

用近场声学测量信息可视化多个三维 障碍物的一种快速算法*

尤云祥 缪国平 刘应中

(上海交通大学船舶与海洋工程学院, 上海 200030)
(2000 年 6 月 26 日收到, 2000 年 11 月 17 日收到修改稿)

提出了用点声源散射场的近场信息来可视化多个三维障碍物的一种简单快速算法, 它是通过利用一个线性方程组的解的三维等值线图来实现这种可视化的. 这个算法的一个特别吸引人的性质是, 它避开了迭代技术的应用, 而且不需要关于障碍物的任何几何和物理的先验信息. 此外, 它只需要散射场在测量表面的某个有限范围中若干个观测点处的近场测量信息, 就能得到障碍物的一个很理想的可视化. 数值算例保证了这个可视化算法是有效和实用的.

关键词: 声散射, 反问题, 物形反演

PACC: 4320, 0340K, 0270

1 引 言

用声学方法来反演障碍物的物形或其内部的介质分布, 是一类在医学、地球科学和材料科学等领域中有着广阔应用前景的反问题. 鉴于此, 用数值方法来实现这类反问题的求解是二十几年来一个前沿研究热点. 当频率在谐振区时, 这类反问题通常既是不适定的又是完全非线性的, 因此其数值求解是非常困难的. 迄今, 已有大量求解这种完全非线性且不适定反问题的数值方法^[1], 它们都具有迭代的性质. 总体上, 这些方法的运算量都是很大的, 而且还可能遭遇局部极小解. 此外, 这些方法通常只适用于单个星形障碍物的反演, 而且障碍物的边界类型必须是预先知道的. 然而, 在实践中, 这些几何和物理的先验信息通常是不知道的. 最近, Colton 和 Kirsch^[2]就二维障碍物的物形反演问题, 提出了一种新的求解方法. 这是一个既不需要迭代, 也不需要预先知道关于障碍物的任何几何和物理先验信息的方法. 由于在这个方法中, 只需求解一个非常简单的第一类 Fredholm 积分方程, 因此它的数值实现是非常简单和快速的. 但在这个方法中, 用来反演障碍物形状的是平面入射波产生的散射场的远场分布在所有

观测方向上的远场信息. 然而, 在实践中, 要获得所有这些远场全孔径信息通常是不现实的. 最近, 作者^[3]进一步发展了 Colton 和 Kirsch 的方法, 提出了只用某个有限孔径范围中若干个测量方向上的远场信息, 来成像多个三维障碍物形状的一种简单快速算法. 此外, 在水声、无损检测等领域中, 点声源是一种更常用的入射波^[4], 而且散射场的测量通常是在近区进行的. 因此, 用由点声源入射波产生的散射场的有限孔径近场信息来反演障碍物的形状, 是一类有着重要理论和实用意义的反问题. 本文进一步发展了文献^[3]的方法, 用点声源激励下的散射场的有限孔径近场信息来可视化多个三维障碍物的反问题, 提出了一种简单快速算法.

2 一个简单算法

设 D 是一个具有光滑边界 ∂D 的有界开区域. 要求 D 的外部区域 $D^+ = R^3 \setminus \bar{D}$ 是单连通的, 但 D 本身可以由多个不连通部分组成. 在略去时谐部分 $\exp[-i\omega t]$ (ω 是圆频率) 后, 入射点声源场为

$$u^i(\mathbf{x}; \mathbf{y}_0) = h_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|), \quad (1)$$

其中 $\mathbf{y}_0 \in D^+$ 是点源位置矢量, k 是波数, $h_0^{(1)}$ 是第一类零阶球 Hankel 函数. 障碍物 D 将散射球面波场

* 国家自然科学基金(批准号: 19572044)资助的课题.

(1) ,从而产生一个散射场 u^s ,记总场为

$$u(x; y_0) = u^i(x; y_0) + u^s(x; y_0). \quad (2)$$

正散射问题就是求一个总场 u ,使其满足 Helmholtz 方程

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (x \in D^+ \setminus \{y_0\}) \quad (3)$$

和 Sommerfeld 辐射条件

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r(\partial u / \partial r - iku) = 0, \quad r = |x|, \quad (4)$$

它要求对所有方向 $\hat{x} = x/|x|$ 一致地成立 ,以及在 ∂D 上的边界条件

$$B(u) = 0 \quad (x \in \partial D), \quad (5)$$

其中 B 表示边界算子.对声软障碍物, $B(u) = u$;对声刚性障碍物, $B(u) = \partial u / \partial n$;对声阻抗型障碍物, $B(u) = \partial u / \partial n + i\lambda u$,其中 n 是 ∂D 的单位外法线方向, λ 是一个实常数.

