第 50 卷 第 7 期 2001 年 7 月
1000-3290/2001/50(07)/1213-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.50, No.7, July, 2001

扭结孤子牛顿动力学行为的奇异摄动理论*

冯培成[1)2)] 唐 翌[1)]

1)(湘潭大学物理系,湘潭 411105)

2)(零陵师范高等专科学校物理系,永州 425006)

(2001 年 3 月 21 日收到;2001 年 4 月 23 日收到修改稿)

利用奇异摄动展开,发展了一种研究 sine-Gordon 扭结孤子动力学行为的理论,得到了在恒定外力作用下 sine-Gordon 扭结孤子类似于经典粒子,其运动遵守牛顿运动定律.同时,还得到了它在传播过程中所辐射的色散波的一个形式简单的解析表达式.

关键词:扭结孤子,奇异摄动展开,动力学行为

PACC:0340

1 引 言

Sine-Gordon 方程是一个非常重要的非线性演化方程,由于它在众多的物理模型中出现,并且具有十分丰富的数学性质,数十年来,它一直倍受数学和物理学研究者的关注[1,2].我们知道,sine-Gordon 方程在物理上的应用主要是其扭结孤子(kink)解,例如:长约瑟夫逊结动力学理论中的磁通量子[3].这种扭结孤子在物理模型中所表现出的粒子性,及其动力学行为的研究在基础理论和实际应用两方面都具有十分重要的意义,至今仍吸引着无数研究者的兴趣.Sine-Gordon 方程属于可积系统中的孤子方程,我们通常可利用逆散射变换来构造其孤子解.不过,我们注意到它的逆散射变换理论实际上是就所谓的'光锥'坐标系中的 sine-Gordon 方程给出的[4].这种形式的 sine-Gordon 方程为

$$u_{\tau\chi} + \sin u = 0, \tag{1}$$

而在许多物理模型中出现的、实验室坐标系中的 sine-Gordon 方程的形式通常为

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0. \tag{2}$$

尽管方程(1)和(2)可以通过坐标变换 $x = (\tau + \chi)/2$, $t = (\tau - \chi)/2$而等价,但是当我们研究其扭结孤子的动力学行为时,也即研究系统中其他次要的物理因素对扭结孤子传播的影响时,方程(1)和(2)的初始值问题无法通过上述坐标变换而等价.因此,研究方程(1)的微扰问题时,可以在逆散射变换理论的框架内进行;而研究方程(2)的微扰问题时,通常在'直接法'理论的框架内进行[5].

Sine-Gordon 方程的'直接法'理论是基于线性摄动理论中的正则展开,同时采用'准静态近似'来构造的.Fogel 等人[5,6]利用这种理论得出 sine-Gordon 扭结孤子的动力学行为在很多方面类似于经典的牛顿粒子的结论.而 Reinisch 和 Fernandez[7,8]利用同样的理论研究恒定外力作用下扭结孤子的动力学行为时却未得到相同的结果.当时,由此而引发了一场激烈的学术讨论,许多知名学者都纷纷撰文发表他们的观点[9—13].最后,逆散射变换理论的奠基人之一 Kaup 指出:第一,如果适当地定义扭结孤子的中心位置;第二,有效地避免微扰展开中的长期项,那么,扭结孤子的中心位置的运动满足点粒子的牛顿运动方程.这种观点成为这场学术讨论的最后结论.众所周知,当正则展开的微扰解中存在长期项时,正则展开是失效的.因为一级近似的数学解将随时间无限增大.而对于非线性方程,采用正则展开几乎都会遇到这样一个问题.McLaughlin 和 Scott[14]显然注意到了这一点,他们提出了一种准'直接法'理论,在这种理论中,用于消除长期项的新自由度通过多重时间尺度展开而被引进.不过,他们遇到了一个十分复杂的偏微分算子,展开基矢是利用逆散射变换理论中

* 国家自然科学基金(批准号:10005007)及湖南省自然科学基金(批准号:OOJJY2007)资助的课题.

的 Jost 函数来构造的,这使得这种理论显得十分复杂难懂.值得指出的是:他们认为长期项条件是非齐次源项(source term)和展开空间中的离散态(discrete state)正交的结果,而这种假定并没有经过严格的证明.我们认为长期项应该体现在解中,并由多重时间尺度所提供的额外的自由度自然地消除掉.

