2)}+\boldsymbol{\Phi}_i^*,$$
$$(i=1,2,\cdots,N),\tag{2}$$

其中 $m_i=\dfrac{m_{0i}}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2}}$,$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{v}_i$,$\boldsymbol{F}_i^{(1)}+\boldsymbol{F}_i^{(2)}=\boldsymbol{F}_i$,$\boldsymbol{F}_i^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{F}_i^{(2)}$ 分别为主动力和约束力.

在理想约束条件下,以 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 乘以(2)式并对 i 求和,得

$$\sum_{i=1}^{N}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)+\frac{\dot{m}_{0i}\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2}}+\boldsymbol{F}_i^{(1)}+\boldsymbol{\Phi}_i^*\right]\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0.\tag{3}$$

设系统的位形有 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 确定,则

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_s,t),\quad(i=1,2,\cdots,N;s=1,2,\cdots,n).\tag{4}$$

于是有

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\delta q_s.\tag{5}$$

将(5)式代入(3)式得

$$\sum_{s=1}^{n}\left[-\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}+Q_s+\phi_s^*\right]\delta q_s=0,\tag{6}$$

其中

$$Q_s=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i^{(1)}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s},$$

$$\phi_s^*=\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{\Phi}_i^*+\frac{\dot{m}_{0i}\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2}}\right)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}.$$

在一般情况下 $m_{0i}=m_{0i}(q_s,\dot{q}_s,t)$[11],构造相

对论性变质量系统的广义动能函数

$$T^{*} = \sum_{i=1}^{N} m_{0i} c^{2}\left(1 - \sqrt{1 - \dot{\boldsymbol{r}}_{i}^{2}/c^{2}}\right), \tag{7}$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\partial T^{*}}{\partial q_{s}} &= \sum_{i=1}^{N} m_{i}\dot{\boldsymbol{r}}_{i}\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_{i}}{\partial q_{s}} \\ &+ \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial m_{0i}}{\partial q_{s}}c^{2}\left(1-\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_{i}^{2}/c^{2}}\right),\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^{*}}{\partial \dot{q}_{s}} &= \sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_{i}\dot{\boldsymbol{r}}_{i})\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_{i}}{\partial\dot{q}_{s}} + \sum_{i=1}^{N} m_{i}\dot{\boldsymbol{r}}_{i}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_{i}}{\partial\dot{q}_{s}} \\ &+ \sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial m_{0i}}{\partial\dot{q}_{s}}c^{2}\left(1-\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_{i}^{2}/c^{2}}\right)\right].\end{aligned} \tag{9}$$

容易证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \boldsymbol{r}_{i}}{\partial q_{s}} = \frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_{i}}{\partial q_{s}}, \quad \frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_{i}}{\partial\dot{q}_{s}} = \frac{\partial\boldsymbol{r}_{i}}{\partial q_{s}}. \tag{10}$$

(9)式减去(8)式,并注意到(10)式得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_{i}\dot{\boldsymbol{r}}_{i})\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_{i}}{\partial q_{s}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^{*}}{\partial\dot{q}_{s}} - \frac{\partial T^{*}}{\partial q_{s}} \\ &+ \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial m_{0i}}{\partial q_{s}}c^{2}\left(1-\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_{i}^{2}/c^{2}}\right) \\ &- \sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial m_{0i}}{\partial\dot{q}_{s}}c^{2}\left(1-\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_{i}^{2}/c^{2}}\right)\right].\end{aligned} \tag{11}$$

将(11)式代入(6)式得相对论性变质量系统的 d 'Alembert-Lagrange原理

$$\sum_{s=1}^{n}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^{*}}{\partial\dot{q}_{s}} + \frac{\partial T^{*}}{\partial q_{s}} + Q_{s} + P_{s}^{*}\right]\delta q_{s} = 0, \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned}P_{s}^{*} &= \sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{\Phi}_{i}^{*} + \frac{\dot{m}_{0i}\dot{\boldsymbol{r}}_{i}}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_{i}^{2}/c^{2}}}\right)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_{i}}{\partial q_{s}} \\ &- \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial m_{0i}}{\partial q_{s}}c^{2}\left(1-\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_{i}^{2}/c^{2}}\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial m_{0i}}{\partial\dot{q}_{s}}c^{2}\left(1-\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_{i}^{2}/c^{2}}\right)\right].\end{aligned} \tag{13}$$

将广义力分为有势的 Q'_{s} 和非有势的 Q''_{s},有

$$Q'_{s} = -\frac{\partial V}{\partial q_{s}},$$

$$Q_{s} = Q'_{s} + Q''_{s} = -\frac{\partial V}{\partial q_{s}} + Q''_{s}, \tag{14}$$

则原理(12)可表示为

$$\sum_{s=1}^{n}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^{*}}{\partial\dot{q}_{s}} + \frac{\partial L^{*}}{\partial q_{s}} + Q''_{s} + P_{s}^{*}\right]\delta q_{s} = 0, \tag{15}$$

其中 $L^{*} = T^{*} - V$ 为相对论性变质量系统的广义 Lagrange 函数.

