第 50 卷 第 6 期 2001 年 6 月
1000-3290/2001/50(06)/1011-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50, No.6, June, 2001

轻阻尼 *RLC* 量子化回路的双波描述*

龙超云[1)] 刘 波[2)]

[1)] (贵州大学物理系, 贵阳 550025)

[2)] (中国科学院半导体研究所, 北京 100083)

(2000 年 7 月 28 日收到; 2001 年 1 月 5 日收到修改稿)

研究轻阻尼 *RLC* 回路的量子化、量子单波函数及量子双波描述, 并讨论其经典极限.

关键词: *RLC* 电路, 量子单波函数, 量子双波函数

PACC: 0365, 0250

1 引 言

随着纳米技术和纳米电子学的迅速发展, 介观电路的量子效应已成为一个重要的研究课题[1—3]. 目前的研究主要集中在应用量子单波函数研究介观电路中电量及电流的量子涨落效应[4—9]. 然而, 近年来量子力学的经典极限的深入研究又表明: 量子单波函数并不能描述单粒子的量子行为, 而只能描述粒子系综, 为了使量子力学能描述单粒子的量子行为, 必须引入量子双波函数. 双波函数不仅包含普通量子力学, 同时, 又在经典极限下过渡到经典力学, 它已成功地应用于量子力学的诸多方面[10—15]. 与此相类似, 量子单波函数也并不能描述单一介观电路的量子行为, 它也只能描述其系综, 若要描述单一介观电路的量子行为, 则必须引入量子双波函数理论. 为此, 本文应用量子双波函数理论给出轻阻尼 *RLC* 回路的双波描述, 并对其经典极限进行讨论.

2 *RLC* 回路的经典结果

电阻、电感和电容分别为 R, L 和 C 的无源 *RLC* 回路的经典运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{LC} = 0. \tag{1}$$

方程(1)与经典力学中阻尼振动的动力学方程具有相似的结构, 对于轻阻尼 *RLC* 回路, 即 $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, 方程(1) 的特征方程的特征根为

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \mathrm{i}\omega,$$

其中, $\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{R^2}{4L^2}}$, $\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC}$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. 由微分方程理论可知, 方程(1) 的通解为

$$q(t) = \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}(A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t), \tag{2}$$

令 *RLC* 回路的初始条件为: $t = t_0$ 时, $q(t = t_0) = q_0$, $\dot{q}(t = t_0) = \dot{q}_0$, 则可得该回路的电量及电流

$$q(t) = K\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}(t-t_0)}\cos[\omega(t - t_0) + \theta_1], \tag{3}$$

$$\begin{aligned} j(t) &= \dot{q}(t) \\ &= -K\omega_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}(t-t_0)}\sin[\omega(t-t_0) + \theta_1 + \theta_2], \end{aligned} \tag{4}$$

其中 K, θ_1 和 θ_2 分别由下列关系确定:

$$K = \left\{q_0{}^2 + \left(\frac{2\dot{q}_0 L + Rq_0}{2L\omega}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \omega = \omega_0\cos\theta_2$$

$$\sin\theta_1 = \frac{-\left(\dot{q}_0 + \frac{R}{2L}q_0\right)}{\omega K}.$$

3 *RLC* 回路的量子化及量子单波函数

对于 *RLC* 回路, 取电量 q 为广义坐标, 其相应

---

* 贵州省自然科学基金(批准号: 9817854)资助的课题.

的广义动量为 $p = L\dot{q} = Lj$,则 RLC 回路的微分方程(1)可表示为

$$\dot{p} = -\frac{R}{L}p - \omega_0{}^2 Lq,\ \dot{q} = j. \tag{5}$$

由(5)式可得 $\frac{\partial\dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial\dot{p}}{\partial p} = -\frac{R}{L}$,故当 $R \neq 0$ 时,q 与 p 不构成正则共轭变量,其对易关系为

$$[\hat{q},\hat{p}] = \mathrm{i}\hbar\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}. \tag{6}$$

