第 50 卷 第 6 期 2001 年 6 月
1000-3290/2001/50(06)/1015-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50, No.6, June, 2001

Reissner-Nordstrom 几何中标量场的统计熵与能斯特定理*

赵 仁 张丽春

(雁北师范学院物理系,大同 037000)

(2000 年 11 月 23 日收到;2000 年 12 月 27 日收到修改稿)

从 Reissner-Nordstrom 时空背景下的 Klein-Gordon 方程出发,利用改进的 brick-wall 方法-膜模型,计算黑洞背景下标量场的自由能和熵. 得到标量场的熵是由两部分组成的,根据熵是广延量的性质,得到黑洞熵是由两个子热力学系统贡献的. 在此基础上给出了新的 Bekenstein-Smarr 公式. 结果表明,用两个子热力学系统表达的熵,当黑洞的辐射温度趋于绝对零度时,黑洞的熵也趋于零,它满足能斯特定理,可视为黑洞的普朗克绝对熵.

关键词:brick-wall 方法,膜模型,黑洞熵,能斯特定理

PACC:0420,9760L

1 引 言

70 年代初期 Bekenstein[1],Hawking[2],Bardeen 等[3],提出了黑洞熵与其视界面积成正比的一套理论,从此黑洞热力学的研究获得了长足的进展,尤其是 Hawking 辐射的证明[2],更刺激了人们研究黑洞热性质的积极性. 人们发现若把黑洞的表面重力 κ 看作温度,把黑洞外视界的面积 A_+ 看作熵,则可建立起相当完美的与普通热力学四条定律相对应的黑洞势力学四定律. 相形之下,黑洞熵的研究则不令人满意[4—6]. 最近,人们把越来越多的注意力集中到这一方面来[6—8].

事实上,黑洞的熵不能满足能斯特定理[6],即一个系统的温度趋于零时,它的熵趋于一个常量,根据 Planck 规范的要求,这个常量为零. 目前的黑洞热力学,把黑洞熵 S 看作与外事件视界面积 A_+ 成正比的量,$S = A_+/4$,以 Reissner-Nordstrom 黑洞为例,

$$S = A_+/4 = \pi a^2,$$

式中 a 为黑洞外视界位置. 这样定义的黑洞熵,在 Reissner-Nordstrom 黑洞趋于极端黑洞时,即黑洞辐射温度趋于绝对零度,由于 $Q \to M$,$a \to M$,显然有

$$S \to \pi M^2,$$

熵不趋于零,所以这样定义的黑洞熵不能满足能斯特定理,不是 Planck 绝对熵.

为了解决这一矛盾,Hawking,Teitelbom,Gibbons 等主张重新定义极端黑洞的熵[9—12]. 使黑洞的辐射温度趋于零时,熵也趋于零. 而 Loranz,Zaslavskii 等主张极端黑洞的熵应为 $A_+/4$[13,14]. 目前还在争论中.

本文利用改进的 brick-wall 方法-膜模型,计算了 Reissner-Nordstrom 时空的统计熵,在计算过程中,我们克服了原 brick-wall 方法中存在的辐射场与黑洞是否处于稳定平衡状态问题以及态密度在视界发散的疑难. 在我们的计算中当紫外截断因子趋于黑洞外视界时,"红外"截断因子也趋于黑洞的外视界,然而所求熵与黑洞的外、内视界面积成正比,可视为黑洞熵. 由此而得到的熵,当黑洞的辐射温度趋于零时,熵也趋于零,满足能斯特定理,可视为黑洞的绝对熵. 在给出黑洞熵的基础上,进一步修改 Bekenstein-Smarr 公式,得到新的 Bekenstein-Smarr 公式. 当不考虑内视界对熵的贡献时,我们所得的结论都回到已知结果.

2 Reissner-Nordstrom 黑洞背景下标量场的统计熵

Reissner-Nordstrom 时空线元

$$ds^2 = -g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{1}$$

* 国家自然科学基金(批准号:19773003)与山西省自然科学基金(批准号:20001009)资助的课题.

其中 $g_{tt}=\frac{(r-a)(r-b)}{r^2}$，$g_{rr}=1/g_{tt}$.

式中 $a=M+\sqrt{M^2-Q^2}$，$b=M-\sqrt{M^2-Q^2}$ 分别为黑洞的外内视界位置.