记 $\Omega = \{x_l | x_l \in \Gamma, l = 1, 2, \dots, N\}$ 为散射场的观测点的集合, $\Lambda = \{y_l | y_l \in \Gamma, l = 1, 2, \dots, M\}$ 为点声源的入射源点的集合,其中 Γ 是一个把 D 包含于其内的一个光滑封闭曲面.现在,反问题的精确提法是:由散射场的近场信息 $u^s(x; y_0)$ (其中 $x \in \Omega, y_0 \in \Lambda$),可视化未知障碍物 D .

由 Green 公式可得

$$H(x)u(x; y_0) = u^i(x; y_0) + \int_{\partial D} \left[u(y; y_0) \frac{\partial \alpha(y; x)}{\partial n} - \alpha(y; x) \frac{\partial u(y; y_0)}{\partial n} \right] d\alpha(y), \quad (6)$$

其中, $\alpha(x; y) = \frac{ik}{4\pi} h_0^{(1)}(k|x-y|)$, H 为 Heaviside 函数,当 $x \in D^+$ 时,它等于 1,当 $x \in D$ 时,它等于 0.我们引进函数

$$v(y) = \sum_{l=1}^N g_l \alpha(y; x_l), \quad (7)$$

其中 $g_l, 1 \leq l \leq N$,是复常数.现在假设存在 $g_l, 1 \leq l \leq N$,使 v 满足

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad (y \in D), \quad (8)$$

$$B(v) = -B(h_0^{(1)}(k|y-x_0|)) \quad (y \in \partial D), \quad (9)$$

其中 x_0 是 D 中的一个给定点.现在,由(5)(6)和(9)式,易得

$$\frac{ik}{4\pi} \sum_{l=1}^N g_l u^s(x_l; y_0) = h_0^{(1)}(k|x_0 - y_0|), \quad y_0 \in \Gamma. \quad (10)$$

上述分析表明,如果存在 $g_l, 1 \leq l \leq N$,使 v 满足(8)和(9)式,那么(10)式存在一个精确解.但

(10)式的精确解一般是不存在的,因为内边值问题(8)(9)式通常不可能存在一个这样的解,使它能表示为(7)式的形式.不过,我们可以证明(10)式在最大模意义下的近似解总是存在的.为此,我们设 $V = \{v_l(x) = \alpha(x; x_l) : l = 1, 2, \dots, \infty\} \subset L^2(\partial D)$,其中 $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$ 是 Γ 中的一个稠密点序列.现在证明,如果 k^2 不是 D 的 Dirichlet 特征值,那么 V 在 $L^2(\partial D)$ 中稠密.为此,引进函数 $w(x) = \int_{\partial D} \alpha(y; x)g(y) d\alpha(y)$.易知, w 是 Γ 上的一个解析函数.现在只需证明,如果 $g \in L^2(\partial D)$ 满足 $w(x_l) = 0, l = 1, 2, \dots$,那么 $g = 0$.由解析延拓的唯一性可知,在 Γ 上, $w = 0$.因此, w 是 Helmholtz 方程在 Γ 的外部区域的一个在 Γ 上满足齐次 Dirichlet 边界条件的辐射解.由此可知,在 Γ 的外部区域, $w = 0$.由解析延拓的唯一性可知,在 $R^3 \setminus D$ 中, $w = 0$.因此,在 ∂D 上, $w = 0$.由单层势在边界 ∂D 上的连续性可知, w 是 Helmholtz 方程在 D 中的一个在 ∂D 上满足齐次 Dirichlet 边界条件的解.由于 k^2 不是 D 的 Dirichlet 特征值,因此,在 D 中, $w = 0$.现在,由单层势的法向导数在边界 ∂D 上的跳跃性质可知, $g = \partial w / \partial n = 0$.

