第 50 卷 第 8 期 2001 年 8 月
1000-3290/2001/50(06)/1421-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.50, No.8, August, 2001

含时阻尼谐振子的传播子与严格波函数

凌瑞良
(常熟高等专科学校物理系,常熟 215500)
(2001 年 2 月 16 日收到)

通过正则化变换技巧,寻找到一种对阻尼系数随时间变化的阻尼谐振子直接量子化方案,进而采用高斯型传播子和费曼路径积分方法求出了含时阻尼谐振子的严格波函数,并对波函数的普遍意义,坐标和动量的零点涨落以及两者的不确定关系作了讨论.

关键词:含时阻尼,传播子,费曼路径积分
PACC:0365

1 引 言

在基础理论研究中,含时量子哈密顿系统的演化处理问题长期以来一直受到人们的普遍重视,其中最令人感兴趣的一类是含时谐振子系统[1-5].因为原子、分子在固体表面的吸附问题可以用一质量随时间变化的受迫阻尼谐振子的哈密顿量来描写[6,7],而 Fabra-Perot 空腔中的量子化电磁场的研究与质量随时间变化的谐振子系统的研究又密切相关[5,8],所以,近年来这方面又有不少的研究[9-11].我们对阻尼系数为常数的阻尼谐振子的量子力学处理问题已作过研究[12],但对于阻尼系数随时间变化的阻尼谐振子的量子力学处理问题至今未见报道,鉴于此,本文试图在文献[12]的工作基础上,进一步对阻尼系数随时间变化的阻尼谐振子的量子力学处理问题作仔细研究.

在第 2 节中,通过正则化变换技巧,给出了一种对阻尼系数随时间变化的阻尼谐振子的直接量子化方案.在第 3 节中确定了阻尼系数随时间变化的阻尼谐振子的传播子.在第 4 节中利用费曼路径积分方法求出了阻尼系数随时间变化的阻尼谐振子的严格波函数.在第 5 节中对所求波函数的普遍意义,谐振子的坐标和动量的零点涨落以及两者的不确定关系作了讨论.

2 正则量子化方案

为方便起见,以一维含时阻尼谐振子为例.若以谐振子的物理变量(位移 x,动量 p)表达,一维含时阻尼谐振子的运动方程为

$$\dot{x} = p/M,\quad \dot{p} = -\mu(t)p/M - kx + f(t), \tag{1}$$

式中常数 M,k 分别是谐振子质量,恢复力与振子位移的比值,$\mu(t)$是阻尼力与谐振子速度的比值,但不是常数而是随时间变化的函数,力 $f(t)$也假定为时间 t 的函数,且 $t=0$ 时,$f(t)=0$.

经研究,在所考察的时间内 $\mu(t)$均不为零的条件下[13],对应(1)式可行的量子化方案为

$$xp - px = \mathrm{i}\hbar\exp\left[-\int_0^t \frac{\mu(\tau)}{M}\mathrm{d}\tau\right]. \tag{2}$$

若取如下正则变换:

$$X = x\exp\left(\int_0^t \frac{\mu(\tau)}{2M}\mathrm{d}\tau\right),$$
$$P = \left(p + \frac{\mu(t)}{2}x\right)\exp\left(\int_0^t \frac{\mu(\tau)}{2M}\mathrm{d}\tau\right), \tag{3}$$

则可以证明有如下正则对易关系:

$$[X, P] = \mathrm{i}\hbar. \tag{4}$$

于是,由海森堡绘景中的力学量算符运动方程

$$\dot{X} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[X, H] = \frac{\partial H}{\partial P},$$
$$\dot{P} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[P, H] = -\frac{\partial H}{\partial X}, \tag{5}$$

可得到含时阻尼谐振子的哈密顿量为

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{1}{2}\left(k - \frac{\mu^2(t)}{4M} - \frac{\dot{\mu}(t)}{2}\right)X^2 - Xf(t)\exp\left(\int_0^t \frac{\mu(\tau)}{2M}\mathrm{d}\tau\right), \tag{6}$$

其相应的哈密顿算符为

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{1}{2}\left(k - \frac{\mu^2(t)}{4M} - \frac{\dot{\mu}(t)}{2}\right)X^2$$

$$- Xf(t)\exp\left(\int_0^t \frac{\mu(\tau)}{2M}\mathrm{d}\tau\right). \tag{7}$$

正则化变换允许任意正则变换,我们已充分利用这点,选择(3)式,使(6)式尽量简单.通过正则化变换,即可沿用通常的量子力学处理.