Fogel 等人认为微扰对慢速 sine-Gordon 扭结孤子的动力学行为的影响较为显著,我们的研究结果与这种观点一致.本文将研究慢速 sine-Gordon 扭结孤子在恒定外力作用下的动力学行为.考虑到 Fogel 等人的'直接法'理论中采用的正则展开将无法合理地处理一级近似解中的长期项,我们引进了多重时间尺度;假定孤子参数为时间慢变量的函数,以扭结孤子为基态,对 sine-Gordon 方程的微扰解作渐近展开.利用广义傅里叶展开法求解线性化的一级近似偏微分方程,由长期项条件直接给出了扭结孤子的动力学方程,并得到了一个简单的色散波形式的一级修正解的解析表达式.

2 扭结孤子的动力学理论

我们通常将微扰存在时的 sine-Gordon 方程写为

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon P(u). \tag{3}$$

这里将研究的问题是如下形式的初始波形在方程(3)所描述的系统中传播:

$$u(x,0) = 4\mathrm{arc\ tan\ e}^{\mu(x-x_0)}. \tag{4}$$

我们知道,如果系统是理想的,即 $P(u)=0$,初始波形(4)式将在系统中稳定地传播;并由 $u(x,t) = 4\mathrm{arc\ tan\ e}^{\mu(x-\nu t-x_0)}$ 来描述.但是,如果我们用它作为基态来展开方程(3)的解,将得到一个含长期项的解,并且将无法消除长期项.因此,我们将对方程(3)引入多重尺度展开.首先,引进一系列时间慢变量 $t_0 = t, t_1 = \varepsilon t, t_2 = \varepsilon^2 t, \cdots$ 本文实际上只考虑到了 ε 的一次方项.根据求导的链规则,对时间的求导将被展开为[15]

$$\partial_t = \partial_{t_0} + \varepsilon \partial_{t_1} + \cdots \tag{5}$$

其次,将方程(3)的解展开为

$$u = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \cdots \tag{6}$$

由于微扰的影响,作为基态的扭结孤子的形状和速度在传播过程中将缓慢地变化,因此,通常假设

$$u^{(0)}(x,t) = 4\mathrm{arc\ tan\ e}^{\mu(x-\chi)}, \tag{7}$$

式中扭结孤子参数 μ 为时间慢变量 t_1 的函数,而 χ 则为时间快变量 t_0 和慢变量 t_1 的函数.

将方程(6)代入方程(3),同时考虑到对时间的求导的展开式(5),得到零级和一级近似方程分别为

$$u^{(0)}_{t_0t_0} - u^{(0)}_{xx} + \sin u^{(0)} = 0, \tag{8}$$

$$u^{(1)}_{t_0t_0} - u^{(1)}_{xx} + (\cos u^{(0)})u^{(1)} = P[u^{(0)}] - 2u^{(0)}_{t_0t_1}. \tag{9}$$

方程(8)即为未微扰的 sine-Gordon 方程.将方程(7)代入方程(8),也就是将形状缓变的扭结孤子解代入 sine-Gordon 方程,可得

$$\mu = (1-\nu^2)^{-1/2}. \tag{10}$$

这里定义

$$\chi_{t_0} = \nu. \tag{11}$$

现在通过坐标变换将方程(9)的求解变换到与扭结孤子一起运动的坐标系中进行,也就是以 $z = \mu(t_1)[x - \chi(t_0, t_1)]$ 取代 x 作为新的空间变量.不难导出,两种坐标系之间存在以下的变换关系:

$$\frac{\partial}{\partial t_0} = \frac{\partial}{\partial t_0} - \mu\nu\frac{\partial}{\partial z}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial z}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\mu_{t_1}}{\mu}z\frac{\partial}{\partial z} - \mu\chi_{t_1}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{14}$$

考虑 ν 较小的情况,由方程(12)和(14)可得

$$\frac{\partial^2}{\partial t_0\partial t_1} = \frac{\partial^2}{\partial t_0\partial t_1} - \mu\nu_{t_1}\frac{\partial}{\partial z} - \mu\chi_{t_1}\frac{\partial^2}{\partial t_0\partial z}. \tag{15}$$

在新坐标系中,方程(6)的表达式为 $u(t_0, z, t_1) = u^{(0)}(z) + \varepsilon u^{(1)}(t_0, z, t_1) + \cdots$ 将方程(12),(13)和(15)代入方程(9),可得

$$\frac{\partial^2}{\partial t_0^2}u^{(1)} - \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (2\mathrm{sech}^2 z - 1)\right]u^{(1)} = P + 2\mu\nu_{t_1}\mathrm{sech} z. \tag{16}$$