弯曲时空中无质量粒子的动力学行为用 Klein-Gordon 方程描述：

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)\psi=0. \tag{2}$$

对时空(1)式，设方程(2)的解为

$$\psi=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}Y_l^m(\theta,\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(r)}, \tag{3}$$

应用 WKB 近似可得波数为

$$k_r^2=g_{rr}^2\left[E^2-\frac{l(l+1)}{r^2}g^{rr}\right]. \tag{4}$$

并且波数是量子化的，即

$$\oint k_r\mathrm{d}r=n\pi. \tag{5}$$

利用 Hooft 理论[15]，设

$\psi(r)=0$ 当 $r\leqslant a+h$，和 $\psi(r)=0$ 当 $r\geqslant a+Nh$.

式中 h 为一非负小量的紫外截断因子，N 为大于 1 的常数，Nh 为“红外”截断因子，则(5)式可写成

$$\int_{a+h}^{a+Nh}k_r\mathrm{d}r=n\pi. \tag{6}$$

系统体系的自由能可表示为

$$\beta F=\sum_E\ln(1-\mathrm{e}^{-\beta E}), \tag{7}$$

作半经典处理，视能态为连续分布，因而求和改为积分

$$\sum_E\to\int_0^\infty\mathrm{d}Eg(E), \tag{8}$$

式中 $g(E)$ 为态密度，$g(E)=\mathrm{d}\Gamma(E)/\mathrm{d}E$，$\Gamma(E)$ 为微观态数目，即

$$\Gamma(E)=\sum_{m,l}n_r(E,l,m)=\sum_l(2l+1)n_r(E,l)$$

$$=\int_l(2l+1)\mathrm{d}l\,\frac{1}{\pi}\int_{a+h}^{a+Nh}k_r\mathrm{d}r. \tag{9}$$

式中对角量子数求和也作积分处理，并且要求在积分时，必须保持 $k_r\geqslant0$，于是系统的自由能为

$$\beta F=\int_0^\infty\mathrm{d}Eg(E)\ln(1-\mathrm{e}^{-\beta E})$$

$$=-\frac{2\pi^3}{45\beta^3}\int_{a+h}^{a+Nh}\frac{r^6\mathrm{d}r}{(r-a)^2(r-b)^2}. \tag{10}$$

对(10)式积分中，我们只取 $h\to0$ 时的发散项，按照 Hooft 的观点，其他项为远离围绕系统真空产生的作用，相对而言，其影响甚微，可略去，因此在 Reissner-Nordstrom 黑洞背景下，标量场的自由能可近似表示为

$$F=-\frac{2\pi^3}{45\beta^4}\Big[\frac{a^6}{(a-b)^3}\Big(\frac{(a-b)(N-1)}{Nh}+4\ln N\Big)$$
$$+\frac{b^6}{(a-b)^3}\Big((a-b)\Big(\frac{1}{a-b+h}-\frac{1}{a-b+Nh}\Big)$$
$$-4\ln\frac{a-b+Nh}{a-b+h}\Big)\Big]-\frac{2\pi^3}{45\beta^4}\frac{6}{(a-b)^3}\Big[a^5b\ln N$$
$$-ab^5\ln\frac{a-b+Nh}{a-b+h}\Big]. \tag{11}$$

利用系统熵与自由能的关系：

$$S=\beta^2\frac{\partial F}{\partial\beta}. \tag{12}$$

可得

$$S=S_1+S_2, \tag{13}$$

其中

$$S_1=\frac{4\pi a^2}{360\beta}\Big(\frac{N-1}{Nh}\Big)+\frac{\pi a(a-b)}{90\beta}[4a+6b]\ln N, \tag{14}$$

$$S_2=\frac{4\pi a^2}{360\beta}\Big(\frac{b}{a}\Big)^6\Big(\frac{1}{a-b+h}-\frac{1}{a-b+Nh}\Big)$$
$$-\frac{\pi b^5(a-b)}{90\beta a^4}[4b+6a]\ln\frac{a-b+Nh}{a-b+h}. \tag{15}$$

由文献[15]中的(3.17)知，当 $Nh=L\gg a$ 时，如取

$$h=\frac{1}{720\pi M} \tag{16}$$

可得到黑洞熵与视界面积正比的关系. 为了保证辐射场与黑洞处于稳定平衡状态，“红外”截断因子不应取 $L\gg a$. 考虑到以上原因，对 Reissner-Nordstrom 黑洞我们取紫外截断因子

$$h=\frac{1}{720\pi M}\frac{N-1}{N}=\frac{N-1}{(a+b)360\pi N}. \tag{17}$$

和“红外”截断因子 Nh，N 的取值应保证使黑洞与辐射场处于平衡稳定状态. 则

$$S_1=\frac{1}{4}[A_+-A_-]+K\ln N$$
$$=S_++S_-+K\ln N, \tag{18}$$

$$S_2=\frac{1}{4}[A_+-A_-]\Big(\frac{b}{a}\Big)^6\Big(\frac{N}{(a^2-b^2)360\pi N+N-1}$$
$$-\frac{N}{(a^2-b^2)360\pi N+N(N-1)}\Big)$$
$$-\frac{(a-b)^2b^5}{360a^6}[4b+6a]\ln\frac{a-b+Nh}{a-b+h}. \tag{19}$$

