第 50 卷 第 6 期 2001 年 6 月
1000-3290/2001/50(06)/1163-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50,No.6,June,2001

脉冲信号作用下介观 *LC* 电路的量子效应*

嵇英华　雷敏生　谢芳森　熊小华

(江西师范大学物理系,南昌　330027)

(1999 年 11 月 8 日收到;2000 年 1 月 2 日收到修改稿)

讨论了介观 LC 电路在外加脉冲信号作用下量子态的变化,指出当脉冲信号宽度是某个最小量的整数倍时,系统的量子态保持不变;最小量的值和电路参数有关.

关键词:介观 LC 电路,脉冲信号,量子态

PACC:7335

1　引　　言

近年来,人们对介观电路的量子效应作了许多探索[1—4],主要讨论了无源介观电路中电荷和电流的量子效应[5—11];也讨论了介观电路的量子效应在一恒定直流信号作用下(包括绝热近似下时变电源的影响)系统的量子态,电荷和电流的期望值受电源的影响;恒定直流信号作用的结果只是量子体系的能级和本征态有一个小的修改,并没有多大实质性的变化[12].注意到,随着数字技术尤其是光孤子通信的发展,实际作用于介观电路系统的可能是具备一定宽度的脉冲信号,而脉冲信号对介观电路量子态的影响至今未见讨论.本文着重讨论在脉冲信号作用下,介观 LC 电路量子态的变化.结果表明:要保持系统的量子态不变,脉冲信号的宽度必须是某个最小量的整数倍,最小量的值和电路参数有关.

2　介观 LC 电路量子态的演化

脉冲信号作用下,介观 LC 电路的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{LC}q=\varepsilon U(0)-\varepsilon U(t-\tau),\tag{1}$$

$U(t)$是阶跃函数,ε 为脉冲信号的幅度,脉冲宽度为 τ,方程(1)相当于一个受迫谐振子的运动方程,q 为电荷和电荷共轭的量为广义电流 $p=L\dot{q}$,它们满足正则对易关系式:

$$[q,p]=\mathrm{i}\hbar.\tag{2}$$

在 $t=0^-$ 时,体系的哈密顿量 H_0 为

$$H_0=\frac{1}{2L}p^2+\frac{1}{2}L\omega^2q^2,\tag{3}$$

记 H_0 的本征函数为 $\Psi_n(q)$,并设 $t=0^-$ 时,介观 LC 电路处于基态:

$$\Psi_0(q)=\sqrt[4]{\frac{\alpha^2}{\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha^2q^2\right\},\tag{4}$$

其中 $\alpha^2=L\omega\hbar^{-1}$,$\omega^2=(LC)^{-1}$.在 $t=0^+$ 的时刻,幅度为 ε,宽度为 τ 的脉冲信号作用于介观 LC 电路,在脉冲信号作用期间,体系的哈密顿量 H 为

$$H=\frac{1}{2L}p^2+\frac{1}{2}L\omega^2q^2-q\varepsilon.\tag{5}$$

设相应 H 的本征函数为 $\Phi_n(q)$,则易得

$$\Phi_n(q)=D_q(q_0)\Psi_n(q)=\Psi_n(q-q_0),\tag{6}$$

其中平移算符 $D_q(q_0)=\exp\left(-q_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\right)$,$q_0=\frac{\varepsilon}{L\omega^2}$.引入消灭算符和产生算符 a,a^+:

$$a=\sqrt{\frac{L\omega}{2\hbar}}\left(q+\frac{\mathrm{i}}{L\omega}p\right),\tag{7}$$

$$a^+=\sqrt{\frac{L\omega}{2\hbar}}\left(q-\frac{\mathrm{i}}{L\omega}p\right).\tag{8}$$

对于 H_0 和 H 的本征态 $\Psi_n(q)$和 $\Phi_n(q)$分别有

$$(a^+)^n\Psi_0(q)=\sqrt{n!}\Psi_n(q),\tag{9}$$

$$(a^+-\beta_0)^n\Phi_0(q)=\sqrt{n!}\Phi_n(q),\tag{10}$$

式中 $\beta_0=q_0\sqrt{\frac{L\omega}{2\hbar}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha q_0$.为了求得脉冲信号作用后体系的量子态,首先就必须知道脉冲信号作用完的瞬间,体系处在何种量子态,因此,需解如下的薛

* 江西省自然科学基金(批准号:001004)资助的课题.