3 相对论性变质量系统 d 'Alembert-Lagrange 原理的不变性条件

广义坐标的等时变分和非等时变分的关系为[11]

$$\Delta q_{s} = \delta q_{s} + \dot{q}_{s}\Delta t. \tag{16}$$

取无限小单参数群变换

$$\bar{t} = t + \Delta t, \quad \bar{q}_{s} = q_{s} + \Delta q_{s}. \tag{17}$$

在一级近似下,其展开式为

$$\bar{t} = t + \varepsilon f(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \quad \bar{q}_{s} = q_{s} + \varepsilon F_{s}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \tag{18}$$

其中 ε 为小参数,f,F_{s} 为无限小单参数群变换的生成元. 于是有

$$\Delta t = \varepsilon f(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \quad \Delta q_{s} = \varepsilon F_{s}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}). \tag{19}$$

利用(16)式将等时变分用生成元表为

$$\delta q_{s} = \varepsilon[F_{s}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) - \dot{q}_{s}f(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})]. \tag{20}$$

将(20)式代入(15)式得

$$\sum_{s=1}^{n}\varepsilon\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^{*}}{\partial\dot{q}_{s}} + \frac{\partial L^{*}}{\partial q_{s}} + Q''_{s} + P_{s}^{*}\right](F_{s} - \dot{q}_{s}f) = 0. \tag{21}$$

将上式展开,加上并减去一个函数 $\varepsilon\frac{\partial L^{*}}{\partial t}f$,整理得

$$\begin{aligned}\varepsilon\Big\{&\sum_{s=1}^{n}\left[(Q''_{s} + P_{s}^{*})(F_{s} - \dot{q}_{s}f) + \frac{\partial L^{*}}{\partial q_{s}}F_{s} + \frac{\partial L^{*}}{\partial\dot{q}_{s}}\dot{F}_{s}\right] \\ &- \left(\frac{\partial L^{*}}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^{*}}{\partial q_{s}}\dot{q}_{s} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^{*}}{\partial\dot{q}_{s}}\ddot{q}_{s}\right)f + \frac{\partial L^{*}}{\partial t}f \\ &- \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^{*}}{\partial\dot{q}_{s}}\dot{q}_{s}\dot{f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^{*}}{\partial\dot{q}_{s}}(F_{s} - \dot{q}_{s}f)\right]\Big\} = 0.\end{aligned} \tag{22}$$

再在(22)式中加上并减去一规范函数 $\varepsilon\dot{G}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 得

$$\begin{aligned}\varepsilon\Big\{&\sum_{s=1}^{n}\left[(Q''_{s} + P_{s}^{*})(F_{s} - \dot{q}_{s}f) + \frac{\partial L^{*}}{\partial q_{s}}F_{s} + \frac{\partial L^{*}}{\partial\dot{q}_{s}}\dot{F}_{s}\right] \\ &+ \left(L^{*} - \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^{*}}{\partial\dot{q}_{s}}\dot{q}_{s}\right)\dot{f} + \frac{\partial L^{*}}{\partial t}f + \dot{G}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \\ &- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^{*}}{\partial\dot{q}_{s}}F_{s} + \left(L^{*} - \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^{*}}{\partial\dot{q}_{s}}\dot{q}_{s}\right)f + G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\right]\Big\} \\ &= 0.\end{aligned} \tag{23}$$

这就是相对论性变质量系统 d 'Alembert-lagrange 原

理不变性条件的变换.

4　相对论性变质量完整系统的守恒律

如果无限小变换的生成元和规范函数满足如下条件：

$$\sum_{s=1}^{n}\Big[\big(Q''_s+P_s^*\big)\big(F_s-\dot q_s f\big)+\frac{\partial L^*}{\partial q_s}F_s+\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_s}\dot F_s\Big]+\Big(L^*-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_s}\dot q_s\Big)\dot f+\frac{\partial L^*}{\partial t}f+\dot G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0,\tag{24}$$

则由(23)式可得到守恒律

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_s}F_s+\Big(L^*-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_s}\dot q_s\Big)f+G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\text{const}.\tag{25}$$

于是有

定理 1　对相对论性变质量完整非保守系统，如果由(17)，(19)式确定的无限小变换的生成元 f，F_s 和规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足条件(24)式，那么系统存在形如(25)式的守恒律.