上述分析表明,对任意很小的 $\varepsilon > 0$,总能找到 N 个复数 $g_l, 1 \leq l \leq N$,使

$$\left\| \frac{ik}{4\pi} \sum_{l=1}^N g_l h_0^{(1)}(k|x-x_l|) + h_0^{(1)}(k|x-x_0|) \right\|_{L^2(\partial D)} < \varepsilon. \quad (11)$$

由 Dirichlet 边界条件可得

$$\left\| \frac{ik}{4\pi} \sum_{l=1}^N g_l u^s(x; x_l) - h_0^{(1)}(k|x-x_0|) \right\|_{L^2(\partial D)} < \varepsilon. \quad (12)$$

由正问题的适定性可知,存在一个不依赖于 ε 的常数 C 使

$$\max_{x \in \Gamma} \left| \frac{ik}{4\pi} \sum_{l=1}^N g_l u^s(x; x_l) - h_0^{(1)}(k|x-x_0|) \right| < C\varepsilon. \quad (13)$$

由互易关系可得

$$\max_{y_0 \in \Gamma} \left| \frac{ik}{4\pi} \sum_{l=1}^N g_l u^s(x_l; y_0) - h_0^{(1)}(k|x_0 - y_0|) \right| < C\varepsilon. \quad (14)$$

需要指出的是,只要 k^2 不是 D 的 Neumann 特征值,对声刚性和声阻抗型障碍物(14)式也是成立的.由(11)式可知,当 x_0 趋于 ∂D 时, $\|v\|_{L^2(\partial D)}$ 是

无界的,从而由(7)式可知, $|\tilde{g}(x_0)|$ 也是无界的,其中 $\tilde{g}(x_0) = (g_1(x_0), \dots, g_N(x_0))^T$, $|\tilde{g}(x_0)| = \sqrt{\sum_{n=1}^N |g_n(x_0)|^2}$, T 表示取转置,用 $g_n(x_0)$ 来表示 g_n 对 x_0 的依赖关系. 这个结果蕴涵了可视化障碍物 D 的一个简单快速算法. 粗略地说,这个简单快速算法由如下两步组成. 第一步,选择一个把 D 包含于其内的网格 S ,对 S 中的每一个网格点 x_0 ,由(10)式确定一个空间分布函数 $|\tilde{g}(x_0)|$; 第二步,在 S 的所有网格点中,选择使 $|\tilde{g}(x_0)|$ 达到其局部极大的那些点,由前面的分析可知,这些点构成了障碍物 D 的一个可视化. 在下一节,对这个可视化过程作进一步的分析.

通常只能用有限个点声源照射障碍物. 因此, $|\tilde{g}(x_0)|$ 事实上需要由线性方程组

$$\frac{ik}{4\pi} \sum_{l=1}^N g_l(x_0) u^s(x_l; y_m) = h_0^{(1)}(k|x_0 - y_m|), \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (15)$$

来近似确定. 记 A 为(15)式左边的系数矩阵. 数值计算表明, A 的条件数通常是很大的. 这意味着(15)式是一个条件不适定的线性方程组. 克服这种条件不适定性的一个有效方法是截断奇异值方法^[5]. 为此,记 $\{(\sigma_n, u_n, v_n) | n = 1, 2, \dots, N\}$ 为 A 的奇异系,其中 σ_n 是 A 的奇异值,且满足 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N \geq 0$, u_n, v_n 分别是相应于 σ_n 的左右奇异向量, $n = 1, 2, \dots, N$. 设 $K < \text{rank}(A)$ 是一个正整数,其中 $\text{rank}(A)$ 为 A 的秩,那么(15)式的截断奇异值解定义为

$$\tilde{g}_K(x_0) = \sum_{n=1}^K \frac{u_n^T B(x_0)}{\sigma_n} v_n, \quad (16)$$

其中 $B(x_0)$ 表示由(15)式的右边构成的列向量. 只要截断参数 K 选择得合适,那么 $\tilde{g}_K(x_0)$ 就是(15)式的一个稳定的近似解. 在本文的计算中, K 是由试错法确定的. 我们注意到,矩阵 A 的计算是与网格点 x_0 无关的,而且 $\tilde{g}_K(x_0)$ 的计算不需要预先知道关于障碍物的任何几何及物理的先验信息的. 因此,在求得矩阵 A 的奇异系后, $\tilde{g}_K(x_0)$ 的计算是非常简单和快速的.