定谔方程：

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(q,t)=H\Psi(q,t),\tag{11}$$

$$\Psi(\mathrm{q},0)=\Psi_0(q).\tag{12}$$

将 $\Psi(q,t)$ 按 H 的本征矢 $\Phi_n(q)$ 展开，方程的解为

$$\Psi(q,t)=\sum C_n\Phi_n(q)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_nt}{\hbar}\right),\tag{13}$$

式中

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega-\frac{1}{2}L\omega^2q_0^2,$$

$$C_n=\langle\Phi_n(q)\mid\Psi_0(q)\rangle.$$

为了求出 C_n，我们将初态 $\Psi_0(q)$ 按 H 的本征矢 $\Phi_n(q)$ 展开，不难得到

$$\Psi_0(q)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta_0^2}\sum_n\frac{(-\beta_0)^n}{\sqrt{n!}}\Phi_n(q).\tag{14}$$

说明 $\Psi_0(q)$ 是以 $\Phi_n(q)$ 为基矢组成的相干态波函数. 因而可以得到 $C_n=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta_0^2}[(-\beta_0)^n/\sqrt{n!}]$，将 C_n 代入(13)式整理后可以表示成

$$\Psi(q,t)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta_0^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta(t)}\sum_n\frac{[-\beta(t)]^n}{\sqrt{n!}}\Phi_n(q),\tag{15}$$

式中

$$\delta(t)=\frac{1}{2\hbar}L\omega^2q_0^2t-\frac{1}{2}\omega t,$$

$$\beta(t)=\beta_0\exp(-\mathrm{i}\omega t).$$

当 $t=\tau$ 时可得

$$\delta(\tau)=\frac{1}{2\hbar}L\omega^2q_0^2\tau-\frac{1}{2}\omega\tau,$$

$$\beta(\tau)=\beta_0\exp(-\mathrm{i}\omega\tau),$$

即得脉冲信号作用完后的瞬间，体系所处的量子态 $\Psi(q,\tau)$ 为

$$\Psi(q,\tau)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta_0^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta(\tau)}\sum_n\frac{[-\beta(\tau)]^n}{\sqrt{n!}}\Phi_n(q).\tag{16}$$

$\Psi(q,\tau)$ 同样是以 $\Phi_n(q)$ 为基矢组成的相干态波函数. 另外，利用(7)，(8)式的反变换和(9)，(10)式，$\Psi(q,\tau)$ 还可以表示成以 H_0 的本征函数 $\Psi_n(q)$ 为基矢的叠加：

$$\begin{aligned}D_q(-q_0)&=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}q_0p}=\mathrm{e}^{-\beta_0(a^+-a)}\\&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta_0^2}\mathrm{e}^{-\beta_0(a^+-\beta_0)}\mathrm{e}^{\beta_0(a-\beta_0)},\\\Psi_0(q)&=D_q(-q_0)\Phi_0(q)\\&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta_0^2}\mathrm{e}^{-\beta_0(a^+-\beta_0)}\mathrm{e}^{\beta_0(a-\beta_0)}\Phi_0(q),\end{aligned}$$

可得

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta_0^2}\Phi_0(q)=\mathrm{e}^{\beta_0(a^+-\beta_0)}\Psi_0(q),$$

因此 $\Psi(q,\tau)$ 还可以表示成

$$\begin{aligned}\Psi(q,\tau)&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta_0^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta(\tau)}\mathrm{e}^{-\beta(\tau)(a^+-\beta_0)}\Phi_0(q)\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta(\tau)}\mathrm{e}^{\beta_0[\beta(\tau)-\beta_0]}\sum_n\frac{[\beta_0-\beta(\tau)]^n}{\sqrt{n!}}\Psi_n(q).\end{aligned}\tag{17}$$

