

# 用于混沌时间序列自适应预测的一种 少参数二阶 Volterra 滤波器\*

张家树 肖先赐

(电子科技大学电子工程系, 成都 610054)

(2001 年 2 月 5 日收到)

研究了二阶 Volterra 滤波器的一种乘积耦合近似实现结构及其非线性 NLMS 自适应算法, 并用这种少参数二阶 Volterra 滤波器(RPSOVF)研究了一些混沌信号的非线性自适应预测性能. 仿真研究结果表明: 所给出的非线性 NLMS 自适应算法能够保证这种 RPSOVF 的稳定性和收敛性, 且 RPSOVF 用这种非线性 NLMS 自适应算法能够自适应预测一些混沌时间序列.

关键词: 混沌, 非线性自适应预测, Volterra 滤波器, 非线性 NLMS 自适应算法

PACC: 0545

## 1 引 言

经过 20 多年的不断探索和努力, 人们已经提出了多种预测混沌时间序列的方法, 主要包括全局预测法<sup>[1-4]</sup>、局域预测法<sup>[5]</sup>和非线性自适应预测法<sup>[6-11]</sup>. 与全局预测法、局域预测法相比, 非线性自适应预测法具有更多的优点, 尤其是这种预测方法能够满足很多工程应用的需求, 开始受到人们的关注<sup>[6-11]</sup>.

在混沌时间序列的非线性自适应预测中, Volterra 滤波器因其输出是其滤波系数的线性函数, 易于用现有的线性分析工具来分析其滤波性能<sup>[12]</sup>, 已经成为最广泛使用的预测模型之一<sup>[6-9]</sup>, 然而, 使用 Volterra 滤波器表示非线性系统时固有的问题之一便是它在计算系统输出时的复杂性. 随着 Volterra 滤波器的阶数或记忆单元  $m$  增大, Volterra 滤波器的滤波系数将按幂次快速增加, 相应所需的计算次数亦成幂次快速增加, 使其工程实现变得越来越难<sup>[7-9, 12]</sup>. 实际使用的 Volterra 滤波器的非线性阶次往往未超过二阶以上<sup>[12]</sup>.

减小 Volterra 滤波器实现复杂性的一种可能办

法是将 Volterra 滤波器线性化, 即用线性滤波器的乘积耦合方式来近似实现<sup>[13, 14]</sup>, 系统的输出是滤波器系数的非线性函数, 确定滤波系数的问题就成为一个非线性估计问题. 在混沌序列的自适应预测过程中, 如何保证其稳定性和收敛性比较困难. 本文以二阶 Volterra 滤波器(SOVF)的一种乘积耦合近似实现结构为例, 讨论一种改进的非线性 NLMS 自适应算法稳定收敛的参数选择关系, 研究了这种非线性 NLMS 自适应算法和少参数二阶 Volterra 滤波器(RPSOVF)对一些混沌时间序列的自适应预测性能.

## 2 预测模型的确定

已有研究结果表明: 二阶 Volterra 滤波器能够预测一些混沌时间序列, 但 SOVF 的非线性耦合项较多, 工程实现较困难<sup>[12]</sup>. 正如 Koh 和 Powers 指出<sup>[13]</sup>: 在很多实际应用中, 应在滤波性能和计算复杂性之间进行平衡, 且他们认为 SOVF 只是在线性滤波器的基础上引入二次滤波器所构成, 而线性滤波器和二次滤波器可分别独立进行优化来实现最优的 SOVF. 为此, 他们研究了二次滤波器的线性滤波器的乘积耦合近似实现问题. 对应的 SOVF 线性化近

\* 国防预研基金(批准号 98JS05.4.1.DZ0205)资助的课题.

似可表示为

$$\begin{aligned} y(n) &= h_0 + \sum_{i=0}^{m-1} a(i)x(n-i) \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=i}^{m-1} b(i,j)x(n-i)x(n-j) \\ &= h + \sum_{i=0}^{m-1} a(i)x(n-i) \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} g_1(i)g_2(j)x(n-i)x(n-j). \quad (1) \end{aligned}$$

从(1)式可以看出,SOVF这种近似实现的滤波器结构所需的滤波器参数为 $3m+1$ .与SOVF所需的滤波系数 $O(m^2)$ 和需要 $O(m^2)$ 的非线性状态扩展运算相比,其复杂性确实大为减小.