由以上两式可以看到，不论 $a\sim b$，还是 $a\gg b$. S_2 相对 S_1 都是可以忽略的. 故得到系统的熵为

$$S=S_++S_-+K\ln N. \tag{20}$$

其中 $K = \frac{(a-b)^2}{360a}[4a+6b]$，和 $A_+ = 4\pi a^2$，$A_- = 4\pi b^2$ 分别为黑洞外内视界面积，$S_+ = A_+/4$，$S_- = -A_-/4$.

3　Bekenstein-Smarr 公式的新形式

对(20)式，我们取主导项

$$S \approx \frac{1}{4}[A_+ - A_-] = S_+ + S_-. \tag{21}$$

由上式，我们知黑洞的熵是由两部分组成，即由外内视界面积决定的. 而由熵是广延量的特性，对应黑洞的热力学系统应由两个子热力学系统组成. 而过去所讨论的黑洞熵只是对应外视界面积，即由单一热力学系统决定的. 故已知的 Bekenstein-Smarr 公式中所体现的也是单一热力学系统. 它的积分与微分表达式分别为[16,17]

$$M = \frac{\kappa_+}{4\pi}A_+ + V_+ Q \tag{22}$$

和

$$\delta M = \frac{\kappa_+}{8\pi}\delta A_+ + V_+\delta Q, \tag{23}$$

其中 $\kappa_+ = \frac{a-b}{2a^2}$ 是黑洞外表面重力，Q 为黑洞的电量，V_+ 为黑洞外视界处的电势. 由(21)式知，我们现在所研究的系统是由两个子系统组成，那么相应的 Bekenstein-Smarr 公式中也应体现两个热力学子系统. 由文献[18]知黑洞内视界的表面重力为 $\kappa_- = \frac{b-a}{2b^2}$. 则我们也可以把内视界看作一个热力学系统，相应的 Bekenstein-Smarr 公式的积分与微分形式为[8]

$$M = \frac{\kappa_-}{4\pi}A_- + V_- Q \tag{24}$$

和

$$\delta M = \frac{\kappa_-}{8\pi}\delta A_- + V_-\delta Q. \tag{25}$$

由(21)式知黑洞的熵是由内外视界决定的，所以新的 Bekenstein-Smarr 公式应为内外视界对应的两个子热力学系统决定. 相应的积分与微分式为

$$M = \frac{\kappa_+}{8\pi}A_+ + \frac{1}{2}V_+ Q + \frac{\kappa_-}{8\pi}A_- + \frac{1}{2}V_- Q \tag{26}$$

和

$$\begin{aligned}\delta M &= \frac{\kappa_+}{16\pi}\delta A_+ + \frac{1}{2}V_+\delta Q + \frac{\kappa_-}{16\pi}\delta A_- + \frac{1}{2}V_-\delta Q \\ &= \frac{T_+}{2}\delta S_+ + \frac{T_-}{2}\delta S_- + \frac{1}{2}V_+\delta Q + \frac{1}{2}V_-\delta Q.\end{aligned} \tag{27}$$

由于 S_+ 和 S_- 不独立，所以上式可写成

$$\begin{aligned}\delta M &= T_+\delta S_+ + V_+\delta Q \\ &= T_-\delta S_- + V_-\delta Q,\end{aligned} \tag{28}$$

式中 $V_+ = Q/a$，$V_- = Q/b$ 分别对应外内视界处的电势，$T_+ = \frac{a-b}{4\pi a^2}$，$T_- = \frac{a-b}{4\pi b^2}$.

4　讨　　论

通过以上分析，在 Reissner-Nordstrom 黑洞背景下，从自由粒子标量场出发，利用 WKB 方法近似求的波函数，然后运用改进的 briac-wall 方法-膜模型，计算标量场的自由能与熵，经计算，黑洞的熵不仅是外视界面积的函数，也与内视界面积有关. 黑洞的熵应是与外内视界面积成正比项，再加上一个常数项. 只有在内视界位置相对于外视界位置可忽略时，内视界对熵的贡献才能被忽略. 在求得黑洞熵是由两部分组成的基础上，根据熵是广延量的性质，进一步断定我们所研究的热力学系统应由两个子热力学系统组成，即对应黑洞的内外视界. 所以 Bekenstein-Smarr 公式中应含有两个子热力学系统，这样我们得到新的 Bekenstein-Smarr 公式.