3 传播子的确定

用费曼路径积分方法求含时阻尼谐振子的波函数,关键是确定含时阻尼谐振子的传播子[7].这里,我们采用高斯型传播子 K[10],

$$K(X,t;X_0 0) = A_0\exp[-C_1X^2 - C_2X - C_3X_0^2 - (C_4X + C_5)X_0], \tag{8}$$

式中 $X_0 = X(0) = x$.

显然,传播子 K 满足波动方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}K = \hat{H}K. \tag{9}$$

把(7)和(8)两式同时代入(9)式,并比较 X 和 X_0 同次幂项的系数,可得到

$$-\mathrm{i}\hbar\dot{C}_1 = -\frac{2\hbar^2}{M}C_1^2 + \frac{1}{2}M\left[\frac{k}{M} - \frac{\mu^2(t)}{4M^2} - \frac{\dot{\mu}(t)}{2M}\right], \tag{10}$$

$$-\mathrm{i}\hbar\dot{C}_2 = -\frac{2\hbar^2}{M}C_1C_2 - f(t)\exp\left(\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{2M}\mathrm{d}\tau\right), \tag{11}$$

$$-\mathrm{i}\hbar\dot{C}_3 = -\frac{\hbar^2}{2M}C_4^2, \tag{12}$$

$$-\mathrm{i}\hbar\dot{C}_4 = -\frac{2\hbar^2}{M}C_1C_4, \tag{13}$$

$$-\mathrm{i}\hbar\dot{C}_5 = -\frac{\hbar^2}{M}C_2C_4, \tag{14}$$

$$-\mathrm{i}\hbar\dot{A}_0 = -\frac{\hbar^2}{2M}A_0C_2^2 + \frac{\hbar^2}{M}A_0C_1. \tag{15}$$

解方程(10)—(15)可得到

$$C_1 = \frac{M}{2\mathrm{i}\hbar}\left[\frac{\Omega_0\cot(\Omega_0S)}{\rho^2} + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\right], \tag{16}$$

$$C_2 = \frac{\rho M}{\mathrm{i}\hbar}\left[-\frac{\Omega_0\cot(\Omega_0S)}{\rho^2}R(t) + \dot{R}(t)\right], \tag{17}$$

$$C_3 = \frac{\Omega_0M}{2i\hbar}\cot(\Omega_0S), \tag{18}$$

$$C_4 = -\frac{\Omega_0M}{\mathrm{i}\hbar\rho\sin(\Omega_0S)}, \tag{19}$$

$$C_5 = \frac{\Omega_0M}{\mathrm{i}\hbar\sin(\Omega_0S)}R(t), \tag{20}$$

$$A_0 = \left[\frac{\Omega_0M}{2\pi\mathrm{i}\hbar\rho\sin(\Omega_0S)}\right]^{\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{M}{2\mathrm{i}\hbar}\int_0^t\rho^2 \cdot\left[-\frac{\Omega_0\cot(\Omega_0S)}{\rho^2}R(\tau) + \dot{R}(\tau)\right]^2\mathrm{d}\tau\right\}. \tag{21}$$

式中 ρ 满足辅助方程 $\ddot{\rho} + \Omega^2\rho = \frac{\Omega_0^2}{\rho^3}$, (22)

$$\Omega^2(t) = \frac{k}{M} - \frac{\mu^2(t)}{4M^2} - \frac{\dot{\mu}(t)}{2M}, \tag{23}$$

$$\Omega_0^2 = \Omega^2(0) = \frac{k}{M} - \frac{\mu^2(0)}{4M^2} - \frac{\dot{\mu}(0)}{2M}, \tag{24}$$

$$\dot{S} = \rho^{-2}, \tag{25}$$

$$R(t) = \frac{1}{\Omega_0M}\int_0^t f(\tau)\exp\left(\int_0^\tau\frac{\mu(\tau')}{2M}\mathrm{d}\tau'\right) \cdot\rho\sin[\Omega_0(s(t) - s(\tau))]\mathrm{d}\tau. \tag{26}$$