在乘积耦合实现方式中, $b(i,j)$ 分解成 $g_1(i), g_2(j)$ 的分解本身不具备唯一性, $g_1(i), g_2(j)$ 的乘积耦合在原理上易于陷入二次滤波均方误差(MSE)曲面上的局部极小点, $g_1, g_2$ 不易通过迭代收敛,但在很多感兴趣的应用领域,其MSE的收敛性似乎能保证迭代技术的实用性<sup>[13]</sup>.Koh和Powers用LMS算法已成功地将这种近似结构用于随机海中的舰船泊淀系统的建模和辨识<sup>[13]</sup>.这对于将这种线性滤波器的乘积耦合近似实现方式用于低维混沌时间序列的非线性自适应预测提供了一种可能性.

SOVF作为一个整体而言,减小它复杂性的线性滤波器的乘积耦合近似实现结构本身还可通过引入常数项来进一步减小其滤波系数和计算复杂性<sup>[14]</sup>,为此将(1)式重新定义如下:

$$\begin{aligned} y(n) &= (h_{1,0} + \sum_{i=1}^m h_{1,i}x(n-i)) \\ &\times (h_{2,0} + \sum_{j=1}^m h_{2,j}x(n-j)) + \epsilon(n) \quad (2) \end{aligned}$$

其中 $h_{1,i}$ 和 $h_{2,j}(i,j=0,1,\dots,m)$ 分别为两个线性滤波器的滤波系数.图1给出它的具体实现结构,这种结构所需的滤波系数总个数为 $2m+2$ ,故简称它为RPSOVF.

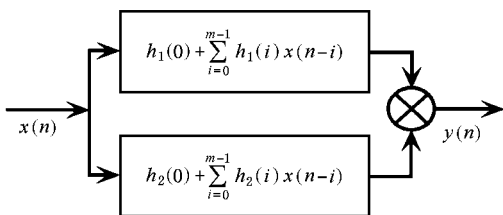


图1 少参数二阶 Volterra 预测滤波器结构

如果将(2)式展开,可得

$$\begin{aligned} y(n) &= h_{1,0}h_{2,0} + \sum_{i=1}^m [h_{2,0}h_{1,i} + h_{1,0}h_{2,i}]x(n-i) \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} [h_{2,0}h_{1,i} \\ &+ h_{1,0}h_{2,i}]x(n-i)x(n-j). \quad (3) \end{aligned}$$

比较(1)和(3)式可知(2)式可以写成与(1)式相同的形式,可用来近似表示SOVF.

### 3 一种新的非线性 NLMS 自适应算法

虽然SOVF的这种乘积耦合型近似实现结构在原理上易于陷入SOVF滤波器MSE曲面上的局部极小点,但正如Koh和Powers所指出的那样,在很多感兴趣的应用领域,其MSE的收敛性似乎能保证迭代技术的实用性<sup>[13]</sup>.因此,现在的问题是找到一种有效的自适应算法,能更有效地保证这种近似结构的快速收敛性.

最近,Kalluri和Arce针对非线性滤波器提出了一种非线性归一化LMS自适应滤波算法(nonlinear normalized LMS algorithm,即NNLMS算法)<sup>[15]</sup>.现将NNLMS算法描述如下:

设 $x(n)$ 和 $y(n)$ 分别表示未知系统在时刻 $n$ 的系统输出和预测输出值, $w_i$ 表示预测模型的待定参数,则在时刻 $n$ 的瞬时平方误差为

$$e^2(n) = [x(n+1) - y(n)]^2. \quad (4)$$

在当前时刻 $n$ 对待定参数的优化目的是希望在下一时刻 $n+1$ 的预测误差,可借助NLMS类型的算法的优化步长来实现.为此,Kalluri和Arce重新定义了如下的一种代价函数:

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_{n+1}(\mu) \triangleq \mathcal{K}(W(n+1)) \\ &= E\{e^2(n+1)\} = E\{x(n+1) \\ &- y(W(n+1), X(n+1))\}. \quad (5) \end{aligned}$$

现在的问题就是让上述代价函数为最小来找出最优的步长,即

$$\mu_0(n) \triangleq \arg \min_{\mu > 0} J_{n+1}(\mu) \rightarrow 0. \quad (6)$$

由此导出的非线性NLMS算法如下:

$$\begin{aligned} w_i(n+1) &= w_i(n) + \frac{\mu}{\sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial y}{\partial w_j}(n) \right)^2} \\ &\cdot \epsilon(n) \frac{\partial y}{\partial w_i}(n), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7) \end{aligned}$$

由此可见,线性NLMS算法只是非线性NLMS算法

的一种特例.

根据(7)和(2)式描述的近似 SOVF,可得出这种近似实现结构的非线性 NLMS 算法如下:

$$A(n+1) = A(n) + \frac{\mu_1}{\|X(n)\|^2 \times [B^T(n)X(n)]^2} \cdot [B^T(n)X(n)]\epsilon(n)X(n), \quad (8)$$

$$B(n+1) = B(n) + \frac{\mu_2}{\|X(n)\|^2 \times [A^T(n)X(n)]^2} \cdot [A^T(n)X(n)]\epsilon(n)X(n), \quad (9)$$

其中

$$X(n) = [1 \ x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-m+1)]^T,$$

$$A(n) = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m]^T,$$

$$B(n) = [b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]^T,$$

$\mu_1$  和  $\mu_2$  为控制收敛的辅助常数且大于零.

不过(8)和(9)式并不能保证系统稳定收敛,主要原因在于  $\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial y(n)}{\partial w_j}\right)^2$  并不能保证恒定大于 1,当  $\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial y(n)}{\partial w_j}\right)^2 < 1$  时,就将梯度误差放大,使迭代技术的收敛性难以保证.为了保证收敛性,应保证梯度误差始终单调减小,可在(7)式中引入一个大于零的常数  $c$  来保证梯度误差始终单调减小,即

$$w_i(n+1) = w_i(n) + \frac{\mu}{c + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial y(n)}{\partial w_j}\right)^2} \cdot \epsilon(n) \frac{\partial y(n)}{\partial w_i}, \quad i = 1 \ 2 \ \dots \ N. \quad (10)$$

相应地,(8)和(9)式改为

$$A(n+1) = A(n) + \frac{\mu_1}{c + \|X(n)\|^2 \times [B^T(n)X(n)]^2} \cdot [B^T(n)X(n)]\epsilon(n)X(n), \quad (11)$$

$$B(n+1) = B(n) + \frac{\mu_2}{c + \|X(n)\|^2 \times [A^T(n)X(n)]^2} \cdot [A^T(n)X(n)]\epsilon(n)X(n). \quad (12)$$

同时还应使  $\mu_1 \neq \mu_2$ .

### 4 预测性能与参数选择仿真研究

下面就这种 RPSOVF 对混沌时间序列的预测性能进行实验研究.实验中每一种连续混沌序列分别用四阶 Runge-Kutta 算法求解获得 8000 点数据,取其最后 2000 点数据作为实验数据,然后按下式对混沌序列进行归一化处理  $-1 \sim +1$  之间,取  $\{x(i)\}$  前 200

个点作为训练样本用于训练 RPSOVF,经 100 次预训练后预测最后 1500 点归一化的混沌时间序列.以预测 MSE 作为评测标准,其定义为

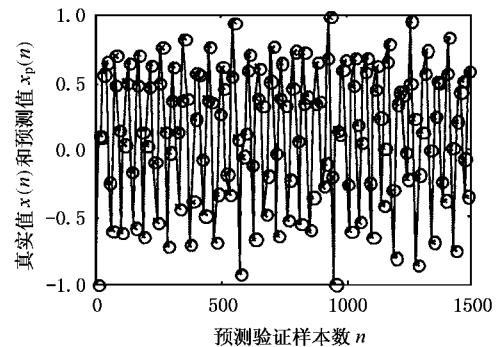
$$MSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |x(k) - \hat{x}(k)|^2}. \quad (13)$$