方程(16)可以利用通常的本征展开法求解.因此,首先要考虑如下的自共轭本征值问题:

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + (2\mathrm{sech}^2 z - 1)\right]\phi = \lambda\phi, \tag{17}$$

这个本征值问题的本征函数系由一个连续谱和一个点谱构成,它们的解析表达式为[16]

$$\phi(z,k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(k^2+1)}}(\tanh z - \mathrm{i}k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz},$$
$$\lambda = -(k^2+1), \quad -\infty < k < +\infty, \tag{18}$$

$$\phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{sech}\ z, \quad \lambda = 0, \tag{19}$$

式中 $\phi_0(z)$ 通常称为传导模(translation mode)或零模(zero mode)[1].现在将方程(16)的解 $u^{(1)}$ 和微扰项 P

用这组本征函数系作广义傅里叶展开为

$$u^{(1)}(t_0,z,t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\big(\beta(t_0,k,t_1)\phi(z,k) + \beta_0(t_0,t_1)\phi_0(z)\big), \tag{20}$$

$$P(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\big(\alpha(k)\phi(z,k) + \alpha_0\phi_0(z)\big). \tag{21}$$

将展开式(20)和(21)代入方程(16)，利用本征函数系之间的正交关系，可得

$$\beta_{t_0t_0} + (k^2+1)\beta = \alpha, \tag{22}$$

$$\beta_{0t_0t_0} = \alpha_0 + 2\sqrt{2}\mu\nu_{t_1}. \tag{23}$$

由方程(22)和(23)不难解出

$$\beta = \frac{1}{(k^2+1)}\left(1-\cos\sqrt{k^2+1}\,t_0\right)\alpha = \frac{1}{(k^2+1)}\left(1-\cos\sqrt{k^2+1}\,t_0\right)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}kP(z)\phi^*(z,k), \tag{24}$$

$$\beta_0 = (\alpha_0 + 2\sqrt{2}\mu\nu_{t_1})t_0^2 + c_1t_0 + c_2, \tag{25}$$

式中 $\phi^*(z,k)$为 $\phi(z,k)$的复共轭，c_1，c_2 为积分常数. 由初始条件可确定 $c_1 = c_2 = 0$，因此，$\beta_0 = (\alpha_0 + 2\sqrt{2}\mu\nu_{t_1})t_0^2$. 显然此项将随时间趋向于无穷大，在奇异摄动理论中这种项称为长期项[15]. 消除这种项，可令$(\alpha_0 + 2\sqrt{2}\mu\nu_{t_1}) = 0$，从而 $\beta_0 = 0$. 所以

$$\nu_{t_1} = -\frac{\sqrt{2}}{4\mu}\alpha_0 = -\frac{\sqrt{2}}{4\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}P(z)\phi_0(z)\mathrm{d}z = -\frac{1}{4\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}P(z)\,\mathrm{sech}z\,\mathrm{d}z, \tag{26}$$

$$u^{(1)}(t_0,z,t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k}{(k^2+1)}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z'\left(1-\cos\sqrt{k^2+1}\,t_0\right)\cdot P(z')\phi(z,k)\phi^*(z',k). \tag{27}$$

3 恒定外力作用下扭结孤子的动力学行为

扭结孤子受恒定外力的作用对应的物理模型为在长约瑟夫逊结中它受到直流激励电流的影响，或力学扭结孤子受到一个恒定外力矩的影响等. 该问题也是前述许多研究所特别关注的. 在这种情况下，$P(z) = \sigma$，σ 为常数. 由方程(26)可得

$$\nu_{t_1} = -\frac{1}{4\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma\,\mathrm{sech}z\,\mathrm{d}z = -\frac{\pi\sigma}{4\mu}. \tag{28}$$

当 ν 很小时，$\mu\approx 1$ 同时，$\nu|_{t=0} = 0$，方程(28)积分后可得 $\nu = -\varepsilon\pi\sigma t/4$. 因此，在某种意义上，扭结孤子的运动的确可以被看作是一个质量 $m = 4/\pi$ 的经典粒子. 和经典粒子不同的是扭结孤子在运动中同时向外辐射色散波，该色散波由方程(27)给出，对 z' 积分后可得

$$u^{(1)}(t_0,z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{i}\sigma\mathrm{d}k}{2\pi(k^2+1)^2}\left[k\delta(k) - \frac{\pi}{\sinh(\pi k/2)}\right]\cdot\left(1-\cos\sqrt{k^2+1}\,t_0\right)(\tanh z - \mathrm{i}k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}. \tag{29}$$