把(16)—(21)式同时代入(8)式,可得到含时阻尼谐振子的传播子

$$\begin{aligned} K(X,t;X_0,0) = {} & \left(\frac{\Omega_0M}{2\pi\mathrm{i}\hbar\rho\sin[\Omega_0s(t)]}\right)^{1/2} \\ & \cdot\exp\Bigg[\frac{\Omega_0M}{2i\hbar}\Bigg\{\frac{1}{\Omega_0}\Bigg[-\frac{\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\Omega_0\cot[\Omega_0s(t)]}{\rho^2}\Bigg]X^2 \\ & + \frac{2\rho}{\Omega_0}\Bigg[\frac{\Omega_0\cot[\Omega_0s(t)]}{\rho^2} \cdot R(t) - \dot{R}(t)\Bigg]X \\ & - \cot[\Omega_0s(t)]X_0^2 + \frac{2}{\rho\sin[\Omega_0s(t)]}XX_0 \\ & - \frac{2}{\sin[\Omega_0s(t)]} \cdot R(t)X_0 + \frac{1}{\Omega_0}\int_0^t\rho^2 \\ & \cdot\Bigg[-\frac{\Omega_0\cot[\Omega_0s(t)]}{\rho^2} \cdot R(\tau) + \dot{R}(\tau)\Bigg]^2 d\tau\Bigg\}\Bigg]. \end{aligned} \tag{27}$$

4 波函数

应用如下公式可求出波函数:

$$\Psi_n(X,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}X_0K(X,t;X_0,0)\Psi_n(X_0,0), \tag{28}$$

式中 $\Psi_n(X_0,0)$是简单谐振子的波函数,即(7)式所表示的哈密顿算符在 t 等于零时的波函数

$$\Psi_n(X_0,0)=\left[\frac{\sqrt{M\Omega_0/\hbar}}{2^n n!\sqrt{\pi}}\right]^{1/2}\mathrm{H}_n\left(\sqrt{\frac{M\Omega_0}{\hbar}}X_0\right)\cdot\exp\left(-\frac{M\Omega_0}{2\hbar}X_0^{\,2}\right),\tag{29}$$

式中 H_n 是通常的厄密多项式,Ω_0 如(24)式所示.显然,在阻尼不足($\mu^2(0)+2M\dot{\mu}(0))<4Mk$ 的情况下,$\Omega_0^{\,2}>0$.

把(27)和(29)两式分别代入(28)式,可得到

$$\Psi_n(X,t)=\left(\frac{\sqrt{M\Omega_0/\hbar}}{2^n n!\sqrt{\pi}\rho}\right)^{1/2}I_n\cdot\exp[B_1X^2+B_2X+B_3],\tag{30}$$

式中

$$I_n=\left(\frac{\Omega_0M}{2\pi\mathrm{i}\hbar\sin(\Omega_0s(t))}\right)^{1/2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{\Omega_0M}{2\hbar}(1-\mathrm{i}\cot(\Omega_0s(t)))\cdot\left(X_0-\frac{X-\rho R(t)}{\rho(1-\mathrm{i}\cot(\Omega_0s(t))\mathrm{i}\sin(\Omega_0s(t)))}\right)^2\right]\cdot\mathrm{H}_n\left(\sqrt{\frac{\Omega_0M}{\hbar}}X_0\right)\mathrm{d}X_0,\tag{31}$$

$$B_1=-\frac{\Omega_0M}{2\hbar\rho^2}\left(1-\frac{\mathrm{i}\rho\dot{\rho}}{\Omega_0}\right),\tag{32}$$