3 数值实现

设 R 是一个使 $\{x : |x| < R\} \supset D$ 的常数,定义下面三类集合:

$$\Omega_1 = \{x = R\hat{x}(\theta, \phi) | \theta = \pi i/7, \phi = \pi j/4, i = 1 \dots 6, j = 1 \dots 8\}, \Delta_1 = \{y | y \in \Omega_1\} \quad (17)$$

$$\Omega_2 = \{x = R\hat{x}(\theta, \phi) | \theta = \pi i/12, \phi = \pi j/4, i = 1 \dots 6, j = 1 \dots 8\}, \Delta_2 = \{y | y \in \Omega_2\} \quad (18)$$

$$\Omega_3 = \{x = R\hat{x}(\theta, \phi) \cos\theta | \theta = \pi i/15, \phi = \pi j/4, i = 1 \dots 6, j = 1 \dots 8\}, \Delta_3 = \{y | y \in \Omega_3\} \quad (19)$$

其中 $\hat{x}(\theta, \phi) = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$.

在数值试验中,我们考虑如下三类数据: 1) 全球面分布数据, $\Omega = \Omega_1, \Delta = \Delta_1$; 2) 半球面分布数据, $\Omega = \Omega_2, \Delta = \Delta_2$; 3) 平面的某个区域分布数据, $\Omega = \Omega_3, \Delta = \Delta_3$. 我们注意到,在每一种情况下,入射点源场是从分布在入射范围 Δ 中的 48 个源点处照射障碍物的,而散射场的近场测量是在观测范围 Ω 中的 48 测量点处给出的.

反问题所需的数据是 $u^s(x; y_0) (x \in \Omega, y_0 \in \Delta)$, 它们是用最小平方方法通过求解正散射问题得到的^[6,7]. 在下面所有的计算中,我们取 $k = 1, \lambda = k, R = 15$. 对单个障碍物的重构, S 取为立方体 $[-3, 3]^3$ 的一个 $32 \times 32 \times 32$ 网格; 对多个障碍物的重构, S 取为立方体 $[-6, 6]^3$ 的一个 $32 \times 32 \times 32$ 网格. 在下面算例中,球的半径为 1.5, 其余障碍物的表达式参见文献[8,9].

现在,我们来更精确地描述上一节所述的一种简单快速算法的数值实现. 上一节的分析表明,当 x_0 在 ∂D 上时, $|\tilde{g}_K(x_0)|$ 是很大的. 数值计算中,我们进一步发现,当 $x_0 \in D^+$ 时, $|\tilde{g}_K(x_0)|$ 也是很大的,而当 $x_0 \in D$ 时, $|\tilde{g}_K(x_0)|$ 是比较小的. 我们记

$$|\hat{g}_K(x_0)| = \frac{\log |\tilde{g}_{\max}|}{\log |\tilde{g}_K(x_0)|}, \quad (20)$$

其中 $|\tilde{g}_{\max}| = \max_{x_0 \in S} |\tilde{g}_K(x_0)|$. 因此, $|\hat{g}_K(x_0)|$ 在 D 中的取值要比在 D^+ 中的取值更大. 这意味着使 $|\hat{g}_K(x_0)|$ 取局部极大的点几乎都位于 D 的内部. 因此,如果我们能够将 S 中那些使 $|\hat{g}_K(x_0)|$ 取局部极大的点都保留下来,那么它们就构成了障碍物 D 的一个理想的可视化. 这个过程是可以画出的 $|\hat{g}_K(x_0)|$ 的三维等值线图来实现的.

我们现在首先就一个不连通的声软障碍物,它由两个橡胶形体及两个波状椭球体组成(参见图 1(a))的重构为例,来说明这个过程,其中,所用的是全球面分布数据. 在图 1(b)中,画出了当等值线水平的最小

值 γ 取为 1.1 时, $|\hat{g}_k(x_0)|$ 的等值线图. 在这个图中, 不仅能清晰地看到组成 D 的每一个障碍物的个数、大致位置和边界轮廓, 但每个障碍物的精确形状还是模糊的. 为了得到更清晰的边界形状, 对这个等值线图作一个滤波, 即在这个等值线图中, 去掉那些使 $|\hat{g}_k(x_0)| < \gamma$ 的点, 其中, γ 可以根据图 1(b) 由试错法确定. 图 1(c) 给出了应用这个滤波技术后, 所得的重构. 结果表明, 应用这个滤波技术, 能得到障碍物 D 的一个非常合理清晰的可视化. 现在, 将这个可视化

过程概括为如下四步: 1) 对给定的近场数据 $u(x_0; y_0)$ 其中 $x \in \Omega, y_0 \in \Lambda$, 计算 A 的奇异系 $\{\sigma_n, u_n, v_n\} | n = 1, 2, \dots, N\}$; 2) 选择一个把 D 包含于其内的网格 S , 对 S 中的每一点 x_0 , 计算截断奇异值解 $\tilde{g}_k(x_0)$; 3) 由 (20) 式确定 $\hat{g}_k(x_0)$, 画出 $\hat{g}_k(x_0)$ 的三维等值线图; 4) 对这个等值线图作一个滤波, 保留那些使 $\hat{g}_k(x_0)$ 取局部极大的所有或几乎所有点 x_0 .