4 结果与讨论

Fogel 等人提出的 sine-Gordon 方程‘直接法’理论实际上是一种线性摄动理论，原则上它是不适合于非线性问题的. 但是由于他们单独考虑了传导模的贡献，理论上普遍认为传导模的贡献恰好抵消了一级近似解中的长期项，所以他们最终关于扭结孤子的运动方程是正确的. 从文献[9]的理论中还可以看到，Kaup 在求解一级近似方程之前就假设传导模与微扰和加速度贡献项之和正交，从而避免长期项的出现 然后，再计算色散波. 我们认为这种方法从数学的角度来看是不够严谨和规范的. 本文开始就考虑到了非线性问题一级近似解中潜在的长期项，通过引进多重时间尺度展开研究了 sine-Gordon 方程扭结孤子的动力学行为. 在我们的解中，求得了长期项的具体形式 利用预先引入的新自由度消除掉长期项，得到了在恒定外力作用下扭结孤子相当于一个质量为 $m = 4/\pi$ 的经典粒子，其运动遵守牛顿运动定律，而加速度为 $a = \varepsilon\pi\sigma/4$ 的结论. 虽然这与 Fogel 等人的结果相同，但是我们这种理论与 Fogel 等人的理论本质上是不同的. 与 Kaup 的理论比较不难看出，我们是在一个相同的展开空间中进行的，但是，在我们的理论中长期项被自然、合理地消除. 此外，本文严格导出了扭结孤子在运动中所辐射的色散波的解析表示式.

[1] A. R. Bishop, J. A. Krumhansl, S. E. Trullinger, *Physica*, **D1** (1980), 1.

[2] Yu. S. Kivshar, B. A. Malomed, *Rev. Mod. Phys.*, **61** (1989), 763.

[3] A. V. Ustinov, *Physica*, **D123** (1998), 315.

[4] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *Phys. Rev. Lett.*, **30** (1973), 1262.

[5] M. B. Fogel, S. E. Trullinger, A. R. Bishop, J. A. Krumhansl, *Phys. Rev. Lett.*, **36** (1976), 1411.

[6] M. B. Fogel, S. E. Trullinger, A. R. Bishop, J. A. Krumhansl, *Phys. Rev.*, **B15** (1977), 1578.

[7] J. C. Fernandez, J. M. Gambaudo, S. Gauthier, G. Reinisch, *Phys. Rev. Lett.*, **46** (1981), 753.

[8] G. Reinisch, J. C. Fernandez, *Phys. Rev.*, **B24** (1981), 835.

[9] D. J. Kaup, *Phys. Rev.*, **B29** (1984), 1072.

[10] J. C. Fernandez, J. P. Leon, G. Reinisch, *Phys. Rev.*, **B29** (1984), 1075.

[11] P. C. Dash, *Phys. Rev. Lett.*, **51** (1983), 2155.

[12] O. H. Olsen, M. R. Samuelsen, *Phys. Rev. Lett.*, **48** (1982), 1569.

[13] D. J. Bergmann, E. Ben-Jacob, Y. Imry, K. Maki, *Phys. Rev.*, **A27** (1983), 3345.

[14] D. W. McLaughlin, A. C. Scott, *Phys. Rev.*, **A18** (1978), 1652.

[15] M. H. Holmes, Introduction to Perturbation Methods (Springer-Verlag, New York, Inc., 1995).

[16] R. J. Flesch, S. E. Trullinger, *J. Math. Phys.*, **28** (1987), 1619.

A SINGULAR PERTURBATION THEORY FOR THE STUDY OF NEWTONIAN DYNAMICAL BEHAVIOUR OF KINK*

FENG PEI-CHENG[1)2)] TANG YI[1)]

[1)] (*Department of Physics, Xiangtan University, Xiangtan* 411105, *China*)

[2)] (*Department of Physics, Lingling Teachers College, Yongzhou* 425006, *China*)

(Received 21 March 2001; revised manuscript received 23 April 2001)

ABSTRACT

By virtue of the singular perturbation expansion, we have developed a theory for the study of dynamical behaviours of the kink of sine-Gordon equation, and acquired that the kink of sine-Gordon equation behaves very much like a classical particle under the action of a constant external force, its motion satisfies the Newton's law. Still, we have derived a simple analytical expression for the dispersive wave radiated by the kink in the process of propagation.

Keywords: kink, singular expansion, dynamical behaviour

PACC: 0340

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10005007), and the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant No. OOJJY2007).