第 50 卷 第 7 期 2001 年 7 月
1000-3290/2001/50(07)/1217-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50, No.7, July, 2001

单模费米热噪声信道量子容量的估计

陈小余
(中国计量学院物理室,杭州 310034;浙江大学信息与电子工程学系,杭州 310027)
(2000 年 11 月 3 日收到;2001 年 1 月 21 日收到修改稿)

从量子信道的算符求和表象出发,对单模费米系统量子信道进行了参数化.参数化的结果得到另一类费米热噪声量子信道.给出了两类费米热噪声量子信道上相干信息的最大值,以估计信道的量子容量.

关键词:量子容量,相干信息,费米热噪声信道
PACC:0365

1 引 言

近年来,量子信息论引起人们极大兴趣并取得了快速进展[1—3].正如 Shannon 的经典信息论一样,量子信息论的一个最基本问题是在限定的可利用资源条件下信息传输的效率问题.与经典情况不同,量子信息论中有两种效率,取决于所要传输的信息本身的性质.一方面可以用量子态传送常规的数字序列,即用量子手段传输经典信息;另一方面可以直接传送量子态,这个量子态对发送者而言是未知的,即用量子手段传输量子信息.信息传输的效率归结为给定信道中传输的比特率,经典信息论的信道编码定理确定了有噪信道中无失真传送信息的最大速率,亦即信道容量.对于量子态传输于其上的量子信道而言,对应于所传输的是经典信息或量子信息,其容量有经典容量和量子容量之分.量子信道的经典容量已被确定[4].并且一种很有意义的量子信道,量子高斯信道的经典容量得到了详细的研究[5].量子信道的量子容量仍然是一个富于挑战性的问题[6],其上限由某一相干信息的渐近式所确定[7].尽管相干信息在量子信息论中的地位与互信息在经典信息论中的相当[8],而互信息的最大值给出经典信息论中的容量,但相干信息的最大值虽曾一度被猜测为量子容量[9],但并非信道的量子容量[7],而只是它的一个估计.

量子信道本身并无奇特之处,比如光纤,基本上不影响传送于其上的量子系统的,就可以看作是量子信道.量子信道对于传送于其上的量子态的影响,使得该量子态演化为另一量子态.由于在量子信息论中描述量子态的是密度算符[1],量子信道把算符映射为算符故其自身可表达为超算符.文献[8]给出超算符所满足的三个等价的条件.本文利用超算符有归一化算符求和表示的条件,研究了单模费米系统量子信道的表示,并进一步给出了该信道的量子容量的一个估计.

2 量子信道的一般描述

设量子系统 Q 受到动力学演化,该演化可以是 Q 传输过有噪量子信道.一般地,Q 的演化可用超算符 ε^{Q} 来表示,它将初态(用密度算符 ρ 表示)映射到终态 $\rho^{Q'} = \varepsilon^{Q}(\rho^{Q})$,超算符的归一化算符求和表示使用了一组作用于 Q 的希尔伯特空间 H_Q 上的算符 A_μ,有[8]

$$\rho^{Q'} = \varepsilon^{Q}(\rho^{Q}) = \sum_{\mu} A_\mu \rho^{Q} A_\mu^{+}, \tag{1}$$

算符 A_μ 须满足归一化条件

$$\sum_{\mu} A_\mu^{+} A_\mu = 1^{Q}. \tag{2}$$

信道的量子容量的一个估计是相干信息对可能的初态取的最大值[8,9]

$$C_{es} = \max_{\rho^{Q}} I_e, \tag{3}$$

相干信息 I_e 是 Shannon 经典信息论中互信息的量子对应物.定义为终态的 von Neumann 的熵 $S(\rho^{Q'}) = -\mathrm{Tr}\rho^{Q'}\log\rho^{Q'}$ 与交换信息之差,即

$$I_e = S(\rho^{Q'}) - S_e, \tag{4}$$

而交换信息 S_e 是量子容量问题所特有的,量子信息传输过程保持量子相干性的能力由交换信息表征.这里需要引入一个"参考"量子系统 R,使得 RQ 联

合系统初时处于纯的纠缠态 $|\psi^{RQ}\rangle$,信道对联合系统纯纠缠态的演化作用是

$$\rho^{RQ'} = I^R \otimes \varepsilon^Q(\rho^{RQ}) , \tag{5}$$

其中 I^R 是恒等映射.交换信息 S_e 即是 RQ 联合系统终态 $\rho^{RQ'}$ 的 von Neumann 熵[8].