5　相对论性变质量非完整系统的守恒律

设系统受到 g 个理想双面 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0,\quad (\beta=1,2,\cdots,g).\tag{26}$$

按约束加在虚位移上的 Appell-Chetaev 定义，有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_s}\delta q_s=0,\ (\beta=1,2,\cdots,g).\tag{27}$$

由原理(15)式和约束条件(27)式，利用通常的 Lagrange 乘子法得相对论性变质量系统的 Routh 方程

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_s}-\frac{\partial L^*}{\partial q_s}=Q''_s+P_s^*+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_s},\quad (s=1,2,\cdots,n).\tag{28}$$

在运动微分方程积分之前，假设可由方程(26)，(28)式求出约束乘子 λ_β 作为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数，于是，方程(28)式可表为

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_s}-\frac{\partial L^*}{\partial q_s}=Q''_s+P_s^*+\Lambda_s,\quad (s=1,2,\cdots,n),\tag{29}$$

其中

$$\Lambda_s=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_s}.\tag{30}$$

称方程(29)式为与相对论性变质量非完整系统(26)，(28)式相应的相对论性变质量完整系统的运动方程.

定理 2　对于相应的相对论性变质量完整系统(29)式，如果由(17)，(19)式确定的无限小变换的生成元 f，F_s 和规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足条件

$$\sum_{s=1}^{n}\big(Q''_s+P_s^*+\Lambda_s\big)\big(F_s-\dot q_s f\big)+\frac{\partial L^*}{\partial q_s}F_s+\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_s}\dot F_s\big]+\big(L^*-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_s}\dot q_s\big)\dot f+\frac{\partial L^*}{\partial t}f+\dot G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0,\tag{31}$$

那么系统存在形如(25)式的守恒律.

将(20)式代入(27)式，并注意到参数 ε 的任意性，得到

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_s}(F_s-\dot q_s f)=0,\tag{32}$$

这就是非完整约束(26)式对无限小生成元的限制，将(32)式代入(31)式便得到(24)式，于是有

定理 3　对相对论性变质量非完整系统(26)，(28)式，如果由(17)，(19)式确定的无限小变换的生成元 f，F_s 和规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足条件(24)，(32)式，那么系统存在形如(25)式的守恒律.

6　算　　例

设相对论性变质量系统的 Lagrange 函数

$$L^*=k\mathrm e^{-\alpha t}c^2\Big(1-\sqrt{1-(\dot q_1^2+\dot q_2^2)/c^2}\Big)-V,\quad (k,\alpha\ 为常数),\tag{33}$$

所受非势广义力为 $Q''_1=\dot q_1$，$Q''_2=-\dot q_2$，势能 V 为常数，$u=0$，试研究系统的守恒律.

(24)式给出

$$\begin{aligned}&\dot q_1(F_1-\dot q_1 f)-\dot q_2(F_2-\dot q_2 f)\\&+\frac{k\mathrm e^{-\alpha t}}{\sqrt{1-(\dot q_1^2+\dot q_2^2)/c^2}}(\dot q_1\dot F_1+\dot q_2\dot F_2)\\&-\alpha k\mathrm e^{-\alpha t}c^2\Big(1-\sqrt{1-(\dot q_1^2+\dot q_2^2)/c^2}\Big)f\\&+k\mathrm e^{-\alpha t}\Big[c^2\big(1-\sqrt{1-(\dot q_1^2+\dot q_2^2)/c^2}\\&-\frac{\dot q_1^2+\dot q_2^2}{\sqrt{1-(\dot q_1^2+\dot q_2^2)/c^2}}\Big]\dot f-V\dot f+\dot G=0.\end{aligned}\tag{34}$$

方程(34)有如下解：

$$f=0,\ F_1=1,\ F_2=1,\ G=(q_2-q_1),\tag{35}$$

$$f=0,\ F_1=-q_2,\ F_2=q_1,\ G=q_1q_1.\tag{36}$$

根据定理 1,对(35),(36)式由(25)式可分别得到守恒律

$$k\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\frac{\dot{q}_1+\dot{q}_2}{\sqrt{1-(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)/c^2}}\right)+(q_2-q_1)=\mathrm{const}, \tag{37}$$

$$k\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\frac{\dot{q}_2 q_1-\dot{q}_1 q_2}{\sqrt{1-(q_1^2+q_2^2)/c^2}}\right)+(q_1 q_2)=\mathrm{const}. \tag{38}$$

若系统受到非完整约束

$$f_\beta=\dot{q}_1-\dot{q}_2+q_1 t=0, \tag{39}$$

则限制条件(32)式给出

$$(F_1-q_1 f)-(F_2-q_2 f)=0. \tag{40}$$

容易验证,(35)式给出的生成元满足(40)式,而(36)式给出的生成元不满足(40)式,根据定理 3,(37)式是系统的守恒律,而(38)式不是系统的守恒律.