下面我们计算在脉冲信号作用完后，下一个脉冲到来之前体系所处的量子态. 记 $t'=t-\tau$，脉冲信号作用后，体系哈密顿为

$$H_0=\frac{1}{2L}p^2+\frac{1}{2}L\omega^2q^2.$$

相应的薛定谔方程为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(q,t')=H_0\Psi(q,t'),\tag{18}$$

$$\Psi(q,t'=0)=\Psi(q,\tau).\tag{19}$$

将 $\Psi(q,t')$ 按 H_0 的本征函数 $\Psi_n(q)$ 展开，同时利用(9)，(10)式，运算后可得薛定谔方程的解为

$$\Psi(q,t')=\sum_nC_n'\Psi_n(q)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_n^0(t-\tau)\right],\tag{20}$$

式中 $E_n^0=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$，$C_n'=\langle\Psi_n(q)\mid\Psi(q,\tau)\rangle$，将(17)式代入可得

$$C_n'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta(\tau)}\mathrm{e}^{\beta_0[\beta(\tau)-\beta_0]}\frac{[\beta_0-\beta(\tau)]^n}{\sqrt{n!}}.\tag{21}$$

(20)式表示介观 LC 电路经过幅度为 ε，宽度为 τ 的脉冲信号作用后，由初态 $\Psi_0(q)$ 演化到量子态 $\Psi(q,t')$，它是 H_0 的能量本征态函数 $\Psi_n(q)$ 的叠加.

3 跃迁概率

由于 $\Psi(q,t')$ 不是本征态，而是本征态函数 $\Psi_n(q)$ 的叠加，因而实际上有许多末态. 将 $\delta(\tau)$ 和 $\beta(\tau)$ 代入(21)式可得介观 LC 电路处于某个能量本征态 $\Psi_n(q)$ 的概率：

$$|C_n'|^2=\frac{1}{n!}\left(2\beta_0\sin\frac{\omega\tau}{2}\right)^{2n}\exp\left\{-\left(2\beta_0\sin\frac{\omega\tau}{2}\right)^2\right\}.\tag{22}$$

实际上 $|C_n'|^2$ 给出了在脉冲信号作用后($t>\tau$)从初态到末态的跃迁概率，显然跃迁概率是脉冲信号宽度 τ 的函数. 假设介观 LC 电路在脉冲信号作用后处于能量本征态 $\Psi_n(q)$，则必须满足 $|C_n'|^2=1$，因

此由(22)式得

$$n\,!\exp\left\{\left(2\beta_0\sin\frac{\omega\tau}{2}\right)^2\right\}=\left(2\beta_0\sin\frac{\omega\tau}{2}\right)^{2n}. \quad (23)$$

上式给出了在脉冲信号作用后,体系处于某个能量本征态 $\Psi_n(q)$时,脉冲信号宽度 τ 和量子数 n 及电路参数满足的关系.然而方程(23)仅当 $n=0$ 时才有唯一的解,表明体系此时处于能量的基态$\Psi_0(q)$;而 $\Psi_0(q)$是体系的初态,这时介观 LC 电路实际上是保持初态$\Psi_0(q)$不变 ;而且由(23)式可知此时脉冲信号宽度的取值只能为

$$\tau=k\frac{1}{f_0},k=1,2,3,\cdots, \quad (24)$$

其中 $f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$,为电路的经典共振频率 ;此时,激发态出现的概率为零,体系维持初态不变.

4 讨 论

(24)式表明在脉冲信号作用后为了保持系统的量子态不变,外加脉冲信号宽度只能取某些分立值.若脉冲信号宽度 τ 的取值不满足(24)式,则在脉冲信号作用后,下一次脉冲到来之前系统处于 $\Psi(q,t')$,由于 $\Psi(q,t')$不是本征态,因而 $\Psi(q,t')$是本征态 $\Psi_n(q)$的叠加,实际上有许多末态.此时(22)式表明在脉冲信号作用后,介观电路体系由初态$\Psi_0(q)$将以不同的概率跃迁到某一激发态 $\Psi_n(q)$,由于此时系统的量子态难于确定,使得在随后的脉冲信号作用下,系统的量子态呈现复杂的演变,伴随着复杂的电子跃迁会发射出多种频率的谱线 ;另外,由于体系可能处于某一激发态,在下一脉冲到来之前,由激发态 $\Psi_n(q)$将可能跃迁回初态 $\Psi_0(q)$.以上两种情况,都伴随着一定的光谱发射,而这些谱线对于我们要传输的信号来说,均是一种噪声谱.因而我们认为在通信技术中,为了有效地传输信号,提高信噪比应该保持体系的量子态不变,也就是说当电路参数确定后,通过它的脉冲信号宽度是有限制的.