### 实验 1 预测能力研究

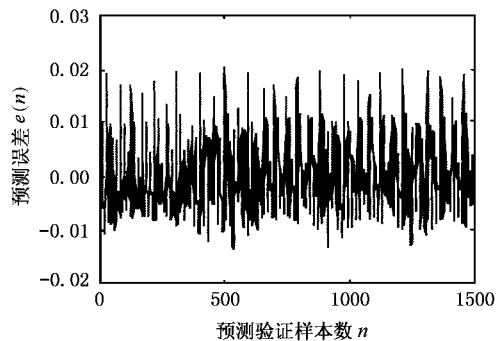
下面给出采用这种非线性 NLMS 算法和 RPSOVF 对 Mackey-Glass 时延微分方程和混沌 Lorenz 系统、混沌 Rössler 系统以及 Chua 混沌电路系统的  $x$  分量混沌序列进行自适应预测的具体实验结果. RPSOVF 的输入维数  $m = 4$ ,非线性 NLMS 算法中的辅助收敛参数  $c_0 = 2$ ,  $\mu_1 = 1.7$ ,  $\mu_2 = 0.3$ .其预测的 MSE 按(13)式进行计算.

例 1 RPSOVF 对 Mackey-Glass 混沌序列的预测结果见图 2.

$$\frac{dx(t)}{dt} = -0.1x(t) + 0.2 \frac{x(t-\Delta)}{1+x^{10}(t-\Delta)}, \quad \Delta = 17.$$



(a) 真实值与预测值

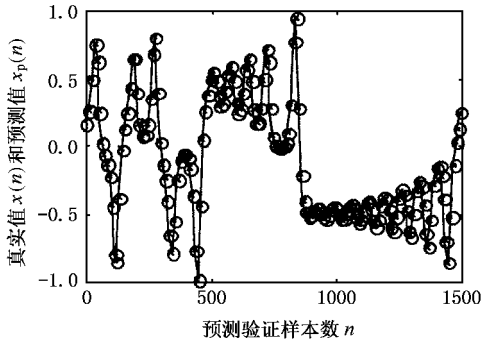


(b) 一步预测误差

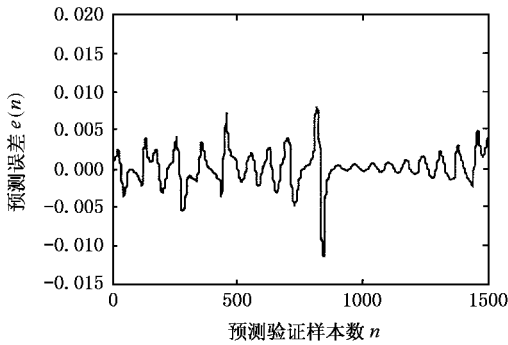
图 2 用 RPSOVF 对 Mackey-Glass 混沌序列一步预测结果  
○为预测值,×为真实值,MSE = 0.0088

例 2 RPSOVF 对 Lorenz 系统  $x$  分量混沌序列的预测结果见图 3.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= rx - xz - y, \quad a = 10, b = 8/3, r = 34.0, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned}$$