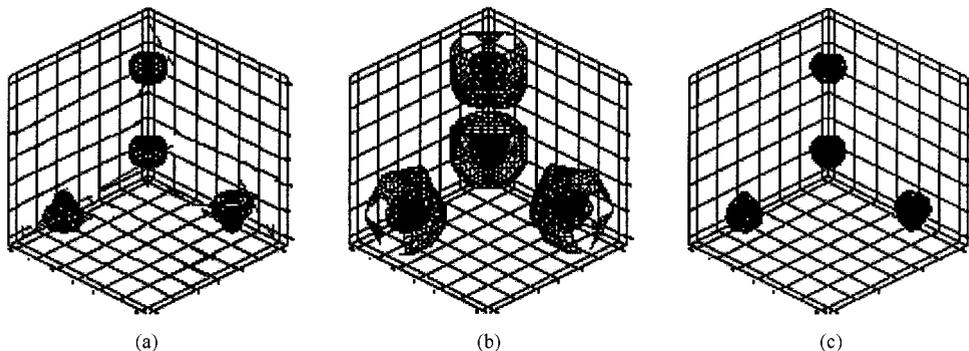


图 1 一个不连通障碍物的重构 (a) 原障碍物 (b) 当 $\gamma = 1.1$ 时, $|\hat{g}_k(x_0)|$ 的三维等值线图 (c) 当 $\gamma = 1.4$ 时, $|\hat{g}_k(x_0)|$ 的三维等值线图

现在进一步给出若干算例, 来考察上述可视化算法的某些性质. 首先给出单个障碍物的重构. 在这个算例中, 我们考察入射和观测点的范围对重构的影响. 结果如图 2 所示. 由图可知, 本算法对具有各种边界类型的障碍物均是适用的, 而且即使对较小的入射和观测范围, 获得一个合理的重构也是可能的. 不过, 随着入射和观测范围的减小, 重构精度也随着减小. 数值上, 我们发现, 当入射和观测范围减小时, 矩阵 A 的条件数迅速增大. 矩阵 A 的这种糟糕的条件数, 使截断奇异值解 $\hat{g}_k(x_0)$ 的求解精度减小, 从而导致可视化的精度减小.

最后, 给出多个障碍物的重构. 为了节省篇幅, 我们只给出基于全球面分布数据的重构. 图 3 示出了每个障碍物都具有相同边界类型的多个障碍物的重构结果, 图 4 给出了每个障碍物都具有不同边界类型的多个障碍物的重构结果. 在这些算例中, 我们再现了多个障碍物的个数、每个障碍物的位置及它们的合理的边界轮廓, 而且, 即使当每个障碍物都具有不同的边界类型, 本算法也是有效的.

4 结 论

本文就用声点源散射场的不完全近场信息来可视化多个三维障碍物形状的反问题, 提出了一种简单快速算法. 这个算法有如下几个特点: 1) 只需对包含障碍物的某个网格的每一个网格点, 求解一个线性代数方程组, 然后画出其解的模的三维等值线图, 即可有效地得到每个障碍物的个数、位置及它们的大致形状. 因此这个算法的数值实现是非常简单和快速的; 2) 在本算法的数值实现中, 不需要关于障碍物的任何几何 (如障碍物的个数等) 和物理 (即每个障碍物满足什么边界条件) 的先验信息, 而且即使在每个障碍物都满足不同的边界条件的情况下, 本算法也是有效的; 3) 在本算法中, 用来再现障碍物形状的信息是点声源激励下的散射场在有限个观测点处的近场信息, 它们既可以是全孔径近场数据也可以是有限孔径近场数据, 而且对较小的波数, 即使对较小的入射和观测范围, 也能得到障碍物的一个合理的可视化.