3 费米系统量子信道的参数化

为了能够具体地表示费米热噪声量子信道,将算符 A_μ 用费米位移算符 $D(\nu) = \exp(\nu a^+ - \nu^* a)$ 展开,其中 a^+, a 分别是费米子的产生算符和湮没算符,$\nu = \frac{\theta}{2}\exp(i\varphi)$,$\theta \in [0,\pi]$,$\varphi \in [0,2\pi)$.在占有数表象中,费米位移算符表示为

$$D(\nu) = D(\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

算符 A_μ 展开为

$$A_\mu = \int A_\mu(\theta,\varphi) D(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi , \tag{7}$$

其中展开系数 $A_\mu(\theta,\varphi)$ 是 c 数函数,不再包含算符.令

$$P_1(\theta,\varphi,\theta',\varphi') = \sum_\mu A_\mu(\theta,\varphi)A_\mu^*(\theta',\varphi') , \tag{8}$$

对于我们所考虑的费米热噪声量子信道情况,用对角化的 P_1 即已足够.此时,(1)式可写为

$$\rho^{Q'} = \int P(\theta,\varphi)D(\theta,\varphi)\rho^Q D^+(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi , \tag{9}$$

其中 P 是所用的对角化的 P_1 的积分.(2) 式变成 P 的归一化条件,用概率测度可写为

$$\int P(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi = \int P(d\nu) = 1 . \tag{10}$$

在经典信息论中,对于没有信号处理环节的最基本的信道,信道的加性噪声是信道的输出与输入之差值,在无输入的情况下,输出端得到的信号即为信道噪声.对于量子情形,无信号输入即真空态输入,在占有数表象中这种输入可表示为 $\rho^Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.由(9) 式得到量子信道噪声的密度算符在占有数表象中的表示为

$$\rho_n = \begin{bmatrix} \bar{N} & W^* \\ W & N \end{bmatrix} , \tag{11}$$

其中 $N = \frac{1}{2}\left(1 - \int\cos\theta P(d\nu)\right)$ 是量子噪声信道的平均费米子数,$\bar{N} = 1 - N$($\bar{x} = 1 - x$ 的记号下文还采用,不另说明),$W = \frac{1}{2}\int\sin\theta e^{i\varphi}P(d\nu)$.本文将限定在 $W = 0$,即所称的费米热噪声量子信道情况.从而噪声的密度算符在占有数表象中是对角的.

设输入是最一般的量子态 ρ^Q,在占有数表象中表为 $\begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \beta^* \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$,其本征值是 λ_0, λ_1,相应本征态是 $|\lambda_0^Q\rangle$,$|\lambda_1^Q\rangle$,则 ρ^Q 的纠缠纯态 $|\Psi^{RQ}\rangle$ 由 Schmidt 分解得到为[8]

$$|\Psi^{RQ}\rangle = \sum_{k=0,1}\sqrt{\lambda_k}\,|\xi_k^R\rangle \otimes |\lambda_k^Q\rangle, \tag{12}$$

其中 $|\xi_k^R\rangle$ 是 R 系统希尔伯特空间中的正交态集.事实上满足

$$\rho^Q = \mathrm{Tr}_R|\Psi^{RQ}\rangle\langle\Psi^{RQ}| = \sum_{k=0,1}\langle k^R|\Psi^{RQ}\rangle\langle\Psi^{RQ}|k^R\rangle \tag{13}$$

的纠缠纯态有无穷多个,不同的纠缠纯态之间相差一个形式为 $U^R \otimes 1^Q$ 的幺正变换.因而可以选择占有数态 $|k^R\rangle$ 作为 $|\xi_k^R\rangle$ 而不影响所求的问题.令 $|\lambda_k^Q\rangle = U|k^Q\rangle$,则由(5) 式和(12) 式得到

$$\rho^{RQ'} = \sum_{k,k'=0,1}\sqrt{\lambda_k\lambda_{k'}}\,|k^R\rangle\langle k'^R| \otimes \int D(\nu)U \cdot |k^Q\rangle\langle k'^Q|U^+D^+(\nu)P(d\nu). \tag{14}$$