(a) 真实值与预测值

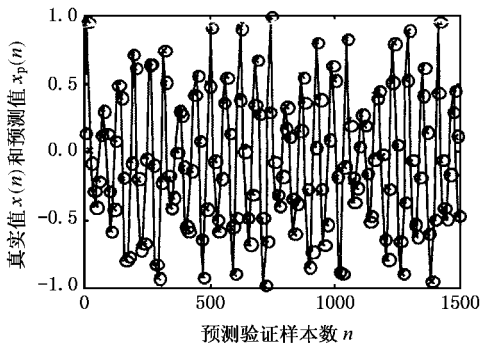


(b) 一步预测误差

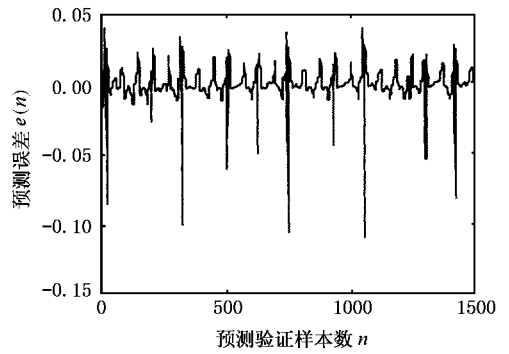
图 3 用 RPSOVF 对 Lorenz 系统  $x$  分量混沌序列的一步预测结果 MSE=0.0068, 图注同图 2

例 3 RPSOVF 对 Rössler 系统  $x$  分量混沌序列的预测结果见图 4.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \quad a = 0.15, b = 0.20, c = 10.0, \\ \dot{z} &= b + z(x - c). \end{aligned}$$



(a) 真实值与预测值

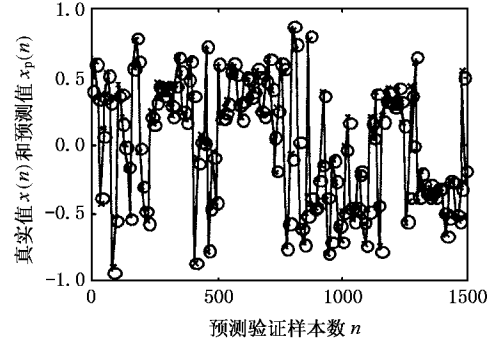


(b) 一步预测误差

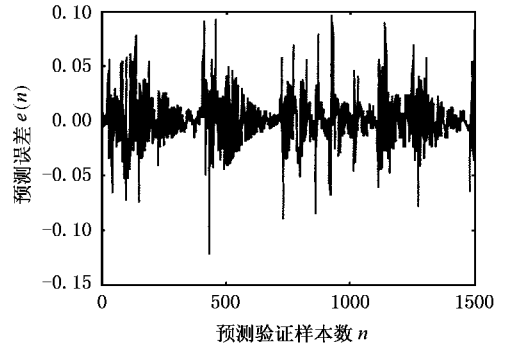
图 4 用 RPSOVF 对 Rössler 系统  $x$  分量混沌序列的一步预测结果 MSE=0.0096, 图注同图 2

例 4 RPSOVF 对 Chua 混沌电路系统  $x$  分量混沌序列的预测结果见图 5.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x - f(x)), \\ \dot{y} &= x - y - z, \quad a = 10.0, \beta = 14.87, a = -1.27, \\ & \quad b = -0.68, \\ \dot{z} &= -\beta y, \\ f(x) &= k(x) + 0.5(a - b)(|x + 1| - |x - 1|). \end{aligned}$$



(a) 真实值与预测值



(b) 一步预测误差

图 5 用 RPSOVF 对 Chua 混沌电路系统  $x$  分量混沌序列的一步预测结果 MSE=0.0096, 图注同图 2

实验 2 辅助控制收敛参数  $c$  的选择

在本实验中,以广泛用于验证混沌预测模型的 Mackey-Glass 混沌序列为例,来研究非线性 NLMS 算法的参数选择问题.主要包括(11)式中控制收敛的系数、常数  $c$  的选择,以及训练样本数对预测性能的影响等.具体结果见图 6.

从图 6 可以看出 1) 当  $c \approx \mu_2$  或  $c \approx \mu_1$  时,用(11)和(12)式所给出的非线性 NLMS 算法能够使 RPSOVF 预测器约只需 20 次训练就可稳定收敛,收敛速度很快.增加训练次数并不能进一步改善预测

误差,且并未收敛到全局最优,更进一步说明在工程应用中,采用非线性自适应预测法来预测混沌信号的必要性和可能性;2) 当辅助控制收敛常数  $c < \max(\mu_1, \mu_2)$  时, $c$  的取值偏离  $\mu_1, \mu_2$  的程度越大,就越容易出现收敛困难;3) 当  $c \geq \mu_1 + \mu_2$  时,约经过 20 次训练之后, RPSOVF 预测器的训练 MSE 随训练次数的增加而单调下降,并趋向全局最优,且在  $c \approx \mu_1 + \mu_2$  时的收敛性能为最佳,进一步增加  $c$  值还会使收敛速度略微放慢.这一结果明显不同于线性预测模型的 NLMS 算法.在我们所进行的 100 次的训练验证中,上述结论均成立.