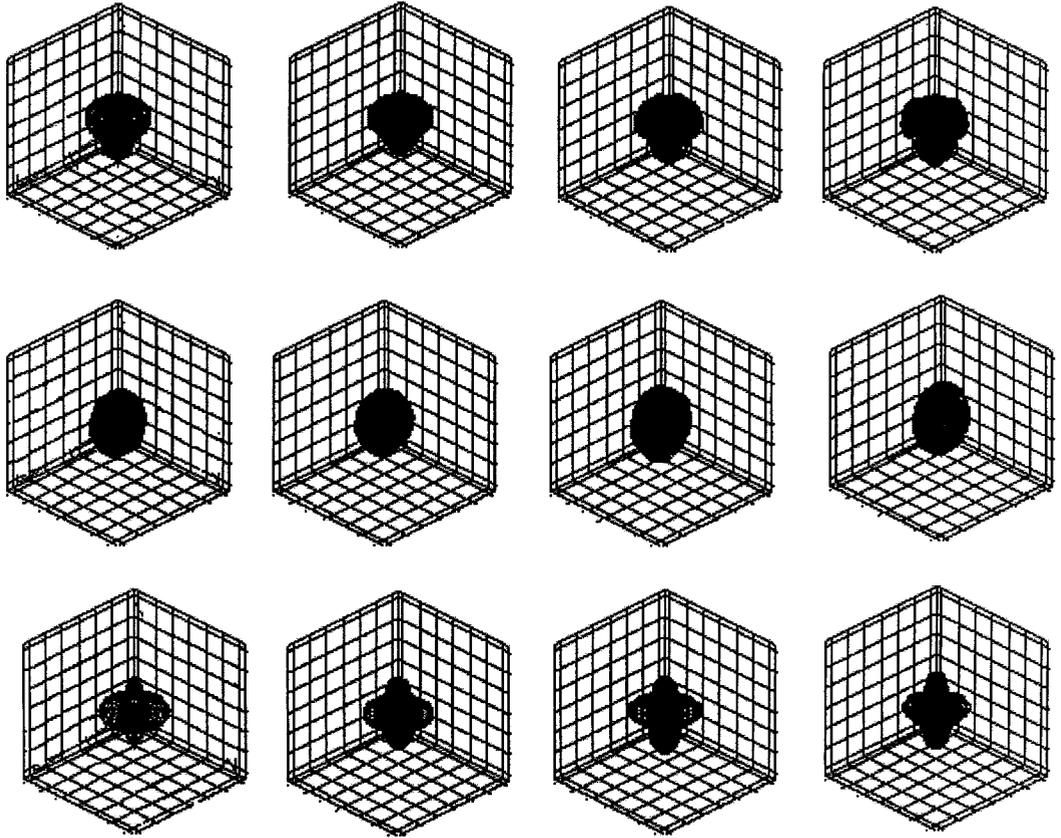


图 2 单个障碍物的重构 :第一列为原障碍物 ,第二至第四列依次为相应于全球面分布数据、半球面分布数据和平面的某个区域分布数据的重构 ,第一至第三行依次为声软、声刚性和声阻抗型障碍物