在我们所得结论中，当黑洞的辐射温度 $T_+ \to 0$ 时，熵 $S \to 0$ 满足能斯特定理. 当 $N \to \infty$，即取 $Nh = L \gg a$ 时，结论回到已知结果[7,19]. 而我们运用改进的 briac-wall 方法 - 膜模型时，由于用 N 的取值来保证黑洞与辐射场处于稳定平衡状态，故在计算中克服了辐射场与黑洞不处在稳定平衡状态的缺点. 在我们的计算中当 $N \to 1$ 时，$h \to 0$，$Nh \to 0$ 即紫外截断因子与‘红外”截断因子都趋于黑洞的外视界上，然而由(14)式知，所得熵为 $S = S_+ + S_-$，可视为黑洞熵. 所得结论，既满足能斯特定理，又能得到黑洞热力学的其他热力学关系式与原有关系式具有相同的结果. 所以我们所给出的熵可视为普朗克绝对熵，给出的新 Bekenstein-Smarr 公式具有普遍的物理意义.

[1] J.D.Bekenstein, *Phys. Rev.*, **D7**(1973), 2333.

[2] S.W.Hawking, *Commun. Math. Phys.*, **43**(1975), 199.

[3] J.M.Bardeen, B.Carter, S.W.Hawking, *Math. Phys.*, **31**(1973), 161.

[4] Wen-biao Liu, Jian-yang Zhu, Zhao Zheng, *Acta Physica Sinica.*, **49**(2000), 581 (in Chinese) [刘文彪等,物理学报, **49**(2000), 581].

[5] V.P.Frolov, D.N.Page, *Phys. Rev. Lett.*, **71**(1993), 3902.

[6] R.M.Wald, *Phys. Rev.*, **D56**(1997), 6467.

[7] H.Lee, S.W.Kim, W.T.Kim, *Phys. Rev.*, **D54**(1996), 6559.

[8] Zhao Zheng, Jian-yang Zhu, Wen-biao Liu., *Chin. Phys. Lett.*, **16**(1999), 698.

[9] S.W.Hawking, G.Horowitz, S.Ross., *Phys. Rev.*, **D51**(1995), 4302.

[10] G.W.Gibbons, R.E.Kallosh., *Phys. Rev.*, **D51**(1995), 2839.

[11] C.Teitelbom, *Phys. Rev.*, **D51**(1995), 4315.

[12] A.Ghosh, P.Mitra., *Phys. Rev. Lett.*, **77**(1996), 4848; **78**(1996), 1815.

[13] D.J.Loranz *et al.*, *Phys. Rev.*, **D52**(1995), 4554.

[14] O.B.Zaslavskii., *Phys. Rev. Lett.*, **76**(1996), 2211; *Phys. Rev.*, **D56**(1997), 2188; 6695.

[15] G 't Hooft, *Nucl Phys.*, **B256**(1985), 727.

[16] J.Bekenstel, PHD Thesis, Princeton University, 1972.

[17] L.Smarr., *Phys. Rev. Lett.*, **30**(1973), 71.

[18] H.Kim, *Phys. Rev.*, **D60**(1999), 024001.

[19] Liu Wenbiao, Zhao Zheng, *Phys. Rev.*, **D61**(2000), 063003.

THE NERNST THEOREM AND STATISTICAL ENTROPY OF THE SCALAR FIELD IN REISSNER-NORDSTROM GEOMETRY*

ZHAO REN ZHANG LI-CHUN

(*Department of Physics, Yanbei Normal Institute, Datong* 037000, *China*)

(Received 23 November 2000; revised manuscript received 27 December 2000)

ABSTRACT

Based on the Klein-Gordon equations on the background of the Reisser-Nordstrom spacetime, we calculate the free energy and entropy of a scalar field near a black hole by improved brick-wall methodmembrane model. It is obtained that the entropy of the scalar field consists of two parts. As the entropy is an extensive quantity, we obtain that the black hole entropy comes from two thermodynamical systems. And the new Bekenstein-Smarr formula is given. It is shown that the entropy expressed by two thermodynamical subsystems approaches zero when the radiation temperature of the black hole approaches absolute zero. This obeys Nernst theorem. It can be taken as Planck absolute entropy of a black hole.

Keywords: brick-wall method, membrane model, black hole entropy, Nernst theorem

PACC: 0420, 9760L

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No: 19773003) and the Natural Science Foundation of Shanxi Province (Grant No: 20001009), China.