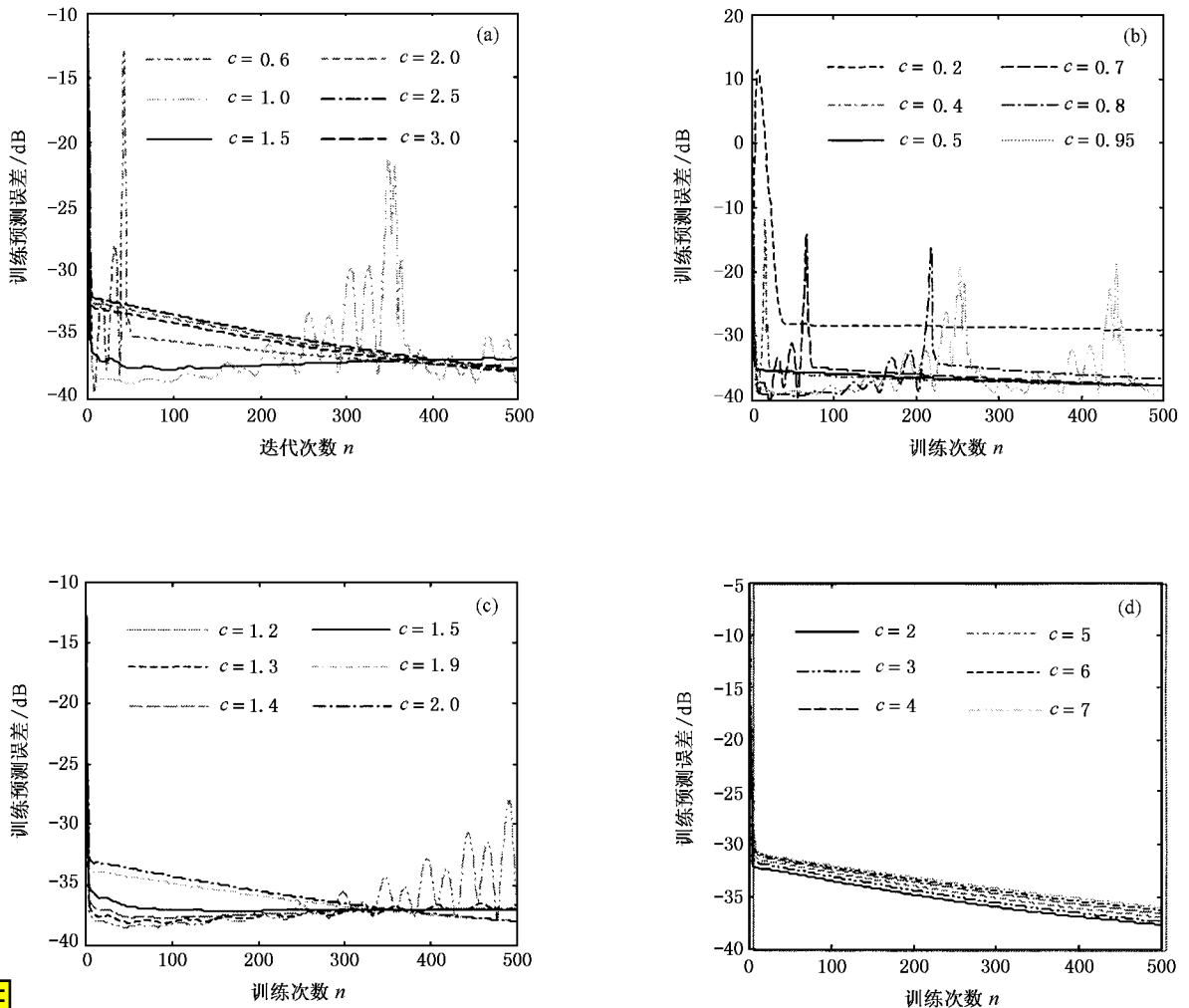


图 6 固定  $\mu_1 = 1.5, \mu_2 = 0.5$  时 辅助控制收敛常数  $c$  的不同取值与训练 RPSOVF 的误差关系

下面讨论在固定  $c$  值( $c = 2$ )时, $\mu_1, \mu_2$  的不同取值对收敛性能的影响.在这一仿真实验中,假定  $\mu_1, \mu_2$  与  $c$  满足下列关系:

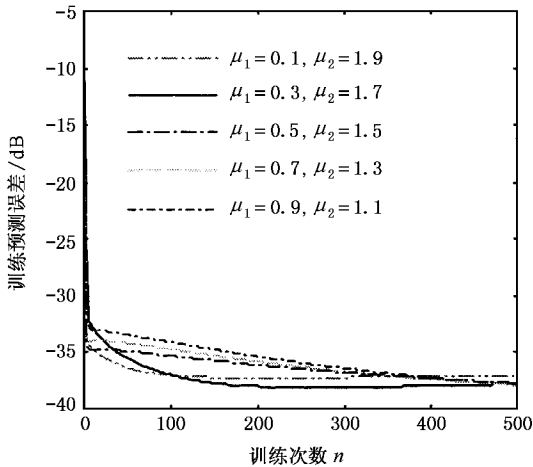
$$\mu_1 + \mu_2 \leq c = 2, \mu_1 > 0, \mu_2 > 0,$$

所用的实验数据和模型相同.具体仿真结果见图 7.

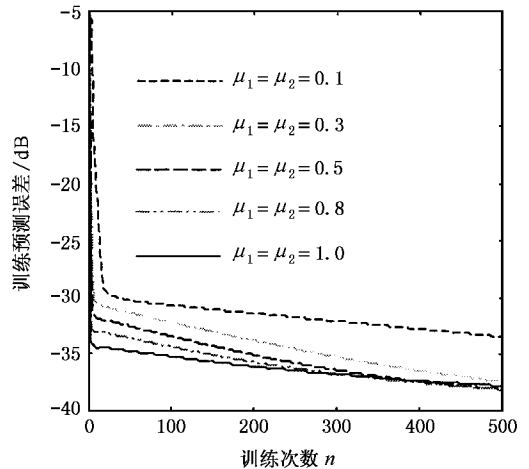
由此可见:在(12)式的约束条件下,无论是  $\mu_2 = c - \mu_1$ , 还是  $0 < \mu_1 = \mu_2 \leq c/2$ , 训练 RPSOVF 预测器的这种非线性 NLMS 算法的收敛性能与前面的结论一致.当  $\mu_1, \mu_2$  的不同取值(即  $\mu_1 \neq \mu_2$ )的收敛性能满足条件  $\mu_2 = c - \mu_1, 1 < |\mu_1 - \mu_2| < 1.5$  时的收

敛性能为最佳. 这些结果为选择非线性 NLMS 算法

控制收敛性能的参数提供了依据.



(a)  $\mu_2 = c - \mu_1$



(b)  $0 < \mu_1 = \mu_2 \leq c/2$

图7 固定  $c=2$  时  $\mu_1, \mu_2$  的不同取值对收敛性能的影响

## 5 结束语

本文研究二阶 Volterra 自适应预测滤波器的乘积耦合近似实现结构和一种改进的非线性 NLMS 自适应算法, 以及它们用于混沌时间序列的非线性自适应预测性能, 通过仿真研究获得了以下主要结果:

1. 这种由线性滤波器乘积耦合而成的 RPSOVF, 用改进的非线性 NLMS 自适应算法能够自适应地预测一些低维混沌信号.
2. 用广泛用于验证混沌预测模型的 Mackey-

Class 混沌序列来研究改进的非线性 NLMS 自适应算法中的参数选择问题, 主要结果为: 当各参数之间满足  $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0, c \approx \mu_1 + \mu_2, \mu_2 = c - \mu_1, |1 - \mu_1 - \mu_2| < 1.5$  的条件时, RPSOVF 的收敛性能为最佳.