设 U 在占有数表象中表为 $U = D(\nu')$,$\nu' = \frac{\theta'}{2}\exp(i\varphi')$,且令 $\gamma = \sin^2\frac{\theta'}{2}$,$\delta = \frac{1}{2}\sin\theta' e^{i\varphi'}$,$\omega = \gamma e^{i2\varphi'}$,则在占有数表象中有

$$\rho^{RQ'} = \begin{bmatrix} \lambda_0\bar{b} & \lambda_0 c & -\lambda_2 d & \lambda_2 e \\ \lambda_0 c^* & \lambda_0 b & -\lambda_2 f & \lambda_2 d \\ -\lambda_2 d^* & -\lambda_2 f^* & \lambda_1 b & -\lambda_1 c \\ \lambda_2 e^* & \lambda_2 d^* & -\lambda_1 c^* & \lambda_1\bar{b} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

其中 $\lambda_2 = \sqrt{\lambda_0\lambda_1}$,$b = \bar{\gamma}N + \gamma\bar{N}$,$c = \bar{N}\delta^* - \delta p^*$,$d = \delta(\bar{N} - N)$,$e = \bar{N}\bar{\gamma} + \omega p^*$,$f = \bar{N}\omega + \bar{\gamma}p$ 和 $p = \int\sin^2\frac{\theta}{2}e^{i2\varphi}P(d\nu)$,且已经利用了条件 $W = 0$.

因而对费米热噪声量子信道而言,计算或估计信道容量时还将用到除 N 之外的另一参数 p.

4　信道的量子容量的估计值

对于费米热噪声量子信道,正像经典的高斯加性信道一样,在计算或估计信道容量时有输入平均功率受限的条件.也就是信道在一次使用中的输入平均总能量是受限的.在单模情况下,不失一般性,可设 $|0^Q\rangle$,$|1^Q\rangle$ 态的能量分别为 0 和 Δ(这里假定了 Q 系统的哈密顿量在占有数表象中是对角的),则输入态的平均能量为 $\mathrm{Tr}(\rho^Q H) = \alpha\Delta$,受限条件表为 $\alpha\Delta \leqslant E$,在估计信道容量时取上限,即 $\alpha\Delta = E$,输入态平均费米子数 $N_s = E/\Delta$,故 $\alpha = N_s$,且 $\alpha = \lambda_0\gamma + \lambda_1\bar{\gamma}$,$\beta = (\lambda_0 - \lambda_1)\delta$.反过来,$\lambda_k$,$\gamma$,$\delta$,$\omega$ 都可用 α,β 表示.由(9)式得到占有数表象中的终态

$$\rho^{Q'} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}\bar{N} + \alpha N & \beta^*\bar{N} - \beta p^* \\ \beta\bar{N} - \beta^* p & \bar{\alpha}N + \alpha\bar{N} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

因而在信道给定即 N,p 确定,且输入平均功率受限的情况下,信道容量的估计值用(3)式求最大值是对 α 确定情况下的 ρ^Q 求的,亦即只有 β 是自变量.

最简单的情况是 $p = 0$ 信道.直接将(15)式的本征方程化为多项式可知,此时只有 β 的模在计算相干信息时起作用,而其相因子不起作用.借助于数值计算得到相干信息随 $|\beta|$ 变化的特性:当 N 较小时,信道噪声小,相干信息从 $|\beta| = 0$ 处的正最大值开始随 $|\beta|$ 的增大下降到负值后又在 $|\beta|$ 右端点处回复到零.当 N 较大时,信道噪声大,相干信息在 $|\beta| = 0$ 处的负值开始随 $|\beta|$ 的增大上升或略降后上升到 $|\beta|$ 右端点的零值.$|\beta|$ 右端点满足 $|\beta|^2 \leqslant \alpha\bar{\alpha}$ 中的等号条件,此时 ρ^Q 有 0,1 本征值,输入态为纯态,可以证明(15)式的非零本征值与(16)式的相等,故相干信息为零.故虽然相干信息难于解析表达,所幸其最大值,信道的量子容量的估值却可表示为

$$C_{es} = \max\left\{ H(N_s\bar{N} + \bar{N}_s N) - H(N) - NH(N_s);0\right\}, \tag{17}$$

其中 $H(\varepsilon) = -\varepsilon\log_2\varepsilon - \bar{\varepsilon}\log_2\bar{\varepsilon}$ 是经典二进制信道问题中常用的熵函数.信道的量子容量的估值在 N_s 为 0 或 1 时为零,这可由(17)式看出,而在 $N_s = 1/2$ 时最大.计算表明:$N \approx 0.2270921952$ 是分界点.噪声大于该值,即使 $N_s = 1/2$,容量的估计值也不可能大于零,而只能等于零,从而预计无法传输量子信息.