$$B_2=\frac{\Omega_0M}{\hbar\rho}R(t)\left(1+\mathrm{i}\frac{\rho^2\dot{R}(t)}{\Omega_0R(t)}\right),\tag{33}$$

$$B_3=-\frac{\Omega_0M}{2\hbar}R^2(t)\left\{1+\mathrm{i}\left[\cot(\Omega_0s(t))+\frac{1}{\Omega_0^{\,2}R^2(t)}\int_0^t\rho^2\left(-\frac{\Omega_0\cot(\Omega_0s(t))}{\rho^2}\cdot R(\tau)+\dot{R}(\tau)\right)^2\mathrm{d}\tau\right]\right\}.\tag{34}$$

令 $y=\sqrt{\frac{\Omega_0M}{\hbar}}X_0$,并利用如下公式:

$$\exp(2\tau y-\tau^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{H}_n(y)\frac{\tau^n}{n!},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-a(x-b)^2]dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\sqrt{\frac{1+\mathrm{i}\cot(\Omega_0s(t))}{1-\mathrm{i}\cot(\Omega_0s(t))}}=\exp[-\mathrm{i}(\Omega_0s(t))],\tag{35}$$

可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}I_n\frac{\tau^n}{n!}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{i}}}\left(\frac{1+\mathrm{i}\cot(\Omega_0s(t))}{1-\mathrm{i}\cot(\Omega_0s(t))}\right)^{1/4}\cdot\exp\left[2\sqrt{\frac{\Omega_0M}{\hbar}}\left(\frac{X}{\rho}-R(t)\right)\cdot\frac{\tau}{\mathrm{i}}\sqrt{\frac{1+\mathrm{i}\cot(\Omega_0s(t))}{1-\mathrm{i}\cot(\Omega_0s(t))}}-\left(\frac{\tau}{\mathrm{i}}\sqrt{\frac{1+\mathrm{i}\cot(\Omega_0s(t))}{1-\mathrm{i}\cot(\Omega_0s(t))}}\right)^2\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[-\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)\Omega_0s(t)\right]\cdot\mathrm{H}_n\left[\sqrt{\frac{\Omega_0M}{\hbar}}\left(\frac{X}{\rho}-R(t)\right)\right]\frac{\tau^n}{n!}.\tag{36}$$

这样,我们就可得到

$$I_n=\exp\left[-\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)\Omega_0s(t)\right]\cdot\mathrm{H}_n\left[\sqrt{\frac{\Omega_0M}{\hbar}}\left(\frac{X}{\rho}-R(t)\right)\right].\tag{37}$$

最后,把(3)与(37)式同时代入(30)式,可得到在策动力作用下,含时阻尼谐振子在量子化后的严格波函数为

$$\Psi_n(x,t)=\left(\frac{\sqrt{M\Omega_0/\hbar}}{2^n n!\sqrt{\pi}\rho}\right)^{1/2}\mathrm{H}_n\left[\sqrt{\frac{M\Omega_0}{\hbar}}\cdot\left(\frac{x\exp\left(\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{2M}\mathrm{d}\tau\right)}{\rho}-R(t)\right)\right]\cdot\exp\left[B_1x^2\exp\left(\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{M}\mathrm{d}\tau\right)+B_2x\exp\left(\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{2M}\mathrm{d}\tau\right)+B_3\right]\cdot\exp\left[-\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)\Omega_0s(t)\right].\tag{38}$$

5　讨　论

很明显,当 $\mu(t)=\mu=$ 常数时,由(23)式可得 $\Omega^2=\frac{k}{M}-\frac{\mu^2}{4M^2}$,由辅助方程(22)可得 $\rho=1$(-1 舍去),由(25)式可得 $s=t$.于是,(38)式就自然地退化到文献[12]所给出的非含时(指阻尼系数不随时间变化)阻尼谐振子的严格波函数(22)式.当 $t=0$ 时,$f(t)=0$,$X(0)=X_0=x$,同样由辅助方程(22)可得 $\rho=1$,由(25)式可得 $s=t$.这样,(38)式又能自然地退化到(29)式.这些正是我们所期望的结果,同时也说明,对于阻尼谐振子而言,(38)式所表示的严格波函数具有更普遍的意义.