按照文献[16]关于阻尼谐振子的量子化方法,可对 RLC 回路作如下的变换:

$$q = Q\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}, \tag{7}$$

$$p = \left(P - \frac{1}{2}RQ\right)\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}, \tag{8}$$

其中,Q 和 P 为新引入的两个力学量,且 $P = L\dot{Q}$,由(6),(7)和(8)三式,可证这两个新的力学量 Q 和 P 算符化后满足下列对易关系:

$$[\hat{Q},\hat{P}] = \mathrm{i}\hbar. \tag{9}$$

这说明新引进的这一对力学量 Q 和 P 构成一对正则共轭变量,此外,在引入新力学量 Q 和 P 之后,原来的 RLC 回路的方程(1),则可表为

$$\ddot{Q} + \left(\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}\right)Q = 0. \tag{10}$$

其相应的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2L}P^2 + \frac{1}{2}L\omega^2 Q^2, \tag{11}$$

其中,$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}$,将(11)式中的 Q 和 P 算符化,则可得 RLC 回路的哈密顿算符

$$\hat{H} = \frac{1}{2L}\hat{P}^2 + \frac{1}{2}L\omega^2\hat{Q}^2. \tag{12}$$

显然(12)式与量子力学中的线性谐振子的哈密顿算符有相同的形式,故按量子力学求解线性谐振子的方法[17].可得 RLC 量子化回路的哈密顿量的本征值及本征函数如下:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \tag{13}$$

$$\Psi_n(Q) = N_n\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2Q^2}{2}}H_n(\alpha Q), \tag{14}$$

其中 $\alpha = \sqrt{\frac{L\omega}{\hbar}}$,$N_n$ 为归一化常数,$n = 0,1,2,3\cdots$

(14)式即为 RLC 量子化回路的量子单波函数.

4 RLC 量子化回路的量子双波描述

根据文献[10—15]的量子双波函数理论,对于单个 RLC 量子化回路,可引入下列一对双波函数来描述其量子行为:

$$\Psi_n(Q,t) = N_n\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2Q^2}{2}}H_n(\alpha Q)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega(t-t_0)}, \tag{15}$$

$$\Psi(Q,t) = \sum_{n'}N_{n'}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2Q^2}{2}}H_{n'}(\alpha Q)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(n'+\frac{1}{2}\right)\omega(t-t_0)}. \tag{16}$$

按双波理论假设,t 时刻任意力学量 $\hat{f}$ 在状态 $\Psi_n(Q,t)$ 中的测量值为

$$\langle f \rangle = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(Q,t)\hat{f}\Psi_n(Q,t)\mathrm{d}Q. \tag{17}$$

1)在(17)式中,令 $\hat{f} = 1$,则

$$\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(Q,t)\Psi_n(Q,t)\mathrm{d}Q = 1, \tag{18}$$

此即波函数的归一化条件.

2)在(17)式中,令 $\hat{f} = \hat{H}$,则可得

$$\langle H \rangle = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(Q,t)\hat{H}\Psi_n(Q,t)\mathrm{d}Q = E_n. \tag{19}$$

3)在(17)式中,令 $\hat{f} = \hat{Q}$,则

$$\langle Q \rangle = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(Q,t)\hat{Q}\Psi_n(Q,t)\mathrm{d}Q. \tag{20}$$

再运用厄米多项式的递推关系及正交归一性

$$QH_n(Q) = \frac{1}{2}H_{n+1}(Q) + nH_{n-1}(Q),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_m(Q)H_m(Q)\mathrm{e}^{-Q^2}\mathrm{d}Q = \sqrt{\pi}2^n n!\delta_{mn},$$

则可得

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{n}{2}} + \sqrt{\frac{n+1}{2}}\right]\cos\omega(t - t_0). \tag{21}$$

由(7)式及 $j = \dot{q}$,便可得 RLC 量子化回路的电量及电流.

$$\begin{aligned}\langle q \rangle &= \langle Q \rangle\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\\ &= \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\left[\sqrt{\frac{n}{2}} + \sqrt{\frac{n+1}{2}}\right]\cos\omega(t - t_0),\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\langle j \rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle q \rangle\\ &= -\frac{1}{\alpha}\sqrt{\omega^2 + \frac{R^2}{4L^2}}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right.\\ &\quad\left. + \sqrt{\frac{n+1}{2}}\right]\sin[\omega(t - t_0) + \theta_2],\end{aligned} \tag{23}$$

其中 θ_2 满足 $\omega = \omega_0\cos\theta_2$.