7 讨 论

本文结果具有普遍意义,对相对论情况和经典情况,变质量系统和常质量系统都适用,当 m_{01} 为常量时,$\phi_s^*=0$,$P_s^*=0$,本文结果化为相对论性常质量系统的结果.当 $v_i \ll c$,$u_i \ll c$ 时,T^* 化为经典动能

$$T=\sum_i^N \frac{1}{2}m_{0i}\dot{\boldsymbol{r}}_i^2,\ \boldsymbol{\Phi}_i^*$$

化为经典反推力

$$\boldsymbol{\Phi}_i=\frac{\mathrm{d}m_{0i}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}_i-\boldsymbol{v}_i),\ P_s^*$$

化为经典情况下的

$$P_s=\sum_{i=1}^N\left[(\boldsymbol{\Phi}_i+\dot{m}_{0i}\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}-\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_{0i}}{\partial q_s}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_{0i}}{\partial \dot{q}_s}\right)\right]^{[11]},$$

本文结果化为经典变质量系统的结果;当 m_{0i} 为常量,且 $v_i \ll c$,$u_i \ll c$ 时,本文结果化为经典常质量系统的结果.

[1] Z.P.Li, *Acta Physica Sinica*, **30** (1981), 1659 (in Chinese) [李子平,物理学报,**30**(1981),1659].

[2] D.Liu, *Acta Mechanics Sinica*, **21** (1989), 75 (in Chinese) [刘端,力学学报,**21**(1989),75].

[3] D.Liu, *Science in China* (*series A*), **20** (11) (1990), 1189 (in Chinese) [刘端,中国科学,A 缉,**20**(11)(1990),1189].

[4] F.X.Mei, *Science in China* (*series A*), **23** (7) (1993), 709 (in Chinese) [梅凤翔,中国科学,A 缉,**23**(7)(1993),709].

[5] Y.Y.Zhao, F.X.Mei, *Advances in Mechanics*, **23** (3) (1993), 360 (In Chinese) [赵跃宇、梅凤翔,力学进展,**23**(3)(1993),360].

[6] J.L.Fu, R.W.Liu, F.X.Mei, *Journal of Beijing Institute of Technology*, **7** (3) (1998), 215.

[7] F.X.Mei, *Applied Mathematics and Mechanics*, **20** (6) (1999), 629.

[8] F.X.Mei, Applications of Lie groups and Lie algebras to constrained mechanical systems (Science Press, Beijing, 1999) (in Chinese) [梅凤翔,李群和李代数对约束力学系统的应用(科学出版社,北京,1999)].

[9] J.H.Fang, *Applied Mathematics and Mechanics*, **21** (7) (2000), 755 (in Chinese) [方建会,应用数学和力学,**21**(7)(2000),755.].

[10] J.H.Fang, *Acta Physics Sinica*, **48** (8) (1999), 1389 (in Chinese) [方建会,物理学报,**48**(8)(1999),1389].

[11] F.X.Mei, D.Liu, Y.Luo, Advanced Analytical Mechanics (Beijing Institute of Technology Press, Beijing, 1993), 76, 335, 339 [梅凤翔、刘端、罗勇,高等分析力学(北京理工大学出版社,北京,1993),76,335,339].

CONSERVATION LAWS OF RELATIVISTIC VARIABLE MASS SYSTEMS

FANG JIAN-HUI
(*Department of Applied Physics*, *University of Petroleum*, *Dongying* 257061, *China*)
(Received 11 December 2000; revised manuscript received 12 January 2001)

ABSTRACT

The conservation laws of relativistic variable mass systems were studied. The d'Alembert-Lagrange principle of relativistic variable mass system are given. By using invariant condition of the d'Alembert-Lagrange principle under infinitesimal transformations, the conditions and forms under which the conserved quantities of the system do exist were obtained. An example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: relativity, analytic mechanics, variable mass, conserved quantity
PACC: 0330