其次是 $p \neq 0$ 信道.当然 p 的取值受到 N 的限制,否则将出现密度矩阵的本征值大于 1 或小于 0 这种非物理的结果.借助于数值计算得到此时 β 的相因子在计算相干信息时起作用,但在固定 β 的相因子的情况下,相干信息随 $|\beta|$ 变化的特性与上述 $p = 0$ 时的结果类似.信道的量子容量的估值 $C_{es,p}$ 或在 $|\beta| = 0$ 处或在 $|\beta|$ 右端点达到,其值与 β 的相因子无关,有

$$C_{es,p} = \max\left\{ H(N_s\bar{N} + \bar{N}_s N) - H(N) - NH(N_{sp});0\right\}, \tag{18}$$

其中

$$N_{sp} = \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{(N_s - \bar{N}_s)^2 + 4|p|^2 N_s\bar{N}_s/N^2}\right].$$

5　讨　　论

很显然 $H(N_{sp}) < H(N_s)$,故 $C_{es,p} \geqslant C_{es}$,因此在相同的输入平均功率和相同的量子噪声信道的平均费米子数的条件下,$p \neq 0$ 信道可比 $p = 0$ 信道有更高的量子容量的估值,亦即 $p \neq 0$ 的信道可以更好地传输量子信息,或者说更有利于保持量子相干性.另一方面,关于量子费米信道的参数 p 物理意义,可作一初步解释:将输入态密度矩阵用 Bloch 矢量表示为 $\rho^Q = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma})$,其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是泡利矩阵,I 是单位矩阵.为明确起见,令 $\boldsymbol{b} = (1,0,0)$,$N = 0$,则由(16)式输出态密度矩阵的 Bloch 矢量 $\boldsymbol{b}' = (1, -p, p, 0)$,因而量子费米信道的参数 p 的作用使密度矩阵的 Bloch 矢量绕 z 轴有一旋转(对于较小的实数 p),或者对于纯态态矢量绕 z 轴有一旋转.对于电子自旋,这可用旋转磁场来实现.

本文解决了单模费米热噪声量子信道的定义、表示及其量子容量的估值问题,对于解决多个单模费米子的直积态以及量子信道噪声密度矩阵非对角情况的相应问题提供了重要手段.

[1] C. H. Bennett, P. W. Shor, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **44**(1998), 2724.

[2] M. J. Shi *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **49**(2000), 825(in Chinese) [石名俊等,物理学报,**49**(2000),825].

[3] M. J. Shi *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **49**(2000), 1912(in Chinese) [石名俊等,物理学报,**49**(2000),1912].

[4] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, *Phys. Rev. Lett.*, **85**(2000), 433.

[5] P. Hausladen, R. Jozsa, B. Schumacher, M. Westmoreland, W. K. Wootters, *Phys. Rev.*, **A54**(1996), 1869.

[6] A. S. Holevo, M. Sohma, O. Hirota, *Phys. Rev.*, **A59**(1999), 1820.

[7] H. Barnum, M. A. Nilsen, B. Schumacher, *Phys. Rev.*, **A57**(1998), 4153; H. Barnum *et al.*, *Phys. Rev.*, **A58**(1998), 3496.

[8] B. Schumacher, *Phys. Rev.*, **A54**(1996), 2614; B. Schumacher, M. A. Nielsen, *Phys. Rev.*, **A54**(1996), 2629.

[9] S. Lloyd, *Phys. Rev.*, **A55**(1997), 1613.

EVALUATION OF QUANTUM CAPACITY OF A SINGLE-MODE FERMI THERMAL NOISE CHANNEL

CHEN XIAO-YU

(*Division of Physics*, *China Institute of Metrology*, *Hangzhou* 310034, *China*; *Department of Information Science and Electronic Engineering*, *Zhejiang University*, *Hangzhou* 310027, *China*)

(Received 3 November 2000; revised manuscript received 21 January 2001)

ABSTRACT

Based on the operator-sum representation of quantum channel, the quantum channel of a single-mode Fermi system is parameterized. By the parameterization another kind of Fermi thermal noise quantum channel is found. The maximum values of coherent information of two kinds of channels are obtained to estimate the quantum capacities of the channels.

Keywords: quantum capacity, coherent information, Fermi noise quantum channel

PACC: 0365