4) 在(17) 式中令 $\hat{f} = \hat{P}$,因为 $P = L\dot{Q}$,故

$$
\begin{aligned}
< P > &= L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} < Q > \\
&= -\frac{L\omega}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{n}{2}} + \sqrt{\frac{n+1}{2}}\right]\sin\omega(t - t_0).
\end{aligned} \tag{24}
$$

再由(8)式可得

$$
\begin{aligned}
< p > &= \left[< P > - \frac{R}{2} < Q > \right]\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} \\
&= -\frac{1}{\alpha}\sqrt{\omega^2L^2 + \frac{R^2}{4}}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\left[\sqrt{\frac{n}{2}} + \sqrt{\frac{n+1}{2}}\right] \\
&\quad \cdot \sin[\omega(t - t_0) + \theta_2].
\end{aligned} \tag{25}
$$

为了与通常的量子力学结果进行比较,对 RLC 回路定义系综平均值为

$$
\begin{aligned}
\overline{< f >} &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} < f > \mathrm{d}t_0 \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left\{\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}Q\sum_{n'}\Psi_{n'}^{*}(Q)\hat{f}\Psi_n(Q)\right. \\
&\quad \left.\cdot \exp[-\mathrm{i}(E_n - E_{n'})(t - t_0)/\hbar]\right\}\mathrm{d}t_0.
\end{aligned}
$$

则可以证明

$$
\overline{< f >} = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi_n^{*}(Q)\hat{f}\Psi_n(Q)\mathrm{d}Q. \tag{26}
$$

(26)式恰好是 RLC 量子化回路单波函数所描述的任意力学量 $\hat{f}$ 的平均值,这说明 RLC 量子化回路的单波函数(即(14) 式) 不能描述单个 RLC 回路的量子行为,而只能描述 RLC 回路系综,该系综的宏观条件为各 RLC 回路具有相同的电阻、电感和电容,但其初始条件 t_0 各不同. 若要描述单个 RLC 回路的量子行为,则必须引入量子双波函数,即(15) 和(16) 式.

5　双波描述结果的经典极限

当 $n\to\infty$, $\hbar\to 0$ 时,若

$$
\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t_0}\left\{\omega^2q_0^2 + \left(\dot{q}_0 + \frac{R}{2L}q_0\right)^2\right\} \to \frac{2n\hbar\omega}{L}, \tag{27}
$$

$$
\frac{\omega\left(\dot{q}_0 + \frac{R}{2L}q_0\right)}{\left\{\omega^2{q_0}^2 + \left(\dot{q}_0 + \frac{R}{2L}q_0\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \to 0, \tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
&2L^3\omega_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t_0}\left\{\omega^2q_0^2 + \left(\dot{q}_0 + \frac{R}{2L}q_0\right)^2\right\} \\
&\quad \to n\hbar\omega(4\omega^2L^2 + R^2).
\end{aligned} \tag{29}
$$

则通过经典结果与量子双波描述的结果进行比较,便可得

$$
< q > \to < q >_{c,l},\ < j > \to < j >_{c,l},\ < p > \to < p >_{c,l},\ < Q > \to < Q >_{c,l},\ < P > \to < P >_{c,l},
$$

其中

$$
\begin{aligned}
< q >_{c,l} &= K\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\cos[\omega(t - t_0) + \theta_1], \\
< j >_{c,l} &= -K\omega_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\sin[\omega(t - t_0) + \theta_1 + \theta_2], \\
< p >_{c,l} &= -LK\omega_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\sin[\omega(t - t_0) + \theta_1 + \theta_2], \\
< Q >_{c,l} &= \mathrm{e}^{\frac{R}{2L}t} < q >_{c,l},\quad < P >_{c,l} = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} < Q >_{c,l}.
\end{aligned}
$$

由此可见,在经典极限($n\to\infty$, $\hbar\to 0$) 的情况下,若(27),(28) 和(29) 成立,则双波函数的经典极限结果将过渡到经典电磁理论的结果,这正是我们所希望的结果.