由(22)式还可知,通过控制脉冲信号宽度和电路参数,可以控制量子态出现的概率,例如当

$$\tau=\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{f_0},k=0,1,2,3,\cdots$$

基态出现的概率最小.

在脉冲信号作用下,要保持系统的量子态不变,脉冲信号的宽度必须是某个最小量的整数倍,最小量的值和电路参数有关,这有利于在通信技术中提高信噪比,有效地传输信号.陈斌等人在考虑了介观 LC 电路中电荷的量子效应及库仑阻塞的影响后,得出外加电压源幅度必须是量子化的[13].结合本文的讨论,在考虑了介观 LC 电路中电荷的量子效应及库仑阻塞的影响后,脉冲信号的幅度和宽度以及体系的初始状态对介观 LC 电路的量子态和观测量的量子涨落的影响是我们进一步要探讨的问题.

[1] W. H. Louisell, Quantum Statistical Properies of Radiation (John Wilcy, New York, 1973).
[2] Bin Chen *et al.*, *Phys. Lett.*, **A205**(1)(1995), 121.
[3] You-quan Li *et al.*, *Phys. Rev.*, **B53**(7)(1996), 4027.
[4] Bin Chen *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **44**(1995), 1480 (in Chinese) [陈斌、高守恩、焦正宽,物理学报,**44**(1995),1480].
[5] Ji-suo Wang, Chang-yong Sun, *Acta Physica Sinica*, **46**(1997), 2007 (in Chinese) [王继锁、孙长勇,物理学报,**46**(1997),2007].
[6] Ji-suo Wang, Bao-cun Han, Chang-yong Sun, *Acta Physica Sinica*, **47**(1998), 1187 (in Chinese) [王继锁、韩保存、孙长勇,物理学报,**47**(1998),1187].
[7] Zhao-xian Yu *et al.*, *Acta Physica Sinica* (Overseas Edition), **6** (1997), 522.
[8] You-quan Li, Bin Chen, *Commun. Theor. Phys.*, **29**(1998), 139.
[9] Guo-an Yu, Zhao-xian Yu *et al.*, *Commun. Theor. Phys.*, **30** (1998), 297.
[10] Bin Chen *et al.*, *Chinese Science Bulletin*, **41**(1996), 1170 (in Chinese) [陈斌等,科学通报,**41**(1996),1170].
[11] Bin Chen *et al.*, *Chinese Science Bulletin*, **41**(1996), 1275 (in Chinese) [陈斌等,科学通报,**41**(1996),1275].
[12] Zhi-ming Zhang, Lin-sheng He, Shi-kang Zhou, *Chinese Journal of Quantum Electronics*, **15**(1998), 348 [张智明、何林生、周士康,量子电子学报,**15**(1998),348].
[13] Bin Chen *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **46**(1997), 129 (in Chinese) [陈斌等,物理学报,**46**(1997),129].

QUANTUM EFFECT OF THE MESOSCOPIC *LC* CIRCUIT WITH PULSE-CODE*

JI YING-HUA LEI MIN-SHENG XIE FANG-SEN XIONG XIAO-HUA

(*Department of Physics*, *Jiangxi Normal University*, *Nanchang* 330027, *China*)

(Received 8 November 1999; revised manuscript received 2 January 2000)

ABSTRACT

In this paper, we discussed the variation of the quantum state when there is pulse put into the mesoscopic *LC* circuit, and arrived at the coclusion that the quantum state of the system is stable when the width of the pulse is equal to the integral times of the minimum fixed value, and that the minimum value is related to the circuit parameters.

Keywords: mesoscopic *LC* circuit, pulse signal, quantum state

PACC: 7335

* Project supported by the Natural Science Foundation of Jiangxi Province, China (Grant No. 001004).