另外，当 $t=0$ 时，由 $f(t)=0$，$X(0)=X_0=x$ 不难证明所论含时阻尼谐振子的坐标、动量的基态平均值和方均值分别为

$$\overline{x} = <0|x|0> = 0, \tag{39}$$

$$\overline{p} = <0|p|0> = 0, \tag{40}$$

$$\overline{(\triangle x)^2} = <0|x^2|0> = \frac{\hbar}{2M\sqrt{\frac{k}{M}-\frac{\mu^2(0)}{4M^2}-\frac{\dot{\mu}(0)}{2M}}}, \tag{41}$$

$$\overline{(\triangle p)^2} = <0|p|0> = \frac{\hbar k}{2M\sqrt{\frac{k}{M}-\frac{\mu^2(0)}{4M^2}-\frac{\dot{\mu}(0)}{2M}}}. \tag{42}$$

综上所述，在对含时阻尼谐振子的量子力学处理中，当不考虑外界策动力，即 $t=0$，$f(t)=0$ 时，所论含时阻尼谐振子的坐标和动量的基态平均值均为零，但它们的方均值不为零.坐标和动量都有零点涨落，两者的不确定关系为

$$\overline{(\triangle x)^2}\cdot\overline{(\triangle p)^2} = \frac{\hbar^2 k}{4\left(k-\frac{\mu^2(0)}{4M}-\frac{\dot{\mu}(0)}{2}\right)}. \tag{43}$$

很明显，当 $\mu(t)=\mu=$ 常数时，(43)式就能回到文献[12]的(27)式.当 $\mu(t)=0$ 时，(43)式又能自然地退化到无阻尼谐振子坐标和动量的不确定关系.

作者对南京大学冯金福博士给予的有益讨论表示感谢.

[1] F.Negro, A.Tartaglia, *Phys*, *Rev*., **A23**(1981), 1591.

[2] R.K.Colegraveand, M S.Abdalla, *J*. *Phys*., **A15**(1982), 1549.

[3] M.S.Abdalla, R.K.Colegrave, *Phys*. *Rev*., **A32**(1985), 1958.

[4] M.S.Abdalla, *Phys*. *Rev*., **A33**(1985), 2870.

[5] M.S.Abdalla, *Phys*. *Rev*., **A34**(1986), 4598.

[6] H.G.Oh *et al*., *Phys*. *Rev*., **A40**(1989), 45.

[7] H.G.Oh, H. R. Lee, T. F. George, C. I. Um, *Phys*, *Rev*., **A39**(1989), 5515.

[8] M.S.Abdalla, *Phys*. *Rev*., **A33**(1986), 1870.

[9] Z.Y.Gu, S.W.Qian, *Euro Phys*. *Lett*., **10**(7)(1989), 615.

[10] S.W.Qian, Z.Y.Gu, W.Wang, *Phys*. *Lett*., **A157**(1991), 456.

[11] Z.Y.Gu, S.W.Qian, *J*. *Phys*., **A27**(1994), 3989.

[12] R.L.Ling, J.F.Feng, *Acta Phys*. *Sin*., **47**(1998), 1952(in Chinese)[凌瑞良、冯金福，物理学报，**47**(1998), 1952].

[13] R.Z.Zhu, *Acta Phys*. *Sin*., **30**(1981), 1410(in Chinese)[朱如曾，物理学报，**30**(1981), 1410.]

PROPAGATOR AND EXACT WAVE FUNCTION OF THE TIME-DEPENDENTLY DAMPED HARMONIC OSCILLATOR

LING RUI-LIANG

(*Department of Physics*, *Changshu Teachers College*, *Changshu* 215500, *China*)

(Received 16 February 2001)

ABSTRACT

By means of canonical transformation, a direct quantization scheme is found for a harmonic oscillator whose damping coefficient is time-dependent. By adopting the Gaussian-type propagator and Feynman's path integral method, the exact wave function is derived. Some discussions made.

Keywords: time-dependent damping, propagator, Feynman's path integral

PACC: 0365