[1]　L.P.Kouwenhoven *et al*., *Phys.Rev.Lett*., (1991), 1626.

[2]　D.V.Averin, Y.V.Nazarov, *Phys.Rev.Lett*., (1992), 69.

[3]　Y.Q.Li, B.Chen, *Phys.Rev*., **B53**(1996), 4027.

[4]　B.Chen, Y.Q.Li *et al*., *Phys.Lett*., **A205**(1995), 121.

[5]　Bin Chen, Shou-si Gao, Zheng-kuan Jiao, *Acta Physica Sinica*, **44**(1995), 1480(in Chinese)[陈斌、高守思、焦正宽,物理学报,**44**(1995),1480].

[6]　Bin Chen, You-quan Li, Jian Sha, Qi-rui Zhang, *Chinese Science Bulletin*, **41**(1996), 1275(in Chinese)[陈斌、李有泉、沙键、张其瑞,科学通报,**41**(1996),1275].

[7]　Zhi-ming Zhang, Lin-shen He, Shi-kang Zhou, *Chinese Journal of Quautum Electronics*, **15**(1998), 339(in Chinese)[张智明、何林生、周士康,量子电子学报,**15**(1998),339].

[8]　Ji-suo Wang, Bao-cun Han, Chang-yong Sun, *Acta Physica Sinica*, **47**(1998), 1187, (in Chinese)[王继锁、韩保存、孙长勇,物理学报,**47**(1998),1187].

[9]　Yong-jian Gu, *Acta Physica Sinica*, **49**(2000), 963(in Chinese)[顾永建,物理学报,**49**(2000),963].

[10]　X.Y.Huang, *Phys.lett*., **A115**(1986), 310.

[11]　X.Y.Huang, *Chinese Phys.Lett*., **4**(1987), 153.

[12]　Xiang-you Huang, Quan-hui Liu, Xu Tian, Zhong-ping Qiu, *Acta Physica Sinica*, **42**(1993), 180(in Chinese)[黄湘友、刘全慧、田旭、裘中平,物理学报,**42**(1993),180].

[13]　Xiang-you Huang, *Acta Physica Sinica*, **45**(1996), 729(in Chinese)[黄湘友,物理学报,**45**(1996),729].

[14] Chang-yuan Chen, You-wen Liu, *Acta Physica Sinica*, **47** (1998), 536 (in Chinese) [陈昌远、刘友文, 物理学报, **47** (1998), 536].

[15] Qi-xue Wu, *Acta Physica Sinica*, **49** (2000), 190 (in Chinese) [吴奇学, 物理学报, **49** (2000), 190].

[16] Hen-wu Pen, *Acta Physica Sinica*, **29** (1998), 1084 (in Chinese) [彭桓武, 物理学报, **29** (1980), 1084].

[17] Bo-chu Qian, Jin-yan Zheng, Problem Choice and Dissection in Quantum Mechanics (in Chinese) (Science Press, Beijing, 1988), 63 [钱伯初, 曾谨言, 量子力学习题精选及剖析, 科学出版社, 北京, 1988), 63].

DOUBLE-WAVE FUNCTION OF *RLC* CIRCUIT AFTER QUANTIZATION*

LONG CHAO-YUN

(*Department of Physics*, *Guizhou University*, *Guiyang* 550025, *China*)

LIU BO

(*Institute of Semiconductor*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100083, *China*)

(Received 28 July 2000; revised manuscript received 15 January 2001)

ABSTRACT

Quantization of *RLC* circuit is given and described by a double-wave function. A comparison between classical limit result and those of classical theory is made.

Keywords: *RLC* Circuit, single-wave function, double-wave function

PACC: 0365, 0250

* Project supported by the Natural Science Foundation of Guizhou Province, China (Grant No. 9817854).