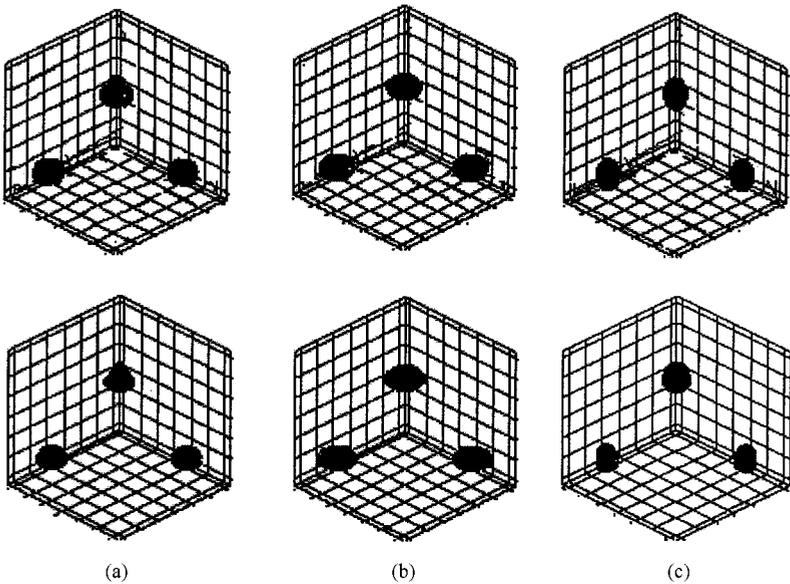


图 3 具有相同边界类型的多个障碍物的重构 :第一行是原障碍物 ,第二行是相应的重构 (a)三个声软障碍物 (b)三个声刚性障碍物 (c)三个声阻抗型障碍物

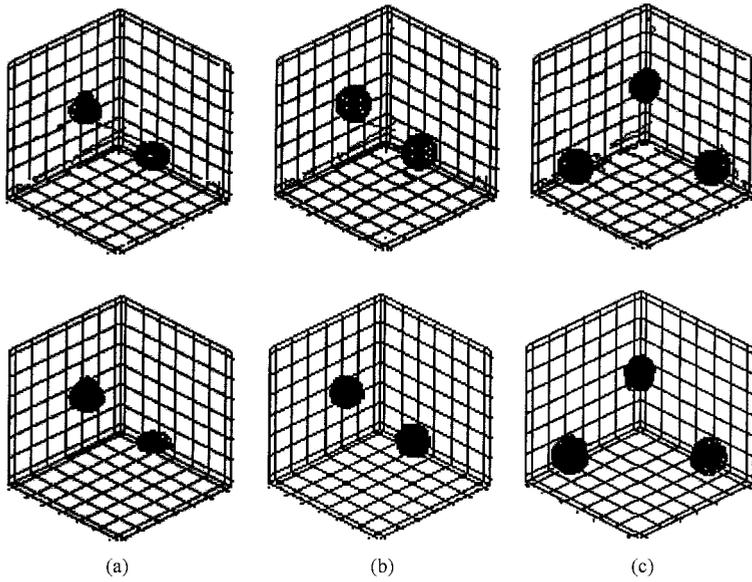


图 4 具有不同边界类型的多个障碍物的重构. 第一行是原障碍物, 第二行是相应的重构. (a) 一个声软橡皮形和一个声阻抗型扁平椭球体. (b) 一个声刚性球(左上) 和一个声阻抗型球体(右下). (c) 一个声软椭球体、一个声刚性球体(左下) 和一个声阻抗型球体(右下).

-
- [1] D. Colton, R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Theory* (Springer, Berlin, 1992).
- [2] D. Colton, A. Kirsch, *Inverse Problems*, **12** (1996), 383.
- [3] Y. X. You, G. P. Miao, Y. Z. Liu, *J. of Acoust. Soc. Am.*, **108**(1) (2000) 37.
- [4] G. Dassios, G. Kamvyssas, *IMA J. Appl. Math.*, **55** (1995) 67.
- [5] P. C. Hansen, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **11**(3) (1990) 503.
- [6] D. S. Jones, X. Q. Mao, *Inverse Problems*, **5** (1989) 731.
- [7] D. S. Jones, X. Q. Mao, *IMA J. Appl. Math.*, **44** (1990) 127.
- [8] D. Colton, P. Monk, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **8**(3) (1987) 278.
- [9] L. Misici, F. Zirilli, *SIAM J. Sci. Comput.*, **15**(3) (1994) 1174.

A FAST ALGORITHM FOR VISUALIZING MULTIPLE THREE -DIMENSIONAL OBJECTS USING NEAR-FIELD ACOUSTIC MEASUREMENTS*

YOU YUN-XIANG MIAO GUO-PING LIU YING-ZHONG

(*School of Naval Architecture and Ocean Engineering , Shanghai Jiaotong University ,Shanghai 200030 ,China*)

(Received 26 June 2000 ; revised manuscript received 17 November 2000)

ABSTRACT

A simple fast algorithm is proposed for visualizing multiple three-dimensional (3D) obstacles from the knowledge of the near-field measurements of the scattered field for point source field. The proposed algorithm is achieved by using the 3D contour plot of the solution of a linear system as a visualization of the scattering object. An attractive feature of this algorithm is that it avoids the use of the iteration technique and does not need any priori knowledge about the geometry and physical properties of scatterers. In addition ,the algorithm only requires the knowledge of the near-field measurements of the scattered field at a finite number of incident and observation points distributed over some limited area. Some numerical examples based on synthetic near-field data are given to show the practicality and efficiency of the inversion approach.

Keywords : acoustic scattering , inverse problem , shape identification

PACC : 4320 , 0340K , 0270

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19572044).