3. 仅需两个线性滤波器、一个乘法器即可实现 RPSOVF 和非线性 NLMS 自适应算法, 操作简单.

此外, 上述研究结果使我们对线性 FIR 滤波器乘积耦合而成的非线性滤波器的收敛性能有了清楚的认识和了解, 为深入研究这类乘积耦合型的非线性滤波器提供了一些依据; 同时, 这些结果还对混沌时间序列的非线性自适应预测和应用提供了依据.

[1] L. Cao, Y. Hong, H. Fang, G. He, *Physica*, **D85** (1995) 225.  
 [2] J. S. Zhang, X. C. Xiao, *Chin. Phys. Lett.*, **17** (2000) 88.  
 [3] L. P. Maguire, B. Roche, T. M. McGinnity, L. J. McDaid, *Information Science*, **112** (1998), 137.  
 [4] J. S. Zhang, X. C. Xiao, *Chinese Physics*, **9** (2000) A08.  
 [5] D. J. Farmer, J. J. Sidorowich, *Phys. Rev. Lett.*, **59** (1987), 845.  
 [6] J. S. Zhang, X. C. Xiao, *Acta Physica Sinica*, **49** (2000), 403 (in Chinese) [张家树、肖先赐, *物理学报*, **49** (2000), 403].  
 [7] J. S. Zhang, X. C. Xiao, *Chin. Phys. Lett.*, **18** (2001) 337.  
 [8] J. S. Zhang, X. C. Xiao, *Chinese Physics*, **10** (2001) 394.  
 [9] J. S. Zhang, X. C. Xiao, *Acta Physica Sinica*, **49** (2000), 1221 (in Chinese) [张家树、肖先赐, *物理学报*, **49** (2000), 1221].

[10] J. S. Zhang, X. C. Xiao, *IEEE Proc. WCICA '2000*, Vol. 5, p.3175.  
 [11] J. S. Zhang, X. C. Xiao, *Acta Physica Sinica*, **49** (2000), 2333 (in Chinese) [张家树、肖先赐, *物理学报*, **49** (2000), 2333].  
 [12] V. J. Mathews, *IEEE Signal Processing Magazine*, **8** (4) (1991), 10.  
 [13] T. Koh, E. J. Powers, *IEEE Trans. on ASSP*, **33** (6) (1981), 1445.  
 [14] J. S. Zhang, J. H. Wan, X. C. Xiao, *Chinese Physics*, **10** (2001) 97.  
 [15] S. Kalluri, G. R. Arce, *IEEE Trans. on SP*, **47** (8) (1999), 2262.

# A REDUCED PARAMETER SECOND-ORDER VOLTERRA FILTER WITH APPLICATION TO NONLINEAR ADAPTIVE PREDICTION OF CHAOTIC TIME SERIES<sup>\*</sup>

ZHANG JIA-SHU XIAO XIAN-CI

( *Department of Electronic Engineering ,University of Electronic Science and Technology of China ,Chengdu 610054 ,China* )

( Received 5 February 2001 )

## ABSTRACT

A reduced parameter second-order Volterra filter ( RPSOVF ) which is constructed by the multiplication-coupled two linear FIR filters , and its nonlinear normalized least mean square ( NLMS ) algorithm is proposed ; and this RPSOVF with nonlinear NLMS algorithm are used to make adaptive predictions of chaotic time series . The rule of selecting convergent assistant parameters of the nonlinear NLMS algorithm is obtained . Experimental results show that this reduced parameter second-order Volterra filter with the nonlinear NLMS algorithm can be successfully used to make adaptive predictions of chaotic time series , and the modified nonlinear NLMS algorithm enables RPSOVF to converge and stabilize .

**Keywords** : chaos , nonlinear adaptive prediction , Volterra filters , nonlinear NLMS algorithms

**PACC** : 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Defense Foundation of China ( Grant No. 98JS05.4.1.DZ0205 ).